O KONSTRUKCÍCH OS ELIPSY Z JEJÍCH SDRUŽENÝCH PRŮMĚRŮ

Metodicko-historický příspěvek

Zbyněk Nádeník

Úvod

Výjimečnou důkladnost, s níž Jan Sobotka napsal svoji *Deskriptivní geometrii promítání parallelního* [*] (Praha 1906, viz Z. Nádeník [37]) dosvědčuje řada způsobů, jak sestrojit osy elipsy, jsou-li dány její sdružené průměry.[1]

Využiji příležitosti poskytnuté Sobotkovou knihou – a staršího podnětu, o kterém se ještě v této první části úvodu zmíním – k širšímu pohledu na tyto konstrukce, a to až do data, kdy vyšla, tj. do začátku 20. století. Ale pohled nebude úplný ze dvou důvodů.

Předně z něj vyloučím konstrukce, které – ať ve svém původu, ať v grafickém provedení – využívají takových poznatků z projektivní či afinní geometrie, které nejsou zcela elementární. Uvedu dva příklady: a) První, v němž jsou konstrukce založeny na vztahu kružnice a elipsy jako vzoru a obrazu v obecné afinitě. Jej reprezentují konstrukce z [*], odd. 183, str. 258–260 s obr. 195, ve starší literatuře R. Skuherský [47] 1858, str. 81 a obr. 25, v novější literatuře třeba J. Kounovský – F. Vyčichlo [20] 1948, str. 259 s obr. 188, v literatuře z posledních let E. Kraemer [21] 1991, str. 142–143 s obr. 139 (uvádím pouze české autory). b) Druhý, který využívá jiných speciálních poznatků ze zmíněných geometrií. Takovým je např. článek B. Chalupníčka [15]. Ke konstrukci os elipsy ze sdružených průměrů a příbuzných úloh využil věty Eduarda Weyra o kuželosečce, která prochází dvěma ze čtyř základních bodů svazku kuželoseček; viz Z. Nádeník [34], str. 67 a 72–73. Zvláště nepřihlížím ke konstrukcím z knih o projektivní geometrii.

Za druhé si netroufám tvrdit, že jsem se i jen přiblížil úplnějšímu shrnutí zmíněných konstrukcí publikovaných do roku 1906. Tak třeba z knih o deskriptivní geometrii si všímám jen těch nejznámějších. Rozsah literatury, který by bylo třeba prohlédnout, je totiž enormní.

Uvidíme, že se autoři – jistě nevědomky – opakovali. Dostaneme se k tomu u prací z 19. století, ale znám i případ dokonce z poloviny 20. století. R. Jacobi [16] 1952 sice připomíná Pappa a D. Rytze (viz dále odd. 1 a 5), ale sám uvádí způsob, který je identický se Steinerovou konstrukcí (viz dále odd. 9).

Starší podnět, o kterém jsem se výše zmínil, vznikl na konferenci o deskriptivní geometrii a počítačové grafice v Perninku 1993 (viz Z. Nádeník [32], [33]). Když jsem se přimlouval za spojení deskriptivní a analytické geometrie, uslyšel jsem námitku, že

[1] Viz odd. 172, odst. 1–5 na str. 239–242 s obr. 180–183 a pozn. k odd. 172 na str. 632; odd. 183 na str. 258–260 s obr. 195 a pozn. k odd. 183 na str. 633; odd. 203 na str. 283 s obr. 220.

třeba Rytzova konstrukce nepřipouští jednoduchý analytický důkaz. Nemohl jsem okamžitě reagovat; činím tak až nyní tím, že ke konstrukcím připojuji analytické důkazy. Jako kuriozitu doplňuji, že analytické odůvodnění Rytzovy konstrukce je v učebnici analytické geometrie, z které jsem se učil na reálce: K. Šilháček – H. Sechovský [51] 1936, str. 113.

— — —

Vyjdu z výborného přehledu K. Pelze (1845–1908, profesor deskriptivní geometrie na technice ve Štýrském Hradci a od roku 1896 na české technice v Praze) *Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugierten Diametern* [41] 1876. V něm K. Pelz nejdříve vyložil důležitost uvedené konstrukce, a pak se o jeho účelu vyjádřil takto (str. 4):

> *Wir haben uns im Nachfolgenden die Aufgabe gestellt, alle uns bekannten Lösungen des vorliegenden Problem's anzuführen, hauptsächlich aber, was bisher unseres Wissens nicht geschah, auch deren Beweise auf rein elementarem Wege (aus einer einzigen Figur) abzuleiten, und sind der Ansicht, dass jede der hier gegebenen Constructionen der Einfachheit des bezüglichen Beweises wegen, in die Vorträge über constructive oder darstellende Geometrie an der Realschule aufgenommen werden kann.*[2] [3]

V knižní literatuře o deskriptivní geometrii vím jen o dvou místech, na nichž je Pelzův článek citován: F. Obenrauch [39] 1897, str. 421, a E. Müller [31] 1920, str. 161.

Poznáme, že K. Pelzovi unikla řada konstrukcí, ale i tak je jeho soupis obdivuhodný, neboť jej zpracoval za svého působení v Těšíně daleko od větších knihoven.

Pelzovy citace uspořádám chronologicky:

1830 — návod bez důkazu z předloh, které pro zedníky vydala deputace[4] pro řemesla v Berlíně (viz odd. 2)

1839 — Chasles [7] (K. Pelz cituje německý překlad franc. originálu 1837; viz odd. 4)

1845 — Mossbrugger [29] a Rytz (viz dále v tomto úvodu a odd. 5)

1849 — Meyer [28] (viz odd. 6)

1853 — Mossbrugger a Rytz [30] (viz odd. 5)

---

[2] V dalším jsme si uložili úlohu, uvést všechna nám známá řešení předloženého problému, hlavně však, což se pokud víme dosud nestalo, odvodit jejich důkazy čistě elementárním způsobem (z jediného obrázku), a domníváme se, že každá ze zde uvedených konstrukcí kvůli jednoduchosti příslušného důkazu může být pojata do přednášek o konstruktivní nebo deskriptivní geometrii na reálkách.

[3] Je ještě jeden důvod, pro který je třeba upozornit na Pelzův přehled. Čeští deskriptiváři – ve snaze „zastřít" archaismus, s nímž pojímají deskriptivní geometrii – zavedli pro ni název „konstruktivní geometrie". Trvalo jim několik desetiletí, než k nim dolehl ohlas rektorské nástupní řeči E. Kruppy (1885–1967) na Technické vysoké škole ve Vídni 1953 (ve svém projevu definoval konstruktivní geometrii) a ohlas knih Hohenbergovy 1956 a Kruppovy 1957 a pozdější Braunerovy 1986. Ale označení „konstruktivní geometrie" je mnohem starší. Užíval je už K. Pelz ve svém přehledu, dokonce se v něm na str. 4 odvolává na učebnici *Constructive Geometrie* od B. Moshammera pro reálky. Viz ostatně závěr hořejšího citátu.

[4] Deputace se v Německu nazýval dozorčí výbor v nějakém oboru obecní správy.

1858 — Skuherský [47] (viz výše)

1867 — Steiner [49], [50] (vyšlo posmrtně, viz odd. 9)

1871 — Delabar [8], [9] (viz dále v tomto úvodu a odd. 5)

— Fialkowski [11] (rok 1. vydání mi zůstal neznám; měl jsem v ruce až 3. vydání z roku 1882)

— — —

Téměř v každé učebnici deskriptivní geometrie je Rytzova konstrukce; deskriptivní geometři ji používali tisícekrát. Ale znám jen jedinou českou knihu, v níž je zmínka o původu této konstrukce. J. Sobotka [*], str. 632, v poznámce k odd. 172 napsal: *Konstrukci uvádí Mossbrugger ve svých Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive, Zürich 1845, podotýkaje, že ji má od Rytze, pročež Wiener konstrukci tu nazývá Rytzovou.*

David Rytz (1801–1868) byl profesor matematiky na průmyslové škole v Aarau ve Švýcarsku.

Leopold Mossbrugger (1796–1864) byl profesor matematiky na kantonské škole rovněž v Aarau. Konstrukci, kterou vymyslil jeho kolega D. Rytz, převzal do své Sobotkou citované knihy [29], v níž na str. 123–125, vycházeje z Apolloniových vzorců a trigonometrie, správnost konstrukce dokázal. V poznámce pod čarou na str. 125 L. Mossbrugger dodává:

> *Die oben angegebene Construction der Achsen der Ellipse aus zwei gegebenen Durchmessern hat mir Hr. Rytz, Professor der Mathematik an der Gewerbeschule zu Aarau, mitgetheilt; die analytische Herleitung ihrer Richtigkeit habe ich dazu gemacht.*[5]

Christian Wiener (1826–1896) byl profesorem deskriptivní geometrie na technice v Karlsruhe a autorem významné dvojdílné učebnice *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* 1884 a 1887. V jejím prvním dílu [54] – popisuje sestrojení os elipsy z dvojice jejích sdružených poloměrů – Ch. Wiener doprovází Rytzovu konstrukci touto poznámkou pod čarou na str. 293:

> *Dieses Verfahren teilt Mossbrugger in seinen „Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der géométrie descriptive u. s. w., Zürich, 1845“ S. 123 mit und sagt, dass er es von Prof. Rytz in Aarau erfahren habe.* [6]

L. Burmester (1840–1927), profesor deskriptivní geometrie na technice v Drážďanech, psal podobně – už před Ch. Wienerem – ve své učebnici [5] 1883, str. 16, o Rytzově konstrukci; tato učebnice věnovaná speciálnímu tématu, byla mnohem méně známá než Wienerova.

[5] Výše uvedenou konstrukci os elipsy z daných průměrů (v [30], str. 118 je už doplněno: conjugirten = sdružených) mi sdělil pan Rytz, profesor matematiky na průmyslové škole v Aarau; analytické odvození jsem doplnil já.

[6] Tento postup sděluje Mossbrugger ve svých „Grösstentheils . . . “ na str. 123 a říká, že se jej dozvěděl od prof. Rytze v Aarau.

LA THEORIE ET LA PRATIQUE
DE LA
COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,
POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES
Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires,
OU
TRAITÉ DE STEREOTOMIE A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE.
Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis,
Ingenieur ordinaire du Roy en Chef à Landau.

TOME PREMIER.

A STRASBOURG,
Chez JEAN DANIEL DOULSSEKER le Fils, Marchand Libraire
à l'entrée de la Ruë dite Flader-Gaſs,
A PARIS,
Chez L. H. GUERIN l'aîné, Ruë St. Jacques, vis-à-vis St. Yves.

M DCC XXXVII.

G. Loria (1862–1953), známý geometr a historik matematiky působivší na univerzitě v Janově, se o Rytzově konstrukci v [22], str. 301, vyjádřil takto:

> *. . . la construzione del Rytz è di una semplicità ed eleganza he ci sembra difficile superare.*[7]

D. Rytz a L. Mossbrugger měli – více než před 100 lety – předchůdce. Opět znám jen jedinou českou učebnici, v níž je při naší konstrukci jmenován. J. Sobotka [*], str. 632, v poznámce k odd. 172 uvádí: *Ke konstrukci viz Frézier: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois,* 2^{e} *édition, t. 1, 1754.*

Amédée-François Frézier (1682–1773)[8] uvedl v [12] 1737, sv. I, str. 132–133, konstrukci, která – jak uvidíme – je velmi blízká konstrukci Rytzově. Zase Ch. Wiener [54] 1884, str. 292, o ní píše:

> *Die folgende einfachste der bekannten Konstruktionen führt schon Frézier, jedoch mit einem ungenügenden Beweise versehen, an.*[9]

Pak cituje [12], „nouv. (2) édit., t. 1, 1754, p. 159; (1. Ausg. 1737)“. Podrobněji k tomu viz odd. 2. Ch. Wiener musel Frézierovo dílo znát, jeho zmínka není jistě „z druhé ruky“. Dosvědčuje to popis jeho obsahu v předmluvě v prvním svazku [54] 1884, str. 23–25. Už před 100 lety bylo Frézierovo dílo velmi vzácné; viz k tomu Z. Nádeník [35], str. 154.

K. Pelz ve svém článku [41] A. F. Fréziera necituje, ale přesto Frézierova konstrukce v Pelzově souhrnu nechybí. Je totiž identická s konstrukcí, kterou K. Pelz reprodukuje podle výše zmíněných berlínských předloh z roku 1830.

D. Rytzovi a L. Mossbruggerovi byl A. F. Frézier neznám. Stejně tak byli pozdějším autorům neznámí D. Rytz či L. Mossbrugger. Příkladem je G. Delabar, profesor matematiky na kantonské a pokračovací škole v St. Gallen ve Švýcarsku, který začíná svůj příspěvek [9] 1871 takto:

> *In dem 4. Hefte meiner „Anleitung zum Linearzeichen“, welches die „Parallelperspektive“ behandelt und gegenwärtig unter der Presse sich befindet*[10] *, habe ich von der im Titel erwähnten Aufgabe* (tj. konstrukce os elipsy ze sdružených průměrů) *eine Auflösung angegeben, die, so viel mir bekannt, neu ist . . .*[11]

---

[7] Rytzova konstrukce má jednoduchost a eleganci, kterou lze nesnadno překonat.

[8] Pro několik vět o jeho biografii viz Z. Nádeník [35], str. 154. Na této straně jsem se v bibliografickém údaji dopustil chyby: První vydání Frézierova díla má 3 – a nikoliv, jak jsem uvedl, 2 svazky. V nedávné době, kdy jsem článek [35] psal a kdy byl v tisku, byly staré fondy Národní knihovny pro stěhování nepřístupné; spolehl jsem se na špatnou citaci. Vypůjčit jsem [12] mohl zase až v polovině roku 1999. Připojuji faksmile titulního listu prvního dílu.

[9] Následující konstrukci, nejjednodušší ze známých, ale opatřenou nedostatečným důkazem, uvádí už Frézier.

[10] Přístupné mi bylo pouze 2. vyd. [8] 1893.

[11] Ve 4. sešitu svého *Úvodu k lineárnímu kreslení*, který jedná o rovnoběžné perspektivě a nyní je v tisku, udal jsem pro úlohu zmíněnou v nadpisu řešení, které – pokud je mi známo – je nové . . .

Ale Delabarovo řešení splývá s Rytzovým. Mezi knihami L. Mossbruggera a G. Delabara je časový odstup o málo víc než 25 let a mezi jejich působišti (na stejném typu školy) Aarau a St. Gallen je přímá vzdálenost 100 km. Navíc obě konstrukce byly uveřejněny v časopisu Archiv der Mathematik und Physik 1853 a 1871. Právem se tedy K. Pelz v [41] 1876, str. 8, pozastavuje nad tím, že konstrukce je připisována Delabarovi, a zdůrazňuje D. Rytze a L. Mossbruggera – nikoliv však A. F. Fréziera – jako předchůdce.

— — —

Zhruba 20 let po Pelzově přehledu vydal F. Obenrauch *Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie . . .* [39] 1897. Na str. 420–421 vyjmenovává – aniž by je zřetelně charakterizoval – práce o konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů a o přímém určení os kuželosečky z jejích prvků. Cituje tyto autory, ale nikoliv zcela spolehlivě:

1845, 1853 — D. Rytz a L. Mossbrugger (viz výše Pelzův přehled). F. Obenrauch píše (str. 420), že za p r v n í (zdůraznil Z. N.) určení os elipsy vděčíme D. Rytzovi; uvidíme, že F. Obenrauch přehlédl tyto autory: Apollonios – Pappos, Frézier, Euler, Chasles.

1856 — N. Fialkowski (konstrukce elipsy, je-li dána osa nebo průměr a další prvky; konstrukci os ze sdružených průměrů jsem nenašel).

1864 — K. Mosshammer (konstrukce založené na vztahu pól – polára s přímým nalezením os, bez prostřednictví sdružených průměrů).

1867 — J. Steiner (viz výše Pelzův přehled).

1867 — K. Pelz (na citovaném místě jsem nenašel).

1871 — R. Niemtschik (konstrukci os elipsy ze sdružených průměrů jsem nenašel).

1874, 1875 — G. Peschka (obě práce – první v Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 26, 242–246, a druhá v Archiv der Math. und Physik 57, 63–72 – patří přímému určení os, bez prostřednictví sdružených průměrů, perspektivního obrazu kružnice).

1876 — K. Pelz (přímé konstrukce os kuželosečky jsou založeny na polárních vlastnostech a involuci, a tedy i tím se vymykají omezení ze začátku úvodu).

1876 — K. Pelz (viz jeho výše citovaný přehled).

1882 — M. Lazarski (jeho práce ve zprávách Akademie věd v Krakově mi zůstala nepřístupná).

1887, 1890 — F. Ruth (podle citovaných údajů jsem našel jen jednu práci, ale na jiné téma).

1887 — W. Miorini

1890 — F. Hopfner

1891 — K. Pelz

1892 — E. Janisch

1892 — T. Schmid

1892 — W. Binder

Posledních 6 prací mi zůstalo nepřístupných. První a šestá vyšly ve zprávách reálek v Bílsku a ve Vídeňském Novém Městě, zbývající čtyři v časopisu Zeitschrift für das Realschulwesen. Z Obenrauchových slov nelze jednoznačně usoudit, že obsahují konstrukce os elipsy z jejích sdružených průměrů.

— — —

Až na výjimky, na které upozorním, jsou v literatuře důkazy všech uváděných konstrukcí výlučně syntetické. Jako protějšek je opatřím velmi jednoduchými analytickými důkazy. Tím současně odpovím na rozšířený názor, že právě konstrukce os elipsy z jejích sdružených průměrů je příkladem, u něhož syntetický důkaz je snadnější a průhlednější než analytický (viz první část tohoto úvodu).

Se syntetickými metodami lze dobře vniknout ve společné motivace konstrukcí; to se však nepodaří studentovi–začátečníkovi s úzkým pohledem, ale až tomu, kdo syntetickou a projektivní geometrii vidí z širšího úhlu. Ten potřebuje čas a cvik, jinak se syntetické metody mohou zdát souhrnem velmi speciálních návodů bez vnitřní souvislosti, které se obtížně pamatují a vytvářejí.

Analytická metoda se vyznačuje jednoduchostí, jak uvidíme při všech konstrukcích; důkazy vyžadují jen elementární poznatky. Jistou nevýhodou, kterou však student–začátečník nepocítí, je, že konstrukce jsou analyticky potvrzovány, nikoliv odvozovány. Až trochu hlubší pohled naznačí, že analytické postupy jsou propojeny elementárními vlastnostmi jisté ortogonální matice (viz odd. 0) a z ní vycházejícími Apolloniovými vzorci.

— — —

V následujícím odd. 0 jsou odvozeny základní analytické relace pro sdružené poloměry. Odd. 1–15 obsahují řešení jednotlivých autorů; začínám literárními poznámkami označenými „L.“, pokračuji popisem konstrukce označeným „K.“ (nejdříve polohu, pak délky os) a končím analytickým důkazem označeným „D.“. Následují dva oddíly s dodatky „Chaslesova věta“ a „Výhled do trojrozměrného prostoru“. Zakončením je krátký „Závěr“. Obrázky 1–9, 11–13 k stejně očíslovaným oddílům jsou pro přehlednost soustředěny v závěru tohoto článku. Na všech obrázcích jsou dané sdružené poloměry OC, OD vytaženy slabě plně, osy silně plně, směry os silně čárkovaně.

0. Výchozí analytické vztahy

Mysleme si v rovině soustavu pravoúhlých souřadnic x, y s počátkem O a elipsu ε s poloosou a v ose x a s poloosou $b \neq a$ v ose y.[12] Zvolme v elipse její poloměry OC a OD s koncovými body

$$C[c_1 > 0, c_2 > 0], \quad D[d_1 > 0, d_2 < 0]; \tag{0.1}$$

délky těchto poloměrů jsou

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}. \tag{0.2}$$

Úhel poloměrů označíme ω. Budeme jej vždy brát ostrý.

Je ovšem

$$\frac{c_1^2}{a^2} + \frac{c_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{d_1^2}{a^2} + \frac{d_2^2}{b^2} = 1. \tag{0.3}$$

Zcela elementární úvahou zjistíme, že poloměry OC, OD jsou sdružené právě jen při

$$\frac{c_1\, d_1}{a^2} + \frac{c_2\, d_2}{b^2} = 0. \tag{0.4}$$

V dalším budeme sdruženost poloměrů OC, OD stále předpokládat.

Nemohu nepřipomenout, že rovnice (0.4) zapsaná ve tvaru $k_1\, k_2 = -b^2/a^2$, v němž $k_1 = c_2/c_1$ a $k_2 = d_2/d_1$ jsou směrnice poloměrů OC a OD, je v učebnicích analytické geometrie pro VII. třídu reálek, z nichž jsem se kdysi učil: J. Vojtěch [53] 1934, str. 100, a K. Šilháček – H. Sechovský [51] 1936, str. 107.

Rovnici (0.4) můžeme přepsat na

$$c_1\, d_1 + c_2\, d_2 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) c_2\, d_2 = 0. \tag{0.5}$$

Při ostrém úhlu ω je s (0.2)

$$0 < \cos\omega = \frac{c_1\, d_1 + c_2\, d_2}{cd},$$

tedy $c_1\, d_1 + c_2\, d_2 > 0$ a z (0.5) vzhledem k $c_2\, d_2 < 0$, jak je při (0.1), plyne

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 > 0, \qquad \text{tj.} \qquad a > b.$$

Slovy: V ostrém úhlu poloměrů leží hlavní poloosa.

Rovnice (0.3) a (0.4) jsou relace pro řádky determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{c_1}{a} & \dfrac{c_2}{b} \\[2ex] \dfrac{d_1}{a} & \dfrac{d_2}{b} \end{vmatrix}; \tag{0.6}$$

[12] Pokud to nebude nutné, nebudu slovně rozlišovat mezi úsečkou a její délkou; podobně mezi úhlem a jeho velikostí.

vyjadřují jeho ortogonalitu. Využijeme její základní vlastnosti [které lze ostatně pro (0.6) při (0.3) a (0.4) získat zcela elementárně]:

a) Stejné relace jako pro řádky determinantu (0.6) platí i pro sloupce:

$$c_1^2 + d_1^2 = a^2, \quad c_2^2 + d_2^2 = b^2, \tag{0.7}$$

$$c_1\, c_2 + d_1\, d_2 = 0. \tag{0.8}$$

b) Determinant (0.6) je roven ± 1; ihned je vidět, že při nerovnostech z (0.1) je

$$\Delta = -1. \tag{0.9}$$

c) Každý prvek v determinantu (0.6) je roven záporně vzatému svému doplňku:

$$d_1 = \frac{a}{b} c_2, \quad d_2 = -\frac{b}{a} c_1. \tag{0.10}$$

Kdybychom pracovali s parametrickým vyjádřením $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ souřadnic bodů elipsy, dospěli bychom k hořejším vztahům stejně snadno na základě poznatku, že parametry t koncových bodů sdružených poloměrů se liší o $\pi/2$. Srv. B. Bydžovský [6], str. 161.

Poznamenejme, že z (0.7) vychází bezprostředně vzhledem k (0.2) první Apolloniův vzorec

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2. \tag{0.11}$$

Píšeme-li (0.9) a (0.6) ve tvaru

$$-\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = a\, b, \tag{0.12}$$

tak známý geometrický význam vypsaného determinantu vede k druhému Apolloniovu vzorci

$$c\, d \sin\omega = a\, b. \tag{0.13}$$

— — —

Ve středu O vztyčme kolmici k poloměru OD a určeme na ní body D_ε s $\varepsilon = \pm 1$ tak, že $|OD_\varepsilon| = d$ a bod D_{+1} je v téže polorovině vyťaté spojnicí OD, jako bod C; viz obr. 0.1a na následující straně. Pak je

$$D_\varepsilon[-\varepsilon\, d_2, \varepsilon\, d_1]. \tag{0.14}$$

Přímky CD_ε mají směrnice

$$\frac{c_2 - \varepsilon\, d_1}{c_1 + \varepsilon\, d_2}, \tag{0.15}$$

o nichž pomocí (0.8) snadno zjistíme, že jsou si až na znaménko rovny:

$$\frac{c_2 - d_1}{c_1 + d_2} = -\frac{c_2 + d_1}{c_1 - d_2}. \tag{0.16}$$

Spojnice CD_ε jsou tedy symetrické podle přímky, která jde bodem C rovnoběžně s osou x. To má tento důsledek:

$[0.CD_\varepsilon]$ *Osy úhlů přímek CD_ε jsou rovnoběžné s osami elipsy.*

Pro vzdálenost bodů C, D_ε z (0.1) a (0.14) pomocí Apolloniových vzorců (0.11) a (0.12) $\equiv$ (0.13) dostaneme

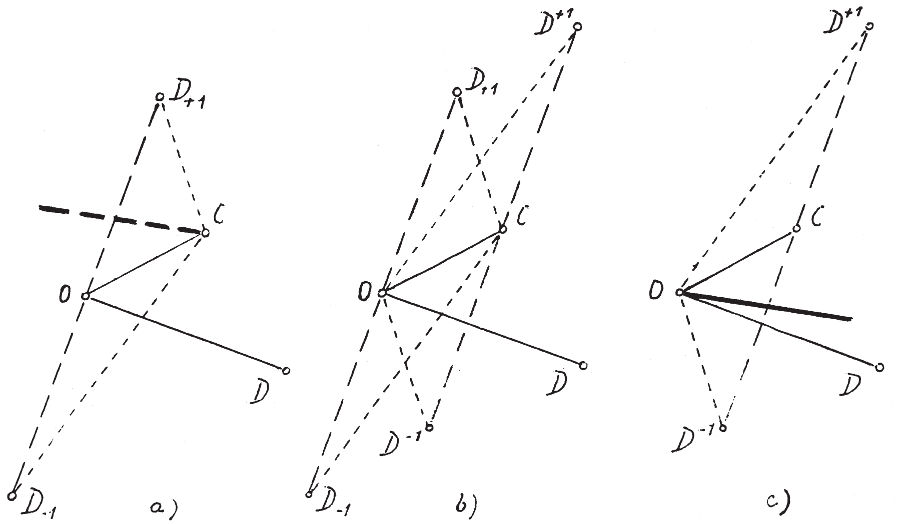
$$\begin{aligned} |CD_\varepsilon|^2 &= (c_1 + \varepsilon\, d_2)^2 + (c_2 - \varepsilon\, d_1)^2 = \\ &= c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2 + 2\varepsilon(c_1\, d_2 - c_2\, d_1) = \\ &= c^2 + d^2 - 2\varepsilon\, c\, d \sin\omega = a^2 + b^2 - 2\varepsilon\, a\, b = \\ &= (a - \varepsilon b)^2. \end{aligned} \tag{0.17}$$

Z toho ihned vychází:

$[0.\overline{CD_\varepsilon}]$ *Délky poloos elipsy jsou*

$$a = \tfrac{1}{2}\left(|CD_{-1}| + |CD_{+1}|\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(|CD_{-1}| - |CD_{+1}|\right).$$

Z bodu C spusťme kolmici na přímku OD a určeme na ní body D^ε s $\varepsilon = \pm 1$ tak, že $|CD^\varepsilon| = d$ a rovnoběžné polopřímky CD^{+1}, OD_{+1} jsou – směrem od počátečního bodu – souhlasně orientované; viz obr. 0.1c a 0.1b.



Obr. 0.1

Kdybychom obr. 0.1a a 0.1c, v nichž trojúhelníky OCD jsou shodné, položili na sebe tak, aby se trojúhelníky OCD ztotožnily, byly by D_ε, D^ε vrcholy rovnoběžníka, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s poloměrem OC a další dvě strany kolmé k poloměru OD; viz obr. 0.1b. Z toho by se už daly odvodit věty analogické k $[0.CD_\varepsilon]$ a $[0.\overline{CD_\varepsilon}]$ s body D^ε místo D_ε. Učiníme to však zase přímo analyticky.

Protože

$$D^\varepsilon[c_1 - \varepsilon\, d_2, c_2 + \varepsilon\, d_1], \tag{0.18}$$

tak přímky OD^ε mají směrnice

$$\frac{c_2 + \varepsilon\, d_1}{c_1 - \varepsilon\, d_2} \tag{0.19}$$

a zase platí (0.16). Věta $[0.CD_\varepsilon]$ se tedy parafrázuje takto:

$[\mathbf{0.}\boldsymbol{OD^\varepsilon}]$ *Osy úhlů přímek OD^ε jsou osami elipsy.*

Poněvadž podle (0.18)

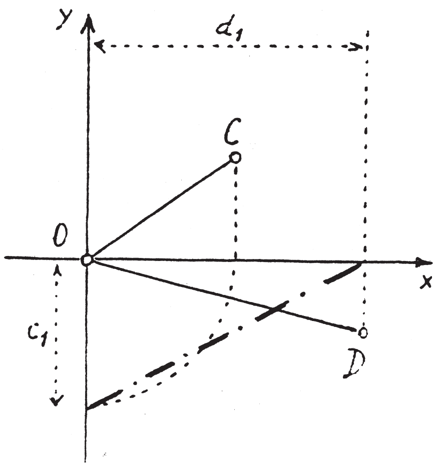
$$|OD^\varepsilon|^2 = (c_1 - \varepsilon\, d_2)^2 + (c_2 + \varepsilon\, d_1)^2,$$

tak známým nám už způsobem dospějeme k této analogii věty $[0.\overline{CD_\varepsilon}]$:

$[\mathbf{0.}\overline{\boldsymbol{OD^\varepsilon}}]$ *Délky poloos elipsy jsou*

$$a = \tfrac{1}{2}\left(|OD^{+1}| + |OD^{-1}|\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(|OD^{+1}| - |OD^{-1}|\right).$$

Pokud se již zná poloha os, určí se jejich délky také snadno z (0.7); viz obr. 0.2.



Obr. 0.2

— — —

1. Apollonios z Pergy, 3. stol. před Kr.

a Pappos Alexandrijský, 3. stol. po Kr.

L. Je doměnka, že konstrukci os elipsy z jejich sdružených průměrů objevil už Apollonios a zařadil ji do osmé ztracené knihy svého díla o kuželosečkách. Konstrukce je totiž v osmé knize Pappova spisu $M\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha\iota\ \Sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omega\gamma\alpha\iota$ (Matematická sbírka) [40], díl III, str. 1083, který je zasvěceným přehledem starověké geometrie (viz A. Kolman [19], str. 191). Pappos konstrukci pouze popsal, ale nedokázal; srv. M. Chasles [7] 1837, str. 45 (cituji zde i všude v dalším podle 2. nezměněného vydání Paris 1875, též str. 42 německého překladu 1839), a O. Terquem [52] 1844, str. 348–349.

L. Euler [10] 1750, str. 231–232, Pappovu konstrukci synteticky ověřil.

M. Chasles [7] 1837, str. 45 (něm. př. 1839, str. 42) – po citaci Pappa a L. Eulera – pokračoval:

> *. . . du même problème . . . D'autres géomètres l'ont aussi traité à leur manière.*[13]

Ale do roku 1837 je mi – kromě Pappa a L. Eulera – znám jediný geometr, který se úlohou zabýval: A. F. Frézier 1737 (viz dále).

G. Salmon [45] 1848 (1. vydání z tohoto roku jsem v Praze nenašel, cituji až podle 4. vydání 1863, str. 163; viz též G. Salmon – W. Fiedler [46], 2. vyd. 1866, str. 215, a 7. vyd., I. díl 1907, str. 340–341) reprodukuje – bez citace – Pappovu konstrukci a dokazuje ji způsobem blízkým Eulerovu.

R. Jacobi [16] 1952 – v novější době – když znovu objevuje Chaslesovu konstrukci (viz dále odd. 4), se o Pappově řešení letmo zmiňuje.

K. Viz obr. 1. Na prodloužení poloměru OC za bod C se určí bod C^* tak, že $|OC| \cdot |CC^*| = |OD|^2$. Tečnu t_c elipsy v bodě C (rovnoběžnou s poloměrem OD) protíná osa úsečky OC^* v bodě S, který je středem kružnice, jež – procházejíc středem O – seče tečnu t_c v bodech U a V os elipsy.

D. Podle (0.1) a (0.2) je $|OC| = c$, $|OD| = d$ a $C^*[\lambda\, c_1, \lambda\, c_2]$ se zatím neurčeným parametrem $\lambda > 1$. Tedy $|CC^*| = (\lambda - 1)c$, takže podmínka z konstrukce pro bod C^* vede k

$$\lambda = 1 + \frac{d^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

s použitím prvního Apolloniova vzorce (0.11). Tudíž

$$C^* \left[\frac{a^2 + b^2}{c^2} c_1, \frac{a^2 + b^2}{c^2} c_2\right].$$

Osa úsečky OC^* má tak rovnici

$$c_1\, x + c_2\, y - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = 0.$$

Tečnu t_c elipsy v bodě C rovnoběžnou s poloměrem OD – viz (0.4) –

$$\frac{c_1\, x}{a^2} + \frac{c_2\, y}{b^2} = 1 \qquad (1.1)$$

protíná v bodě

$$S \left[\frac{a^2}{2c_1}, \frac{b^2}{2c_2}\right].$$

[13] . . . téhož problému . . . Jiní geometři jej také probrali svým způsobem.

Kružnice opsaná kolem tohoto bodu tak, aby procházela počátkem O (středem elipsy), má rovnici

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c_1}x - \frac{b^2}{c_2}y = 0.$$

Tečnu t_c z (1.1) protíná v bodech

$$U\ \left[\frac{a^2}{c_1},\ 0\right] \qquad \text{a} \qquad V\left[0,\ \frac{b^2}{c_2}\right],$$

které leží na osách elipsy.

Délky poloos a, b poskytnou – vzhledem k

$$\sqrt{c_1 \cdot \frac{a^2}{c_1}} = a, \qquad\qquad \sqrt{c_2 \cdot \frac{b^2}{c_2}} = b$$

– elementární konstrukce na základě Euklidových vět.

— — —

2. A. F. Frézier 1737; [12], str. 132–133

L. A. F. Frézier popisuje konstrukci, která se jen málo a nepodstatně liší od konstrukce Rytzovy z roku 1845 (viz odd. 5).

K. Pelz ve svém souhrnném článku [41] reprodukuje z předloh vydaných 1830 pro zedníky berlínskou deputací konstrukci, která je identická s Frézierovou (viz už úvod).

Ch. Wiener 1884 ([54], str. 292) připomenul A. F. Fréziera poznámkou, kterou jsem citoval už v úvodu; pokud vím, je to nejstarší zmínka o Frézierově konstrukci.

J. Sobotka [*], str. 240, věnuje Frézierově konstrukci odst. 2 v odd. 172 a doplňuje ji poznámkou, kterou jsem uvedl už v úvodu. Z českých autorů jako jediný – zcela bez ohlasu – obrátil svou pozornost k Frézierově konstrukci. Protože se odvolává na 2. vydání z roku 1754 prvního svazku Frézierova díla, je pravděpodobné, že znal Wienerovu poznámku vztahující se k témuž vydání (viz úvod). V Praze jsem našel 1. vydání z roku 1737.

O. Baier [1] 1967 píše:

> *Aus dem Nachlass von F. Löbell wurde dem Institut für Geometrie an der Technischen Hochschule München eine sehr sorgfältige Niederschrift einer Vorlesung von F. Schur über darstellende Geometrie überlassen. Darin ist die bekannte Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern nicht wie üblich als „Rytzsche Konstruktion" bezeichnet, sondern es findet sich dort der Vermerk: „Frézier, Coupe des pierres et des bois, 2e éd., t. 1, 1754, p. 159".*[14]

[14] Z pozůstalosti F. Löbella byl geometrickému ústavu Vysoké technické školy v Mnichově přenechán velmi pečlivý rukopis přednášky F. Schura o deskriptivní geometrii. V něm je známá konstrukce os elipsy z dvou sdružených poloměrů označena nikoliv – jak je obvyklé – jako „Rytzova konstrukce", ale je v něm poznámka: „Frézier, . . . , str. 159."

Pak O. Baier stručně reprodukuje Frézierův postup (z exempláře I. dílu, 2. vydání 1754, který je ve fondu Bavorské státní knihovny v Mnichově).

H. Brauner [2] 1986, str. 154, je autorem poznámky, která je v nové literatuře výjimečná; odvolává se v ní na Baierův článek [1]:

> *Diese 1845 von D. Rytz (1801–1868) mitgeteilte Konstruktion unterscheidet sich nur geringfügig von einer Konstruktion, die 1754 A. Frézier (1682–1773) angegeben hat.*[15]

Frézierova konstrukce byla několikrát znovuobjevena; viz zvláště A. Mannheim (1831–1906, profesor matematiky na École polytechnique, plukovník dělostřelectva francouzské armády) [23] 1857, str. 188–189, při řešení kinematické úlohy č. 366 ze str. 126 a [26] 1894, str. 10–11.

K. Viz obr. 2. Kolem půlícího bodu Q^ε úsečky OD^ε se opíše kružnice procházející středem O. Tato kružnice protíná spojnici CQ^ε v bodech U a V hledaných os. Jejich délky jsou $|CU|$ a $|CV|$.

D. Půlící bod Q^ε úsečky OD^ε s krajním bodem D^ε z (0.18) je

$$Q^\varepsilon \left[\frac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{2}, \ \frac{c_2 + \varepsilon\, d_1}{2}\right]. \tag{2.1}$$

Kružnice se středem Q^ε a jdoucí počátkem je

$$x^2 + y^2 - (c_1 - \varepsilon\, d_2)x - (c_2 + \varepsilon\, d_1)y = 0. \tag{2.2}$$

Spojnice bodu C z (0.1) a bodu Q^ε z (2.1) má rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ \frac{c_1-\varepsilon\, d_2}{2} & \frac{c_2+\varepsilon\, d_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{čili} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ -\varepsilon\, d_2 & \varepsilon\, d_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(c_2 - \varepsilon\, d_1)x - (c_1 + \varepsilon\, d_2)y + \varepsilon(c_1\, d_1 + c_2\, d_2) = 0,$$

kterou vzhledem k (0.8) můžeme přepsat na

$$(c_2 - \varepsilon\, d_1)x - (c_1 + \varepsilon\, d_2)y + \left\{ \begin{array}{r} -(c_1 - \varepsilon\, d_2)(c_2 - \varepsilon\, d_1) = 0 \\ (c_1 + \varepsilon\, d_2)(c_2 + \varepsilon\, d_1) = 0 \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

Na první pohled je vidět, že kružnice (2.2) a spojnice (2.3) mají společné body

$$U\ [c_1 - \varepsilon\, d_2, 0] \quad \text{a} \quad V\ [0, c_2 + \varepsilon\, d_1] \tag{2.4}$$

ležící na osách. Pro tyto body je podle (0.7)

$$\begin{array}{rcccl} |CU|^2 &=& [(c_1 - \varepsilon\, d_2) - c_1]^2 + [-c_2]^2 &=& c_2^2 + d_2^2 &=& b^2, \\ |CV|^2 &=& [-c_1]^2 + [(c_2 + \varepsilon\, d_1) - c_2]^2 &=& c_1^2 + d_1^2 &=& a^2. \end{array} \tag{2.5}$$

— — —

[15] Tato konstrukce sdělená D. Rytzem se liší jen málo od konstrukce, kterou udal A. Frézier 1754.

3. L. Euler 1750; [10], str. 224–234

L. M. Chasles [7] 1837, str. 45 (německý překlad 1839, str. 42), píše:

> *Pappos ne fait qu'énoncer sa construction, sans la démontrer. Euler en a rétabli la démonstration, et a donné en même temps plusieurs autres solutions du même problème (Novi Commentarii, de Pétersbourg, t. III, ann. 1750–1751).* [16]

O. Terquem [52] 1844, str. 349, Eulerovu práci rovněž cituje.

P. Schreiber z univerzity v Greifswaldu mě v roce 1998 na Eulerův článek též upozornil. Děkuji mu za to.

Není mi známa učebnice deskriptivní geometrie, v níž by bylo odvolání na Eulerovu práci [10]. Je ovšem pravda, že Eulerovy konstrukce nepatří k nejjednodušším.

První Eulerova konstrukce

K. Viz obr. 3. Polopřímku OD překlopíme kolem přímky OC a na překlopené poloze vytkneme bod D^* tak, že $\angle OCD^* = \angle ODC$ (tj. $\triangle OCD^* \sim \triangle ODC$ v poměru $c : d$). Budiž D' bod elipsy opačný k bodu D. Osy úhlů tvořených přímkami $D'D^*$ a $D'O$ jsou rovnoběžné s osami o_i $(i = 1, 2)$ elipsy. Budiž D_i kolmý průmět bodu D na osu o_i; budiž T_i průsečík osy o_i s tečnou elipsy v jejím bodě D. Délky poloos jsou $\sqrt{|OD_i| \cdot |OT_i|}$.

D. Při (0.1) a (0.2) je pro ostrý úhel ω poloměrů OC a OD (viz začátek odd. 0)

$$
\begin{aligned}
\cos\omega &= \frac{c_1\,d_1 + c_2\,d_2}{cd},\\
\sin\omega &= \sqrt{1-\left(\frac{c_1\,d_1+c_2\,d_2}{cd}\right)^2} = \frac{1}{c\,d}\sqrt{(c_1^2+c_2^2)(d_1^2+d_2^2)-(c_1\,d_1+c_2\,d_2)^2} =\\
&= \frac{1}{c\,d}\sqrt{(-c_1\,d_2+c_2\,d_1)^2} = \frac{-c_1\,d_2+c_2\,d_1}{c\,d}.
\end{aligned}
$$

Otočme kolem počátku bod $C[c_1, c_2]$ o úhel ω ve smyslu, kterým polopřímka OD přechází v polopřímku OC. Tak vznikne bod o souřadnicích

$$
\begin{aligned}
c_1\cos\omega - c_2\sin\omega &= \tfrac{1}{c\,d}\,[c_1(c_1\,d_1+c_2\,d_2) - c_2(-c_1\,d_2+c_2\,d_1)] =\\
&= \tfrac{1}{c\,d}\,[c_1^2\,d_1 + 2c_1\,c_2\,d_2 - c_2^2\,d_1] =\\
&= \tfrac{1}{c\,d}\,[c_1^2\,d_1 - 2d_1\,d_2^2 - c_2^2\,d_1] =\\
&= \tfrac{d_1}{c\,d}\,[c_1^2 - 2d_2^2 - c_2^2]
\end{aligned}
$$

(v tomto výpočtu jsme při přechodu od 2. ke 3. řádku využili (0.8), tj. $c_1\,c_2 = -d_1\,d_2$) a analogicky

$$c_1\sin\omega + c_2\cos\omega = \frac{d_2}{c\,d}\,\left[-c_1^2 - 2d_1^2 + c_2^2\right].$$

[16] Pappos svou konstrukci pouze uvedl, aniž ji dokázal. Euler pro ni sestavil důkaz a současně podal více jiných řešení stejného problému.

Aplikujme na něj ještě homotetii se středem O a poměrem c/d. Tak dostaneme bod $D^*[d_1^*,\ d_2^*]$ se souřadnicemi

$$d_1^* = \frac{d_1}{d^2}\ \left[c_1^2 - 2d_2^2 - c_2^2\right], \qquad d_2^* = \frac{d_2}{d^2}\ \left[-c_1^2 - 2d_1^2 + c_2^2\right].$$

Jeho spojnice s bodem $D'[-d_1, -d_2]$ protějším k bodu D z (0.1) má při (0.2) směrnici

$$\begin{aligned}\frac{d_2^* + d_2}{d_1^* + d_1} &= \frac{d_2(-c_1^2 - 2d_1^2 + c_2^2) + d_2(d_1^2 + d_2^2)}{d_1(c_1^2 - 2d_2^2 - c_2^2) + d_1(d_1^2 + d_2^2)} = \\ &= \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{-c_1^2 + c_2^2 - d_1^2 + d_2^2}{c_1^2 - c_2^2 + d_1^2 - d_2^2} = -\frac{d_2}{d_1}.\end{aligned}$$

Spojnice OD' má směrnici d_2/d_1. Vidíme tak, že přímky $D'D^*$ a $D'O$, majíce – až na znaménko – stejné směrnice, svírají s osou x stejné úhly; jinými slovy: osy elipsy jsou rovnoběžné s osami úhlů přímek $D'D^*$ a $D'O$.

Abychom určili délky poloos, veďme bodem D tečnu elipsy (rovnoběžnou s OC):

$$\frac{d_1}{a^2}x + \frac{d_2}{b^2}y = 1.$$

Souřadnicové osy protíná v bodech

$$T_1\ \left[\frac{a^2}{d_1},\ 0\right] \qquad \text{a} \qquad T_2\ \left[0,\ \frac{b^2}{d_2}\right].$$

Tedy

$$a = \sqrt{d_1 \cdot |OT_1|} \qquad b = \sqrt{-d_2 \cdot |OT_2|},$$

kde d_1 a d_2 mají známý geometrický význam (při (0.1) je $-d_2 > 0$).

Druhá Eulerova konstrukce

Osy elipsy jsou určeny zase jako osy úhlů dvou přímek. Délky os jsou zjištěny jako v první konstrukci.

Třetí Eulerova konstrukce

Osy elipsy jsou určeny jako v druhé konstrukci. Na hlavní ose pak L. Euler nachází ohniska a z nich už známým postupem délky poloos.

Čtvrtá Eulerova konstrukce

Tato konstrukce je složitější než tři předcházející a dokonce nejsložitější ze všech konstrukcí (os elipsy z jejích sdružených průměrů), s nimiž jsem se setkal a které popisuji v ostatních oddílech.

— — —

Popis všech Eulerových konstrukcí včetně jejich analytických důkazů je v článcích Z. Nádeníka [36] a [38].

— — —

4. M. Chasles[17] 1837; [7], str. 43 a 362

L. M. Chasles uvádí svou konstrukci v poznámce pod čarou na str. 43 při rozboru Pappových spisů a důkladněji na str. 359–362 s podrobným popisem na str. 362 (něm. překlad 1839, str. 42 a str. 382 a násl.). Dostal ji jako rovinnou analogii své prostorové konstrukce os elipsoidu z jeho tří sdružených poloměrů a nedokazuje ji.

J. Steiner (1796–1863) si v souvislosti s Chaslesovou konstrukcí zaslouží obsáhlejší poznámku. Posmrtně vydaná kniha [50], díl II, 1867 má v podtitulku: *Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuskripte Jacob Steiner's bearbeitet von H. Schröder*. Několik posledních let svého života J. Steiner pro nemoc už nepřednášel; přednášky lze tedy klást do let 1835 (kdy se stal profesorem berlínské univerzity) až 1860. Na str. 178–179 dílu II je konstrukce identická s Chaslesovou 1837. Je tedy možné, že J. Steiner ji ve svých přednáškách vykládal ještě před tím, než M. Chasles vydal svou *Aperçu historique* ... [7]. Ale výše zmíněný způsob, kterým M. Chasles došel ke své konstrukci (od úlohy prostorové k rovinné), vylučuje s jistotou, že by byl o ní nějak věděl ze Steinerových přednášek.

O. Terquem [52] 1844, str. 349, napsal:

> *Dans ces derniers temps, M. Chasles a indiqué pour l'ellipse, cette construction d'une élégance remarquable.*[18]

Pak Chaslesovu konstrukci reprodukuje a pomocí trigonometrie i dokazuje.

Breton de Champ [3] 1846 ji verifikuje pomocí kinematického vytvoření elipsy.

N. Fialkowski (architekt a profesor geometrie na reálkách ve Vídni) vydal před rokem 1876 sbírku [11] – cituje ji K. Pelz ve svém přehledu [41] 1876 – která mi byla přístupná až ve 3. vyd. 1882. Obsahuje návody (bez důkazů) k řešení více než 1600 geometrických úloh. Úlohy 1069–1071 patří konstrukcím os elipsy ze sdružených průměrů. První (s obr. 799) je založena na elipse jako obrazu kružnice v šikmé afinitě, a tedy ji – viz začátek úvodu – vynechávám. Druhá (s obr. 799a) je identická s Chaslesovou konstrukcí a je u ní jediná literární poznámka: „nach Aronhold".[19] K třetí konstrukci viz odd. 5.

A. Mannheim 1878, [24] s odvoláním na Chaslesovo kompendium [7], str. 362, podává důkazy Chaslesovy konstrukce, které jsou založeny na kinematické a elementární geometrii; píše (str. 529), že tento svůj krátký článek napsal při shromažďování materiálu pro svou knihu [26].

H. Zeuthen (1839–1920; profesor matematiky na univerzitě v Kodani, významný historik matematiky) 1882, [55], str. 44–45, aniž by se zmínil o M. Chaslesovi, odůvodnil jeho konstrukci zcela originálně. Nejdříve sestrojil osy hyperboly z jejích sdružených průměrů (to je velmi jednoduché, neboť tečny v koncových bodech sdružených

[17] M. Chasles (1793–1880), od roku 1846 profesor matematiky na Sorbonně, významný historik geometrie.

[18] V tento poslední čas, pan Chasles ohlásil pro elipsu tuto konstrukci pozoruhodné elegance.

[19] S. Aronhold (1819–1884) byl profesorem na stavební akademii v Berlíně a jedním ze zakladatelů teorie invariantů; pro geometrii je významná jeho práce z roku 1864 o 28 dvojných tečnách obecné rovinné kvartiky.

průměrů hyperboly a hyperboly k ní konjugované se protínají v bodech asymptot), a pak – využitím vlastností konfokálních kuželoseček – řešil příslušnou úlohu pro elipsu tak, že ji převedl na úlohu pro hyperbolu. Závěrem popsal Chaslesovu konstrukci bez explicitního přechodu k hyperbole.

V. Jeřábek (1845–1931; ředitel reálky v Brně) 1895, [17] bez jakékoliv citace uvádí dvě konstrukce, které splývají s konstrukcemi Chaslesovou a Rytzovou z odd. 5. Důkazy, které jsou původní, vycházejí z Apolloniových vzorců a zůstávají v rozsahu elementární geometrie.

K. Viz obr. 4. Osy se sestrojí podle věty $[0.OD^\varepsilon]$ a jejich délky podle věty $[0.\overline{OD^\varepsilon}]$ z odd. 0.

S Chaslesovým jménem se spojuje konstrukce ohnisek (viz F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský [18], 1929, str. 76), kterou popíši: Kružnice procházející body D^ε a mající střed na vedlejší ose elipsy protíná její hlavní osu v (reálných) ohniscích. Dodejme hned: Kružnice procházející body D^ε a mající střed na hlavní ose elipsy protíná její vedlejší osu v (imaginárních) ohniscích.

D. Kružnice, která jde body D^ε z (0.18) a má střed na ose y (tj. vedlejší ose elipsy), má rovnici tvaru

$$x^2 + y^2 + Ny + L = 0, \tag{4.1}$$

pro niž

$$(c_1 - \varepsilon\, d_2)^2 + (c_2 + \varepsilon\, d_1)^2 + N(c_2 + \varepsilon\, d_1) + L = 0.$$

Pro neznámé N a L máme tedy dvě rovnice

$$\begin{aligned} c_1^2 + d_2^2 + c_2^2 + d_1^2 + c_2\, N + L &= 0 \\ -2c_1\, d_2 + 2c_2\, d_1 + d_1\, N &= 0. \end{aligned}$$

Z nich vychází podle (0.7) a (0.8)

$$L = -(a^2 + b^2) - 2\frac{c_1\, c_2\, d_2}{d_1} + 2c_2^2 = -(a^2 + b^2) + 2d_2^2 + 2c_2^2 = -a^2 + b^2.$$

Kružnice (4.1) protíná osu $y = 0$ v bodech s prvními souřadnicemi $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$, tj. v ohniscích.

Zcela analogicky se ukáže: Kružnice, která jde body D^ε a má střed na ose x (tj. hlavní ose elipsy), protíná osu y v bodech s druhými souřadnicemi $\pm i\sqrt{a^2 - b^2}$.

— — —

5. D. Rytz 1845; [29], str. 123–125

L. O Rytzově konstrukci a jejím Mossbruggerově důkazu jsem jednal už v úvodu. Citované místo z Mossbruggerovy knihy bylo přetištěno v [30] 1853.

Ch. Wiener psal o Rytzově a Frézierově konstrukci v těsném sousedství ve své učebnici [54] 1884 (str. 291–293), na jejich jen malou a zcela nepodstatnou odlišnost neupozornil. Viz úvod a odd. 2.

G. Delabar [8] 1871 a [9] 1871 zcela přehlédl Rytzovu konstrukci; viz úvod.

N. Fialkowski [11] před rokem 1876 (viz odd. 4) svou třetí konstrukcí rovněž opakuje Rytzův postup.

V. Jeřábek [17] 1895 (viz odd. 4) činí stejně.

B. Bydžovský [6] 1923, str. 162–163, dokázal Rytzovu konstrukci (nepojmenovává ji) vycházeje z parametrických rovnic elipsy a kombinuje jednoduché úvahy analytickou a syntetickou.

K. Šilháček a H. Sechovský [51] 1936 zařadili analytický důkaz Rytzovy konstrukce dokonce do středoškolské učebnice matematiky.

K. Viz obr. 5, též 2 a 0.1a, b, c. Kolem půlícího bodu Q_ε úsečky CD_ε se opíše kružnice procházející středem O. Tato kružnice protíná spojnici $CQ_\varepsilon D_\varepsilon$ v bodech U a V hledaných os. Jejich délky jsou $|CU|$ a $|CV|$.

Půlící bod Q_ε úsečky s krajními body C z (0.1) a D_ε z (0.14) je

$$Q_\varepsilon\left[\frac{c_1-\varepsilon\,d_2}{2},\frac{c_2+\varepsilon\,d_1}{2}\right]. \tag{5.1}$$

Vidíme, že je identický s bodem Q^ε z (2.1), kterým začínala Frézierova konstrukce v odd. 2 (srv. obr. 0.1a, b, c). Dále už Rytzova konstrukce úplně splývá s Frézierovou.

D. Protože bod Q_ε z (5.1) splývá s bodem Q^ε z (2.1), je – počínaje od bodu $Q_\varepsilon \equiv Q^\varepsilon$ – důkaz Rytzovy konstrukce týž jako důkaz konstrukce Frézierovy v odd. 2.

— — —

Čeští deskriptivní geometři měli hodně přes sto let, aby si povšimli Wienerovy poznámky o Frézierovi, a téměř sto let, aby si povšimli stejné Sobotkovy poznámky. Ač Rytzovu konstrukci neúnavně opakovali, dávno ji měli nazývat též Frézierovou.

A rovněž tak dávno měli Frézierovu – Rytzovu – Mossbruggerovu konstrukci (vždyť teprve L. Mossbrugger Frézierovu konstrukci, ač o ní nevěděl, po více než 100 letech dokázal) podrobit důkladné analýze její přesnosti. Je přece očividné, že jakmile sdružené průměry svírají úhel blízký pravému a jejich délky jsou blízké, Rytzova konstrukce je nepřesná v důsledku velké blízkosti bodů C a D_{+1} či O a Q_{-1}.

— — —

6. M. Meyer[20] 1849; [28]

L. M. Meyer píše, že dosavadní konstrukce jsou víceméně komplikované, a proto doporučuje svou konstrukci, která však není jednodušší; dokazuje ji pomocí trigonometrie. Z c, d, ω (v našem označení) vypočítává a, b; objevují se mu odmocniny, s kterými se ještě setkáme v první části dodatku 2.

[20] M. Meyer (1824–1856); profesor matematiky na průmyslové škole ve Freibergu a obchodní akademii v Lipsku.

K. Viz obr. 6. Budiž C' bod elipsy opačný k bodu C. Na spojnici $C'D_\varepsilon$ určeme body M, N tak, že $|D_\varepsilon M| = |D_\varepsilon N| = |D_\varepsilon C|$. Spojnice CM, CN jsou rovnoběžné s osami elipsy a středy úseček $C'M, C'N$ na nich leží. Délky poloos se určí z relací

$$a + \varepsilon\, b = |D_\varepsilon\, C'|, \quad a - \varepsilon\, b = |D_\varepsilon\, C|. \tag{6.1}$$

D. Druhou z relací (6.1) jsme nalezli už v (0.17). První s $C'[-c_1, -c_2]$ odvodíme zcela analogicky.

Přímka $D_\varepsilon C'$ s body D_ε z (0.14) a $C'[-c_1, -c_2]$ má rovnici

$$X = D_\varepsilon + \frac{\overrightarrow{D_\varepsilon C'}}{|D_\varepsilon C'|} t$$

s $|t|$ znamenající vzdálenost bodu X od bodu D_ε. V rozepsání do souřadnic bodů M a N, tj. s $t = \tau(a - \varepsilon\, b)$, $\tau = \pm 1$ podle (6.1), je tedy

$$x = -\varepsilon\, d_2 - \frac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{a + \varepsilon\, b}\tau(a - \varepsilon\, b) = \frac{(-\varepsilon + \varepsilon\,\tau)a\, d_2 - (1 + \tau)b\, d_2 - \tau(a - \varepsilon\, b)c_1}{a + \varepsilon\, b},$$

$$y = \varepsilon\, d_1 - \frac{c_2 + \varepsilon\, d_1}{a + \varepsilon\, b}\tau(a - \varepsilon\, b) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon\,\tau)a\, d_1 + (1 + \tau)b\, d_1 - \tau(a - \varepsilon\, b)c_2}{a + \varepsilon\, b}.$$

Při $\tau = 1$ je tedy vzhledem k (0.10)

$$y = \frac{2a\, c_2 - (a - \varepsilon\, b)c_2}{a + \varepsilon\, b} = c_2.$$

Spojnice CM je tudíž rovnoběžná s hlavní osou a na ní leží půlící bod úsečky $C'M$. Při $\tau = -1$ je tedy vzhledem k (0.10)

$$x = \frac{2\varepsilon\, b\, c_1 + (a - \varepsilon\, b)c_1}{a + \varepsilon\, b} = c_1.$$

Spojnice CN je tudíž rovnoběžná s vedlejší osou a na ní leží půlící bod úsečky $C'N$.

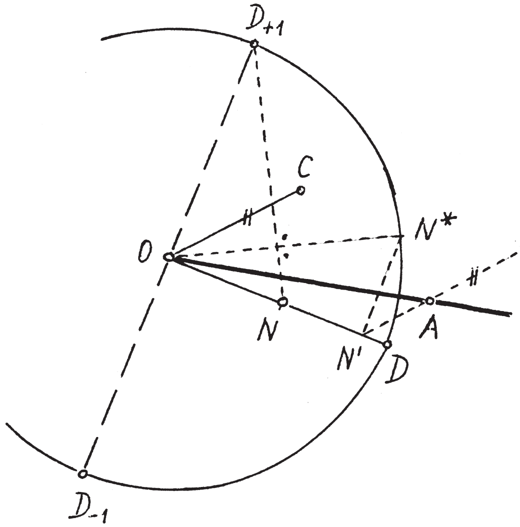
— — —

7. O. Broch[21] 1850; [4]

L. Brochův příspěvek je zcela bez literárních údajů.

K. Viz obr. 7. Sestrojme kružnici procházející body C a D_ε; její střed S je ovšem na spojnici OD. Jí protneme kružnici v bodech M, N. Přímky CM, CN

[21] O. Broch (1818–1889), profesor matematiky na univerzitě v Christianii (Oslo).



Obr. 7a

jsou rovnoběžné s osami elipsy. Viz obr. 7a s $\varepsilon = +1$. Kolem středu O opišme kružnici jdoucí body D, D_ε a protněme ji přímkou vycházející ze středu O kolmo na $D_{+1}\,N$ v bodě, který označíme N^*. Ten kolmo promítneme na spojnici $MN \equiv OD$ do bodu N'. Rovnoběžka tímto bodem N' s poloměrem OC vytíná na ose vrchol A. Kdybychom místo bodu N vzali bod M, dospěli bychom analogicky k vrcholu na druhé ose. Kdybychom polopřímku vycházející ze středu O vedli kolmo na $D_{-1}\,N$ (tj. vzali D_{-1} místo D_{+1}), konstrukce by byla symetrická k hořejší (s D_{+1}).

D. Kružnice jdoucí body C z (0.1) a D_ε z (0.14) má při (0.2) rovnici

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c^2 & c_1 & c_2 & 1 \\ d^2 & -d_2 & d_1 & 1 \\ d^2 & d_2 & -d_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou snadno přepíšeme na

$$x^2 + y^2 + d_1 \frac{d^2-c^2}{c_1\,d_1 + c_2\,d_2} x + d_2 \frac{d^2-c^2}{c_1\,d_1 + c_2\,d_2} y - d^2 = 0.$$

Pro první souřadnice průsečíků této kružnice s přímkou OD o rovnici [pro bod D viz (0.1)]

$$y = \frac{d_2}{d_1} x \tag{7.1}$$

platí tak kvadratická rovnice

$$x^2 + \frac{d_1(d^2-c^2)}{c_1\,d_1 + c_2\,d_2}\, x - d_1^2 = 0.$$

Pomocí (0.8) se snadno přesvědčíme, že má kořeny $c_2\, d_1/d_2,\ c_1$. [Srv. s řešením rovnice (10.2) při $x = d_1\, t$.] Hledané průsečíky tedy jsou

$$M\left[\frac{d_1}{d_2}c_2,\ c_2\right] \qquad \text{a} \qquad N\left[c_1,\ \frac{d_2}{d_1}c_1\right]. \tag{7.2}$$

Okamžitě vidíme, že jejich spojnice s bodem $C[c_1, c_2]$ jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, tj. s osami elipsy.

Viz obr. 7a s $\varepsilon = +1,\ \tau = -1$. Kružnice kolem středu O procházející body D_ε má rovnici

$$x^2 + y^2 = d^2. \tag{7.3}$$

Spojnice $D_\varepsilon\, N$ má podle (0.14) a (7.2) směrnici

$$\frac{c_1\, d_2 - \varepsilon\, d_1^2}{d_1(c_1 + \varepsilon\, d_2)};$$

kolmice ze středu O na tuto spojnici má tedy rovnici

$$y = -\frac{d_1(c_1 + \varepsilon\, d_2)}{c_1\, d_2 - \varepsilon\, d_1^2}x. \tag{7.4}$$

Po jednoduchém výpočtu využívajícím (0.2) a (0.7) nalezneme tyto průsečíky kolmice (7.4) s kružnicí (7.3):

$$N^*\left[\tau\frac{c_1\, d_2 - \varepsilon\, d_1^2}{a},\ -\tau\frac{d_1(c_1 + \varepsilon\, d_2)}{a}\right], \quad \tau = \pm 1.$$

Promítneme je kolmo na (prodloužený) poloměr OD o rovnici (7.1) do bodů

$$N'\left[-\varepsilon\,\tau\frac{d_1^2}{a},\ -\varepsilon\,\tau\frac{d_1\, d_2}{a}\right]. \tag{7.5}$$

Rovnoběžka s poloměrem OC s bodem C z (0.1) vedená bodem N' z (7.5) má tedy rovnici

$$y + \varepsilon\,\tau\frac{d_1\, d_2}{a} = \frac{c_2}{c_1}\left(x + \varepsilon\,\tau\frac{d_1^2}{a}\right).$$

Osu x (tj. osu elipsy) protíná v bodě s první souřadnicí

$$x = \varepsilon\,\tau\frac{c_1\, d_1\, d_2}{a\, c_2} - \varepsilon\,\tau\frac{d_1^2}{a} = -\varepsilon\,\tau\, a \qquad (\varepsilon = \pm 1, \tau = \pm 1),$$

tedy ve vrcholu (A na obr. 7a), jak snadno zjistíme pomocí (0.7) a (0.8). Zcela analogicky – vycházejíce od bodu M z (7.2) – bychom omezili druhou osu elipsy.

Brochovo určení délek os je nepřiměřeně složité. Jakmile známe osy elipsy, známe c_1, c_2, d_1, d_2 a podle (0.7) je a resp. b přepona v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $c_1,\ d_1$ resp. $c_2,\ d_2$ (viz obr. 0.2).

———

8. O. I. Somov[22] **1860**; [48], str. 122

L. Cituje tyto autory: M. Chasles [7], Note XXV; O. Broch [4]; Bergéry: *Géométrie des courbes*; tato kniha mi zůstala nepřístupná. Jejich konstrukce označuje za nejjednodušší, což jistě neplatí o Brochově postupu (viz odd. 7). Svou konstrukci nedokazuje.

K. Viz obr. 8. Sestrojí se body D_ε. Středem O se vede rovnoběžka p_ε se spojnicí $CD_{-\varepsilon}$. Osy úhlů přímek p_ε jsou osy elipsy. Označme P_ε průsečík přímek p_ε a CD_ε; je to půlící bod úsečky CD_ε. Pak

$$a = |CP_{-1}| + |CP_{+1}|, \quad b = |CP_{-1}| - |CP_{+1}|.$$

D. Poloha os a jejich délka jsou bezprostředním důsledkem vět $[0.CD_\varepsilon]$ a $[0.\overline{CD_\varepsilon}]$.

— — —

9. J. Steiner[23] **1867**; [49], díl I, str. 71, 77–78

L. O J. Steinerovi jsem psal už v odd. 4. Také I. díl [49] vyšel posmrtně se stejným podtitulkem jako II. díl s jediným rozdílem: . . . *bearbeitet von C. Geisler.* Rok uveřejnění 1867 může být tedy hodně vzdálený době, kdy J. Steiner o své konstrukci poprvé přednášel.

K. Viz obr. 9. Tečna elipsy v bodě C (tj. rovnoběžka s poloměrem OD jdoucí bodem C) je kružnicí procházející středem O a body D^ε protťata v bodech os. Délky poloos jsou zkonstruovány podle věty $[0.\overline{OD^\varepsilon}]$ z odd. 0.

D. Kružnice jdoucí počátkem a body D^ε z (0.18) má rovnici

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y \\ (c_1 - d_2)^2 + (c_2 + d_1)^2 & c_1 - d_2 & c_2 + d_1 \\ (c_1 + d_2)^2 + (c_2 - d_1)^2 & c_1 + d_2 & c_2 - d_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Protože podle (0.10), (0.1) s (0.2) a podle (0.3) je

$$c_1 - \varepsilon\, d_2 = (a + \varepsilon\, b)\frac{c_1}{a}, \qquad c_2 + \varepsilon\, d_1 = \varepsilon(a + \varepsilon\, b)\frac{c_2}{b},$$

$$(c_1 - \varepsilon\, d_2)^2 + (c_2 + \varepsilon\, d_1)^2 = (a + \varepsilon\, b)^2,$$

tak rovnici kružnice přepíšeme na

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y \\ a + b & \dfrac{c_1}{a} & \dfrac{c_2}{b} \\ a - b & \dfrac{c_1}{a} & -\dfrac{c_2}{b} \end{vmatrix} = 0. \tag{9.1}$$

[22] O. I. Somov (1815–1876), profesor na univerzitách v Moskvě a v Petrohradu. Pracoval v matematické fyzice a v mechanice.

[23] J. Steiner (1796–1863), od roku 1825 vyučoval na berlínské průmyslové akademii, od roku 1835 byl profesorem berlínské univerzity. Významný geometr, velmi dával přednost syntetickým metodám před analytickými.

Tečna elipsy v bodě C z (0.1) má rovnici

$$\frac{c_1\,x}{a^2} + \frac{c_2\,y}{b^2} = 1, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a^2}{c_1} + (\cdot)y.$$

Pro druhé souřadnice průsečíku této tečny s kružnicí (9.1) platí tedy rovnice

$$(\cdot)y^2 + (\cdot)y + \begin{vmatrix} \left(\frac{a^2}{c_1}\right)^2 & \frac{a^2}{c_1} & 0 \\ a+b & \frac{c_1}{a} & \frac{c_2}{b} \\ a-b & \frac{c_1}{a} & -\frac{c_2}{b} \end{vmatrix} = 0.$$

Její absolutní člen (napsaný ve tvaru determinantu) vymizí a rovnice má tudíž kořen $y = 0$. Naše kružnice a tečna se tak protínají v bodě $U[\dots, 0]$ ležícím na ose x. Zcela analogicky bychom dokázali, že se také protínají v bodě V ležícím na ose y.

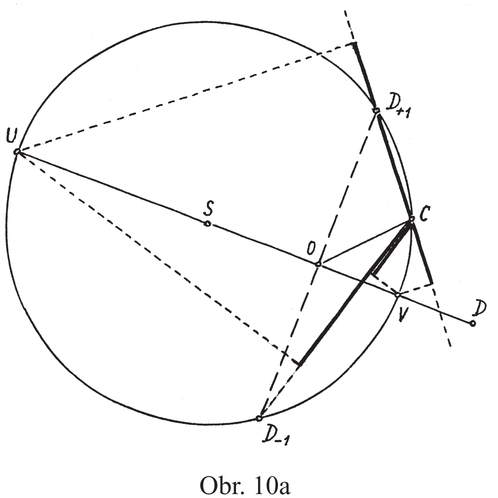
Délky poloos jsou určeny podle věty $[0.\overline{OD^{\varepsilon}}]$ z odd. 0.

— — —

10. A. Mannheim[24] 1880; [25], str. 121–122

L. Měl jsem jen 2. vydání Mannheimovy učebnice z roku 1886. Na str. 121–122 je citována jediná práce [Messenger of Mathematics 11 (1881)]; zůstala mi však nepřístupná.

K. Osy jsou sestrojeny podle věty $[0.CD_{\varepsilon}]$, tedy stejně jako v Rytzově konstrukci; viz odd. 0 a 5. Délky os sestrojuje A. Mannheim dosti komplikovaně – viz obr. 10a. Kružnice (o středu S) určená body C a D_{ε} protíná spojnici OD v bodech, které označíme U a V; kolmice z nich na spojnice CD_{ε} mají od bodu C vzdálenosti rovné poloosám a, b.



Obr. 10a

[24] Nejstručnější biografické údaje jsem uvedl už v odd. 2.

D. Dokázat je třeba jen konstrukci délek poloos. Kružnice procházející body C z (0.1) a D_ε z (0.14) má při označení z (0.2) rovnici

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c^2 & c_1 & c_2 & 1 \\ d^2 & -d_2 & d_1 & 1 \\ d^2 & d_2 & -d_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Spojnice OD má parametrické vyjádření

$$x = d_1\, t, \quad y = d_2\, t \tag{10.1}$$

a hořejší kružnici protíná v bodech U a V s parametry určenými rovnicí

$$\begin{vmatrix} d^2\, t^2 & d_1\, t & d_2\, t & 1 \\ c^2 & c_1 & c_2 & 1 \\ d^2 & -d_2 & d_1 & 1 \\ d^2 & d_2 & -d_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odečteme-li třeba poslední řádek od předcházejících, determinant snadno vypočítáme:

$$(c_1\, d_1 + c_2\, d_2)t^2 - (c^2 - d^2)t - (c_1\, d_1 + c_2\, d_2) = 0. \tag{10.2}$$

Vzhledem k (0.2) je diskriminant této kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}(c_1^2 + c_2^2 - d_1^2 - d_2^2)^2 + 4(c_1\, d_1 + c_2\, d_2)^2 &= \\ &= (c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2)^2 - 4(c_1\, d_2 - c_2\, d_1)^2\ ;\end{aligned}$$

pomocí Apolloniových vzorců (0.11) a (0.12) jej dále upravíme na

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2\, b^2 = (a^2 - b^2)^2.$$

Pro řešení rovnice (10.2) tak platí

$$2(c_1\, d_1 + c_2\, d_2)t_{1,2} = c^2 - d^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2} = c^2 - d^2 \pm (a^2 - b^2);$$

pomocí Apolloniova vzorce (0.11) tak závěrem zjišťujeme

$$(c_1\, d_1 + c_2\, d_2)t_{1,2} = \begin{cases} a^2 - d^2, \\ b^2 - d^2. \end{cases} \tag{10.3}$$

Spojnice CD_ε je

$$(c_2 - \varepsilon\, d_1)x - (c_1 + \varepsilon\, d_2)y + \varepsilon(c_1\, d_1 + c_2\, d_2) = 0;$$

kolmice na ni z bodu U, který leží na přímce (10.1) a má parametr t_1 z (10.3), pak má rovnici

$$(c_1 + \varepsilon\, d_2)x + (c_2 - \varepsilon\, d_1)y - (c_1\, d_1 + c_2\, d_2)t_1 = 0.$$

Vzdálenost této kolmice od bodu $C[c_1, c_2]$ je

$$\frac{|(c_1 + \varepsilon\, d_2)c_1 + (c_2 - \varepsilon\, d_1)c_2 - (a^2 - d^2)|}{\sqrt{(c_1 + \varepsilon\, d_2)^2 + (c_2 - \varepsilon\, d_1)^2}} =$$

$$= \frac{|c_1^2 + c_2^2 + \varepsilon(c_1\, d_2 - c_2\, d_1) - (a^2 - d^2)|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2 + 2\varepsilon(c_1\, d_2 - c_2\, d_1)}} =$$

$$= \frac{|c^2 - \varepsilon\, a\, b - a^2 + d^2|}{\sqrt{c^2 + d^2 - 2\varepsilon\, a\, b}} = \frac{|b^2 - \varepsilon\, a\, b|}{\sqrt{(b - \varepsilon\, a)^2}} = b;$$

v závěru jsme opět využili (0.2) a Apolloniovy vzorce (0.11) a (0.12). S bodem V o parametru t_2 z (10.3) bychom analogickým způsobem dospěli k délce a hlavní poloosy.

— — —

11. C. Rodenberg[25] 1883; [43]

L. Práce byla přetištěna v [44] 1884. Její autor cituje D. Rytze, L. Mossbruggera [29] (viz též úvod), N. Fialkowskiho [11] (bez vročení), L. Burmestera [5], str. 16 (viz úvod). K důkazu používá kinematickou geometrii.

K. Viz obr. 11 při $\varepsilon = +1$. Označme C^* patu kolmice spuštěné z bodu C na polopřímku OD (předpokládám, že úhel $\omega = \angle COD$ je ostrý; viz začátek odd. 0). Na ní pak vytkněme bod E^ε tak, že $|OE^\varepsilon| = |C^* D^\varepsilon|$. Kružnice o středu Σ^ε, která jde bodem O a bodem E^ε a ve středu se dotýká spojnice OD^ε, protíná přímku $D\Sigma^\varepsilon$ v bodech U a V os elipsy. Délky jejích poloos jsou $|DU|$, $|DV|$.

D. Můžeme předpokládat $c \le d$. Pro bod D^ε je podle jeho definice v odd. 0 (úhel ω je ostrý)

$$|C^* D^\varepsilon| = d + \varepsilon\, c\, \sin\omega > 0. \tag{11.1}$$

Bod E^ε na polopřímce OD, k níž je souhlasně rovnoběžný jednotkový vektor $(d_1/d, d_2/d)$, má tak souřadnice

$$E^\varepsilon \left[\frac{d_1}{d}(d + \varepsilon\, c\, \sin\omega),\ \frac{d_2}{d}(d + \varepsilon\, c\, \sin\omega)\right]. \tag{11.2}$$

Přímka OD^ε má podle (0.18) rovnici

$$-(c_2 + \varepsilon\, d_1)x + (c_1 - \varepsilon\, d_2)y = 0;$$

kružnice jdoucí počátkem a mající v něm za tečnu tuto přímku, je

$$x^2 + y^2 + \varrho[-(c_2 + \varepsilon\, d_1)x + (c_1 - \varepsilon\, d_2)y] = 0; \quad \varrho \ne 0. \tag{11.3}$$

Má-li tato kružnice – se zatím neurčeným parametrem ϱ – procházet bodem E^ε z (11.2), tak nutně souřadnice bodu E^ε musí vyhovovat rovnici (11.3). Po krácení výrazem (11.1) a zcela elementárních úpravách dostaneme

$$\frac{d_1^2 + d_2^2}{d^2}\Big(d + \varepsilon\, c\, \sin\omega\Big) + \varrho\left[\frac{c_1\, d_2 - c_2\, d_1}{d} - \varepsilon\frac{d_1^2 + d_2^2}{d}\right] = 0.$$

[25] C. Rodenberg (1851–1933); profesor deskriptivní geometrie na technice v Hannoveru.

Vzhledem k (0.2), (0.12) s (0.13) a nerovnosti v (11.1) tak

$$\varrho = \varepsilon. \tag{11.4}$$

Střed Σ^ε kružnice (11.3) s (11.4) je pak

$$\Sigma^\varepsilon \ \left[\varepsilon\frac{c_2+\varepsilon\, d_1}{2}, -\varepsilon\frac{c_1-\varepsilon\, d_2}{2}\right].$$

Jeho spojnice s bodem D z (0.1) má rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \varepsilon\frac{c_2+\varepsilon\, d_1}{2} & -\varepsilon\frac{c_1-\varepsilon\, d_2}{2} & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{čili} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c_2 & -c_1 & \varepsilon \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

které v důsledku (0.8) můžeme dát tento tvar [srv. s (2.3)]

$$(c_1+\varepsilon\, d_2)x + (c_2-\varepsilon\, d_1)y + \left\{ \begin{array}{rcl} -\varepsilon(c_1+\varepsilon\, d_2)(c_2+\varepsilon\, d_1) & = & 0, \\ \varepsilon(c_1-\varepsilon\, d_2)(c_2-\varepsilon\, d_1) & = & 0. \end{array} \right. \tag{11.5}$$

Z něj ihned vidíme, že kružnice (11.3) s (11.4) a přímka (11.5) se protínají v bodech

$$U[\varepsilon(c_2+\varepsilon\, d_1),\ 0] \qquad \text{a} \qquad V[0,\ -\varepsilon(c_1-\varepsilon\, d_2)] \tag{11.6}$$

ležících na osách. Připomeneme-li si (2.3), snadno nahlédneme, že dvojice „Frézierových“ bodů U, V z odd. 2 a právě uvedené dvojice „Rodenbergových“ bodů U, V přecházejí v sebe otočením kolem středu – počátku O – o pravý úhel. Čtverce vzdáleností bodu D z (0.1) od bodů (11.6) jsou vzhledem k (0.7)

$$\begin{aligned} |DU|^2 &= [d_1-\varepsilon(c_2+\varepsilon\, d_1)]^2 + d_2^2 = c_2^2 + d_2^2 = b^2, \\ |DV|^2 &= d_1^2 + [d_2+\varepsilon(c_1-\varepsilon\, d_2)]^2 = c_1^2 + d_1^2 = a^2. \end{aligned}$$

— — —

12. F. Graefe[26] 1901; [13], str. 352–353

L. Konstrukce je zcela bez citací. Je odvozena z úvah o geometrické mechanice pomocí trigonometrie a elementární geometrie včetně využití prvních začátků analytické geometrie.

K. Viz obr. 12. Kolem středu se opíše kružnice k o poloměru $\sqrt{c^2+d^2}$. V bodě C se sestrojí tečna t_c elipsy (je rovnoběžná s poloměrem OD). Označíme Ω střed kružnice κ, která jde středem O a s kružnicí k má chordálu v tečně t_c. Spojnice ΩC protíná kružnici κ v bodech U a V os. Označme τ_c vzdálenost středu O od tečny t_c v bodě C. Délky poloos jsou $\sqrt{\tau_c \cdot |CU|}$ a $\sqrt{\tau_c \cdot |CV|}$.

D. Rovnice kružnice k je podle prvního Apolloniova vzorce (0.11)

$$x^2 + y^2 - (a^2+b^2) = 0$$

[26] F. Graefe (1855–1918); profesor matematiky na technice v Darmstadtu.

a rovnice tečny t_c je

$$\frac{c_1}{a^2}x + \frac{c_2}{b^2}y - 1 = 0. \tag{12.1}$$

Z nich napíšeme rovnici kružnice κ:

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\left(\frac{c_1}{a^2}x + \frac{c_2}{b^2}y\right) = 0. \tag{12.2}$$

Její střed je

$$\Omega\left[(a^2 + b^2)\frac{c_1}{2a^2}, (a^2 + b^2)\frac{c_2}{2b^2}\right].$$

Jeho spojnice s bodem C má rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ \left(a^2 + b^2\right)\dfrac{c_1}{2a^2} & \left(a^2 + b^2\right)\dfrac{c_2}{2b^2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou snadno přepíšeme na

$$c_2\, a^2\, x + c_1\, b^2\, y - c_1\, c_2(a^2 + b^2) = 0.$$

Ihned vidíme, že tato spojnice ΩC protíná kružnici κ z (12.2) v bodech

$$U\ \left[\frac{a^2 + b^2}{a^2}c_1,\ 0\right] \quad \text{a} \quad V\ \left[0,\ \frac{a^2 + b^2}{b^2}c_2\right], \tag{12.3}$$

které leží na osách.

Vzdálenost středu S od tečny t_c v (12.1) je

$$\tau_c = 1/\sqrt{\tfrac{c_1^2}{a^4} + \tfrac{c_2^2}{b^4}}$$

a vzdálenosti bodů U a V od bodu $C[c_1, c_2]$ jsou

$$\begin{aligned} |CU| &= \sqrt{\left(\tfrac{a^2+b^2}{a^2}c_1 - c_1\right)^2 + c_2^2} = b^2\sqrt{\tfrac{c_1^2}{a^4} + \tfrac{c_2^2}{b^4}}, \\ |CV| &= a^2\sqrt{\tfrac{c_1^2}{a^4} + \tfrac{c_2^2}{b^4}}. \end{aligned}$$

Tudíž vskutku

$$\sqrt{\tau_c \cdot |CU|} = b, \quad \sqrt{\tau_c \cdot |CV|} = a.$$

— — —

13. A. Mannheim 1904; [27]

L. Článek je bez jakékoliv citace, ačkoliv autor opakuje i jeden výsledek ze své knihy [25], str. 121–122 (viz odd. 10).

K. Viz obr. 13 s $\varepsilon = +1$. Známým způsobem se určí body D_ε. Střed úsečky CD_ε jsme označili Q_ε. Kolem něj opíšeme kružnici jdoucí bodem C. Její průsečíky M a N se spojnicí OQ_ε, spojeny s bodem C, dají směry os. Postup je blízký Rytzově konstrukci. Délky poloos jsou $|OM|$ a $|ON|$.

D. S bodem Q_ε jsme se setkali už v odd. 5 (Rytzova konstrukce); jeho souřadnice jsou v (5.1). Kružnice opsaná kolem bodu Q_ε a procházející bodem $C[c_1, c_2]$ má rovnici

$$\begin{aligned}\left[x - \tfrac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{2}\right]^2 + \left[y - \tfrac{c_2 + \varepsilon\, d_1}{2}\right]^2 &= \\ = \left[c_1 - \tfrac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{2}\right]^2 &+ \left[c_2 - \tfrac{c_2 + \varepsilon\, d_1}{2}\right]^2 .\end{aligned} \tag{13.1}$$

Spojnice OQ_ε je

$$(c_2 + \varepsilon\, d_1)x - (c_1 - \varepsilon\, d_2)y = 0. \tag{13.2}$$

Snadno se přesvědčíme, že společné body jsou

$$M[-\varepsilon\, d_2,\ c_2] \quad \text{a} \quad N[c_1,\ \varepsilon\, d_1]. \tag{13.3}$$

Vskutku, pro bod M výsledek dosazení $x = -\varepsilon\, d_2$ do první hranaté závorky nalevo v (13.1) je

$$-\varepsilon\, d_2 - \frac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{2} = -\left[c_1 - \frac{c_1 - \varepsilon\, d_2}{2}\right];$$

ihned vidíme, že bod M leží na kružnici (13.1). Výsledek dosazení souřadnic bodu M do levé strany v (13.2) dává

$$(c_2 + \varepsilon\, d_1)(-\varepsilon\, d_2) - (c_1 - \varepsilon\, d_2)c_2 = -c_1\, c_2 - d_1\, d_2 = 0$$

podle (0.8), tedy bod M leží i na spojnici (13.2). Zcela analogicky s bodem N.

Protože body C a M (resp. C a N) mají druhé (resp. první) souřadnice stejné, je spojnice CM (resp. CN) rovnoběžná s osou x (resp. s osou y), tj. s osou elipsy.

Pro velikosti poloos dostáváme podle (13.3) a (0.7)

$$|OM| = \sqrt{d_2^2 + c_2^2} = b, \quad |ON| = \sqrt{c_1^2 + d_1^2} = a.$$

— — —

Další dva krátké oddíly patří skriptu a knize, v nichž autoři shrnuli několik konstrukcí os elipsy z jejích sdružených průměrů.

— — —

14. K. Pelz[27] 1904; [42], str. 33–34

L. Výtah z rozmnožených, rukou psaných přednášek K. Pelze mi opatřil V. Šobr (Západočeská univerzita v Plzni); vyslovuji mu za to poděkování.

Bez jakýchkoliv literárních údajů odvozuje K. Pelz konstrukci Rytzovu; konstrukci Frézierovu samostatně při použití bodu D^{+1} a bodu D^{-1}; konečně ohniskovou konstrukci Chaslesovu.

— — —

15. J. Sobotka 1906; [*]

L. V odd. 172 na str. 239–242 shrnuje J. Sobotka pět konstrukcí os elipsy z jejích sdružených poloměrů. První konstrukce je Rytzova; J. Sobotka to výslovně uvádí v poznámce k odd. 172 na str. 632. Druhá konstrukce je Frézierova; J. Sobotka to rovněž výslovně uvádí v citované poznámce. Třetí konstrukce – jak sám naznačuje – se jen velmi nepodstatně liší od druhé konstrukce. Čtvrtá konstrukce je malou modifikací Chaslesovy konstrukce. Pátá konstrukce je ohnisková Chaslesova, viz odd. 4. Při obou posledních konstrukcích J. Sobotka jejich autora nejmenuje.

V odd. 203 na str. 283 má J. Sobotka ještě jednu konstrukci. Je to Brochova konstrukce bez Brochova jména.

Dodatek 1. Chaslesova věta

Při konstrukci os elipsoidu z jeho tří sdružených průměrů probral M. Chasles ([7], Note XXV, str. 359–368; něm. překlad str. 382–394) nejdříve analogický rovinný případ. Ústřední roli má v něm tato věta ([7], str. 361; něm. překlad str. 384):

Nechť k je středová kuželosečka s těmito vlastnostmi (viz obr. D1.1a, b):

a) Má vedlejší osu v tečně elipsy $\mathcal{E}$ v jejím bodě C (tj. v rovnoběžce ke sdruženému poloměru OD) *a hlavní osu v normále elipsy $\mathcal{E}$ v jejím bodě C*; ten nechť nesplývá s žádným vrcholem elipsy $\mathcal{E}$.

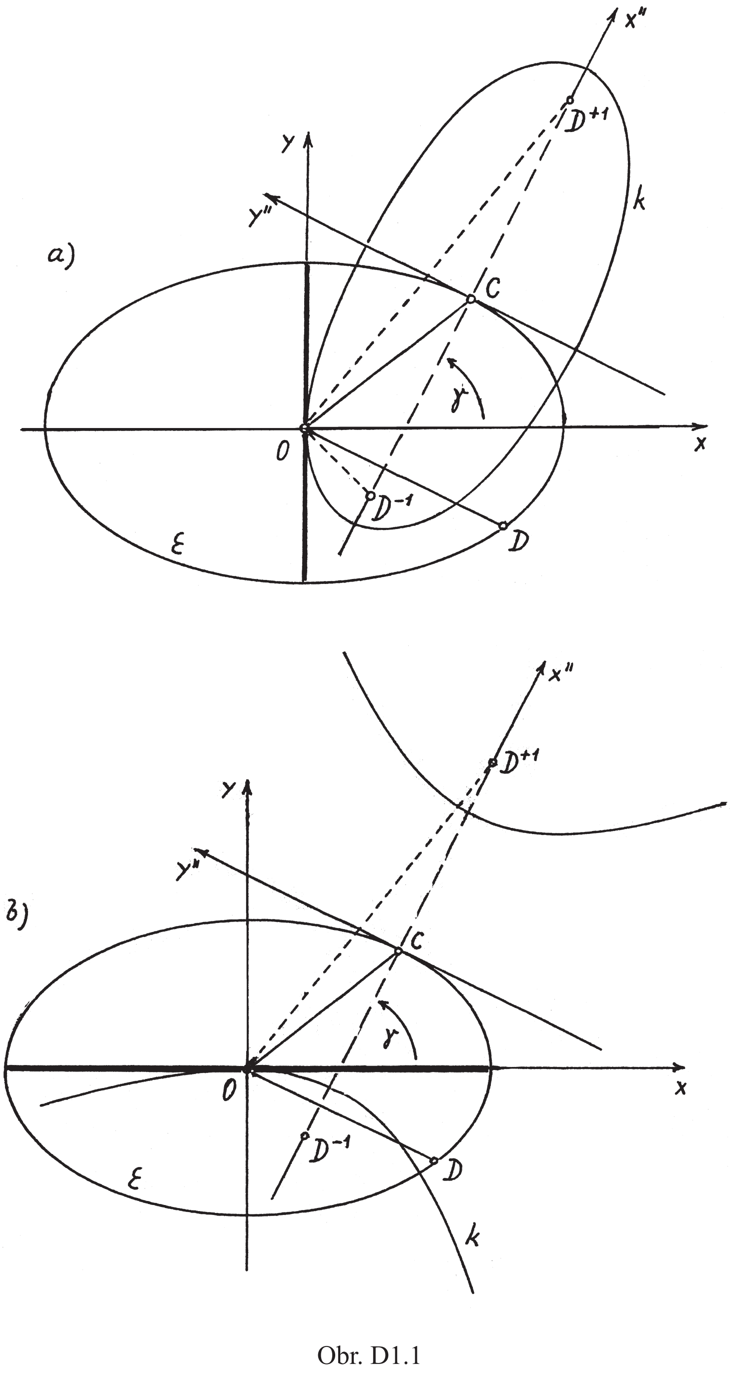
b) Má délkovou excentricitu rovnu $d = |OD|$ (tj. ohniska kuželosečky k jsou naše body D^{ε}).

c) Jde středem O elipsy $\mathcal{E}$ (tj. úsečky OD^{ε} jsou v ní průvodiče bodu O).

Pak kuželosečka k se v bodě O dotýká jedné z os elipsy $\mathcal{E}$ – a to vedlejší osy y, je-li k elipsa; hlavní osy x, je-li k hyperbola (tj. osy elipsy $\mathcal{E}$ jakožto tečna a normála kuželosečky k v jejím bodě O půlí úhly průvodičů OD^{ε}; při k elipse je $|OD^{-1}| + |OD^{+1}|$ délka hlavní osy elipsy $\mathcal{E}$ a při k hyperbole je $\big||OD^{-1}| - |OD^{+1}|\big|$ délka vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}$).

---

[27] Pro základní biografické údaje viz úvod. V některých českých textech (třeba [20], odd. 18.1 *Nejdůležitější česká literatura deskriptivní geometrie*) je psáno „Pelc“, ale na [42] je „Pelz“. J. Sobotka [*] (např. opakovaně na str. 632) psal „Pelz“. Stejně v [18] i jinde.



Obr. D1.1

V Chaslesově větě jsou tedy obsaženy naše dřívější bezprostřední poznatky [0.OD^ε] a [0.$\overline{OD^\varepsilon}$] z odd. 0 o osách elipsy $\mathcal{E}$.

V analytickém důkazu budu zase předpokládat $a > b$ a pro elipsu $\mathcal{E}$ využiji její opěrné funkce vůči jejímu středu. Je-li $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ úhel, který svírá pozitivní část osy x s vně orientovanou normálou elipsy, je její parametrické vyjádření

$$x = \frac{a^2 \cos\varphi}{h(\varphi)}, \qquad y = \frac{b^2 \sin\varphi}{h(\varphi)},$$

kde

$$h(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}$$

je zmíněná opěrná funkce (vzdálenost počátku od tečny elipsy). Hodnotu parametru φ pro bod $C[c_1, c_2]$ označíme $\gamma \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$; tedy

$$c_1 = \frac{a^2 \cos\gamma}{h}, \quad c_2 = \frac{b^2 \sin\gamma}{h}, \tag{D1.1}$$

$$h = \sqrt{a^2 \cos^2\gamma + b^2 \sin^2\gamma}, \qquad a > h > b.$$

Podle (0.10) a (0.2) pak

$$d_1 = \frac{ab \sin\gamma}{h}, \quad d_2 = -\frac{ab \cos\gamma}{h}, \quad d = \frac{ab}{h}. \tag{D1.2}$$

Zaveďme novou souřadnicovou soustavu (x', y'), která vznikne ze soustavy (x, y) posunutím do bodu $C[c_1, c_2]$:

$$x' = x - c_1, \qquad\qquad y' = y - c_2. \tag{D1.3}$$

Soustavu (x', y') otočíme – v kladném smyslu – o úhel γ (parametr bodu C); dostaneme tak další novou soustavu (x'', y''), jejíž osa x'' je v normále a osa y'' v tečně elipsy ε v bodě C. Příslušné transformační rovnice jsou

$$x'' = x' \cos\gamma + y' \sin\gamma, \qquad\qquad y'' = -x' \sin\gamma + y' \cos\gamma. \tag{D1.4}$$

Přechod od soustavy (x'', y'') k původní soustavě (x, y) je tedy vyjádřen rovnicemi, které dostaneme, když z ($D1.3$) dosadíme do ($D1.4$); s využitím ($D1.1$) najdeme, že

$$x'' = x \cos\gamma + y \sin\gamma - h, \quad y'' = -x \sin\gamma + y \cos\gamma + \frac{a^2 - b^2}{h} \cos\gamma \sin\gamma. \tag{D1.5}$$

V soustavě (x'', y'') má středová kuželosečka k vyhovující podmínce a) rovnici

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = 1 \qquad (A^2 > 0,\ B^2 \neq 0,\ A^2 - B^2 > 0) \tag{D1.6}$$

(připouštím i $B^2 < 0$, což znamená hyperbolu). Získáme její vyjádření v původní nečárkované soustavě (x, y), když do ($D1.6$) dosadíme z ($D1.5$) za x'', y'':

$$\frac{1}{A^2}\left[x \cos\gamma + y \sin\gamma - h\right]^2 + \frac{1}{B^2}\left[-x \sin\gamma + y \cos\gamma + \tfrac{a^2-b^2}{h} \cos\gamma \sin\gamma\right]^2 = 1.$$

V částečném rozepsání (koeficienty při kvadratických členech nás nebudou zajímat)

$$
\begin{aligned}
(\cdot)x^2 + (\cdot)xy + (\cdot)y^2 + \\
+2x\left[-\frac{1}{A^2}h - \frac{1}{B^2}\frac{a^2-b^2}{h}\sin^2\gamma\right]\cos\gamma + \\
+ 2y\left[-\frac{1}{A^2}h + \frac{1}{B^2}\frac{a^2-b^2}{h}\cos^2\gamma\right]\sin\gamma + \\
+ \frac{1}{A^2}h^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{a^2-b^2}{h}\cos\gamma\sin\gamma\right)^2 - 1 = 0.
\end{aligned}
\tag{D1.7}
$$

Excentricita této kuželosečky k s rovnicí ($D1.6$) v soustavě (x'', y'') je $A^2 - B^2$. Podmínka b) se tedy vzhledem k ($D1.2$) vyjádří požadavkem

$$A^2 \quad - B^2 \qquad = \frac{a^2b^2}{h^2} \tag{D1.8}$$

a podmínka c) pak vymizením absolutního členu v ($D1.7$):

$$\frac{1}{A^2}h^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{a^2-b^2}{h}\cos\gamma\sin\gamma\right)^2 = 1.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic B^2, dostaneme po elementární úpravě

$$A^4 - \left[h^2 + \frac{a^2b^2}{h^2} + \left(\frac{a^2-b^2}{h}\cos\gamma\sin\gamma\right)^2\right]A^2 + a^2b^2 = 0. \tag{D1.9}$$

Koeficient v hranaté závorce je při h z ($D1.1$)

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h^2}\left[(a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma)^2 + a^2b^2 + (a^2-b^2)^2\cos^2\gamma\sin^2\gamma\right] = \\
&= \tfrac{1}{h^2}\left[a^4\cos^2\gamma + b^4\sin^2\gamma + a^2b^2\right] = \\
&= \tfrac{1}{h^2}(a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma)(a^2+b^2) = a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

Místo ($D1.1$) máme tak rovnici

$$A^4 - (a^2+b^2)A^2 + a^2b^2 = 0.$$

Tudíž vzhledem k ($D1.8$) a v důsledku nerovnosti v ($D1.1$)

$$A^2 = \left\{\begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array}\right., \quad B^2 = \left\{\begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array}\right. \quad - \frac{a^2b^2}{h^2} = \left\{\begin{array}{l} a^2\left(1 - \frac{b^2}{h^2}\right) > 0, \\ b^2\left(1 - \frac{a^2}{h^2}\right) < 0. \end{array}\right. \tag{D1.10}$$

Při horních (dolních) hodnotách A^2 a B^2 je kuželosečka k elipsa (hyperbola).

Snadno se přesvědčíme, že pro horní (dolní) A^2 a B^2 z ($D1.10$) vymizí v ($D1.7$) koeficient při proměnné y (proměnné x); to znamená, že kuželosečka k – je-li elipsa – se dotýká ve středu O elipsy $\mathcal{E}$ (tj. v počátku) její vedlejší osy (tj. osy y); je-li hyperbola, dotýká se ve středu elipsy $\mathcal{E}$ její hlavní osy (tj. osy x). Vskutku, při horních hodnotách A^2 a B^2 v ($D1.10$) je v ($D1.7$) koeficient v hranaté závorce při y

$$-\frac{1}{a^2}h + \frac{1}{a^2 - a^2b^2/h^2}\frac{a^2-b^2}{h}\cos^2\gamma = \frac{h}{a^2}\left\{-1 + \frac{a^2-b^2}{h^2-b^2}\cos^2\gamma\right\} =$$
$$= \frac{h}{a^2(h^2-b^2)}\left\{-(a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma) + b^2 + (a^2-b^2)\cos^2\gamma\right\} = 0;$$

v závěru jsme ovšem využili třetí rovnici v ($D1.1$). – Postupovali bychom úplně analogicky při dolních hodnotách A^2 a B^2 v ($D1.10$) s koeficientem v hranaté závorce při x v ($D1.7$).

Dodatek 2. Výhled do trojrozměrného prostoru

Apolloniovy vzorce (0.11) a (0.13) můžeme zapsat ve tvaru

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \qquad a^2b^2 = c^2d^2\sin^2\omega. \tag{D2.1}$$

Čtverce poloos a, b jsou tedy při daných sdružených poloměrech c, d a daném jejich úhlu ω kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - (c^2+d^2)z + c^2d^2\sin^2\omega = 0. \tag{D2.2}$$

Tudíž

$$a^2, b^2 = \frac{1}{2}\left[c^2 + d^2 \pm \sqrt{(c^2+d^2)^2 - 4c^2d^2\sin^2\omega}\right]; \tag{D2.3}$$

výraz pod odmocninou lze přepsat na $(c^2-d^2)^2 + 4c^2d^2\cos^2\omega$, a je tedy vždy kladný.

Využijeme identity s $p \geq 2q \geq 0$

$$\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{p+2q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p-2q}.$$

Můžeme položit $p = c^2 + d^2$, $q = cd\sin\omega$, neboť $q \geq 0$ a

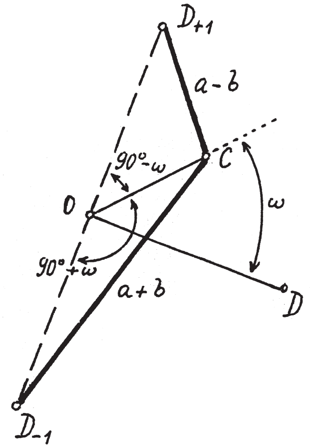
$$p - 2q = c^2 + d^2 - 2cd\sin\omega = (c-d)^2 + 2cd(1-\sin\omega) \geq 0.$$

Z ($D2.3$) tak pro a, b dostaneme

$$a, b = \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2+2cd\sin\omega} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2-2cd\sin\omega} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2-2cd\cos(90^\circ+\omega)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2-2cd\cos(90^\circ-\omega)},$$

takže

$$a + \varepsilon b = \sqrt{c^2+d^2-2cd\cos(90^\circ+\varepsilon\omega)} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{D2.4}$$



Obr. D2.1

Napravo je podle kosinové věty strana trojúhelníka, jehož dvě strany jsou c, d a úhel jimi sevřený je $90° + \varepsilon\omega$. Z obr. D2.1 s $|OC| = c$, $|OD| = d$ pak ihned vyčteme

$$a + \varepsilon b = |CD_{-\varepsilon}|$$

v úplné shodě s větou $[0.\overline{CD_\varepsilon}]$ z odd. 0.

— — —

Lze hořejší jednoduché postupy přenést do prostoru?

Mysleme si trojosý elipsoid s poloosami OA_i o délkách a_i; $i = 1, 2, 3$. V něm zvolme tři sdružené poloměry OB_i o délkách b_i; položme $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \angle B_i O B_j$ pro $j = 1, 2, 3$ a $j \neq i$.

Jako prostorový protějšek k ($D2.1$) platí tyto Apolloniovy rovnice pro trojosý elipsoid:

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \\
a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2 &= b_1^2 b_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta_{12} \\ \cos\beta_{21} & 1 \end{vmatrix} + \text{cycl.}, \\
a_1^2 a_2^2 a_3^2 &= b_1^2 b_2^2 b_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta_{12} & \cos\beta_{13} \\ \cos\beta_{21} & 1 & \cos\beta_{23} \\ \cos\beta_{31} & \cos\beta_{32} & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{D2.5}$$

Součty napravo označím $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3$; jejich geometrický význam je známý.

Při daných b_i a β_{ij} jsou a_i^2 vzhledem k ($D2.5$) kořeny kubické rovnice

$$z^3 - \mathsf{B}_1 z^2 + \mathsf{B}_2 z - \mathsf{B}_3 = 0, \tag{D2.6}$$

která je prostorovou analogií k rovnici ($D2.2$). Protože rovnice ($D2.6$) má 3 reálné kořeny a_i^2, v jejich vyjádření Cardanovým vzorcem se vyskytnou komplexní čísla.

Lze toto vyjádření upravit tak, aby mohlo posloužit ke konstrukci (ovšem už nikoliv kvadratické) délek poloos elipsoidu podobně jako ($D2.4$) posloužilo ke konstrukci délek os elipsy?

S rovnicí ($D2.6$) zodpovíme tuto otázku: Jak se z daných délek b_i a daných úhlů β_{ij} tří sdružených poloměrů pozná, zda je jimi určen r o t a č n í elipsoid? Známý diskriminant kubické rovnice je v případě ($D2.6$)

$$\mathsf{B_1}^2\mathsf{B_2}^2 - 4\mathsf{B_1}^3\mathsf{B_3} + 18\mathsf{B_1}\mathsf{B_2}\mathsf{B_3} - 4\mathsf{B_2}^3 - 27\mathsf{B_3}^2.$$

Víme, že vymizí právě jen tehdy, když kubická rovnice ($D2.6$) má (alespoň) dvojnásobný kořen, tj. když (alespoň) dva ze čtverců poloos a_i^2 jsou stejné – jinými slovy: když elipsoid je rotační.

— — —

Připojme k elipsoidu soustavu pravoúhlých souřadnic x_i tak, že osa x_i je v jeho poloose a_i. Souřadnice bodu B_i v této soustavě označíme b_{ij}.

Úplně stejně jako v odd. 0 najdeme tyto analogie k (0.3), (0.4), (0.7) a (0.8):

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{b_{ik}}{a_k}\right)^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{3}\frac{b_{ik}b_{jk}}{a_k^2} = 0, \tag{D2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_{ki}^2 = a_i^2, \qquad \sum_{k=1}^{3} b_{ki}b_{kj} = 0. \tag{D2.8}$$

Matice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{b_{11}}{a_1} & \dfrac{b_{12}}{a_2} & \dfrac{b_{13}}{a_3} \\ \dfrac{b_{21}}{a_1} & \dfrac{b_{22}}{a_2} & \dfrac{b_{23}}{a_3} \\ \dfrac{b_{31}}{a_1} & \dfrac{b_{32}}{a_2} & \dfrac{b_{33}}{a_3} \end{pmatrix}$$

je tedy ortogonální. Její každý prvek se vyjádří známým způsobem pomocí svého doplňku; dostanou se tak relace analogické k (0.10).

Rovnice (0.3), (0.4), (0.7), (0.8) a (0.10) byly naším východiskem při analytických důkazech konstrukcí os elipsy. Jak by se využilo právě uvedených prostorových analogií těchto rovnic k analytickým důkazům konstrukcí os elipsoidu?

— — —

Na trojosém elipsoidu

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

s poloosami $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$ jsou

$$\begin{array}{llll} B_1\,[& 3, & 2, & \frac{3\sqrt{39}}{10} \quad], \\[2ex] B_2\,[& -1, & \frac{3-\sqrt{15}\sqrt{39}}{8}, & \frac{75\sqrt{15}+9\sqrt{39}}{160} \quad], \\[2ex] B_3\,[& \sqrt{15}, & -\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{39}}{8}, & \frac{75-9\sqrt{15}\sqrt{39}}{160} \quad] \end{array}$$

koncové body tří sdružených poloměrů. S jistou dávkou trpělivosti vůči numerickým výpočtům se přesvědčíme, že podle ($D2.8$) a ($D2.7$) vskutku

$$\begin{aligned} b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 &= 3^2 + (-1)^2 + (\sqrt{15})^2 = 25 = a_1^2, \\ b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 &= 16 = a_2^2, \\ b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2 &= 9 = a_3^2 \end{aligned}$$

a

$$b_{1i}b_{1j} + b_{2i}b_{2j} + b_{3i}b_{3j} = 0, \quad i \neq j;$$

podobně

$$\left(\frac{b_{11}}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b_{12}}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{b_{13}}{a_3}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\frac{3\sqrt{39}}{10}}{3}\right)^2 = 1$$

atd. Kdybychom měli ještě větší trpělivost, propočítali kosiny úhlů vektorů $\overrightarrow{OB_i}$ a $\overrightarrow{OB_j}$ (tj. cos β_{ij}) a s nimi pak pravé strany v ($D2.5$), dostali bychom

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 50, \\ a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2 &= 769, \\ a_1^2a_2^2a_3^2 &= 3600 \end{aligned}$$

a rovnice ($D2.6$) by se specializovala na rovnici

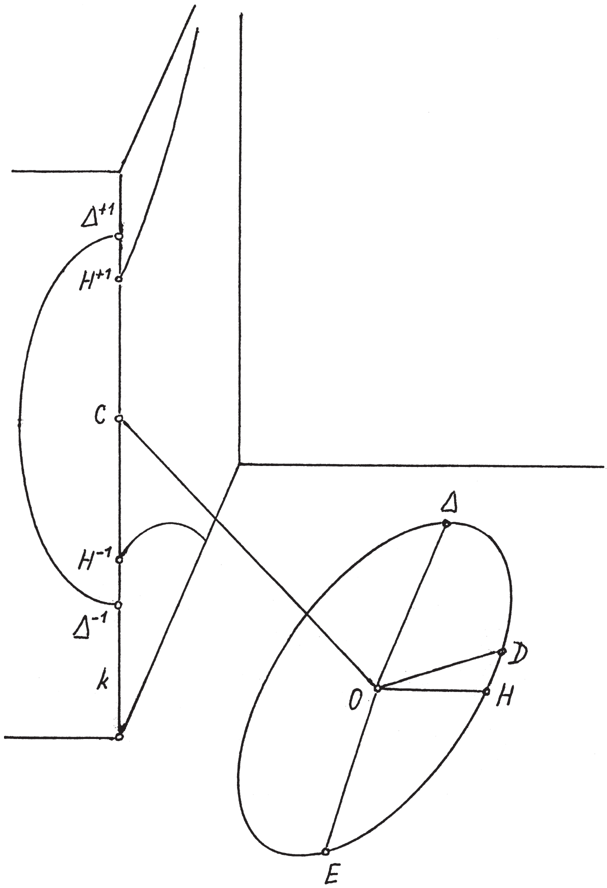
$$z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0$$

s kořeny 25, 16, 9.

— — —

Vzorový příklad na analogii mezi rovinnou konstrukcí os elipsy z jejích dvou sdružených poloměrů a prostorovou konstrukcí os elipsoidu z jeho tří sdružených poloměrů poskytuje M. Chasles 1837 v *Aperçu historique* . . . [7] (Note XXV, str. 359–368; německý překlad str. 382–394). Ke konstrukci, kterou jsme analyticky probrali v odd. 4, odvozuje M. Chasles prostorový protějšek; popisuje jej na str. 364 (využívám analogie k našemu označení z rovinného případu):

Jsou dány tři úsečky OC, OD, OE jako sdružené poloměry elipsoidu s tím, že jeho řez rovinou ODE není kružnicový. Osy elipsoidu se sestrojí takto; viz schematický obr. D2.2:



Obr. D2.2

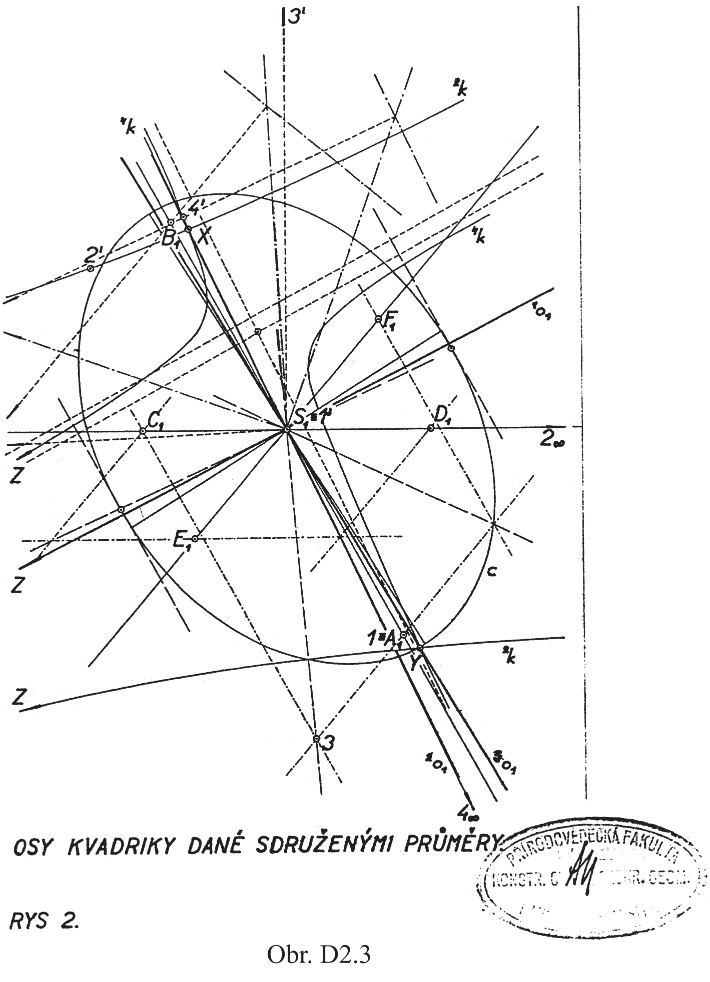
Bodem C vedeme k rovině ODE kolmici k (analogie ke kolmici k OD, viz odd. 0 s obr. 0.1c a odd. 4 s obr. 4). V rovině ODE sestrojíme poloosy $O\Delta$ a OH (o délkách δ a $\eta < \delta$) elipsy se sdruženými poloměry OD a OE; od bodu C naneseme na kolmici k úsečky délek δ a η do bodů Δ^{ε} a H^{ε} (analogie k bodům D^{ε}, viz odd. 0 s obr. 0.1c a odd. 4 s obr. 4). Kolmicí k proložíme rovinu rovnoběžně s poloosou OH, resp. $O\Delta$ a v ní sestrojíme elipsu s ohnisky H^{ε} a vrcholy Δ^{ε}, resp. hyperbolu s ohnisky Δ^{ε} a vrcholy H^{ε}. Obě kuželosečky promítneme ze středu O kuželovými plochami (analogie k přímkám OD^{ε}, viz odd. 4 s obr. 4). Tyto kuželové plochy se protínají ve 4 přímkách ležících po dvou v 6 rovinách, které se sečou v dalších 3 přímkách (analogie k osám 2 přímek OD^{ε}). Tyto 3 přímky jsou osy elipsoidu (viz větu [O.OD^{ε}] z odd. 0).

Délky poloos se pak ihned určí z první trojice relací (D2.8) způsobem zcela analogickým k tomu, kterým jsme v závěru odd. 0 dospěli od dvojice relací (0.7) k délkám poloos elipsy.

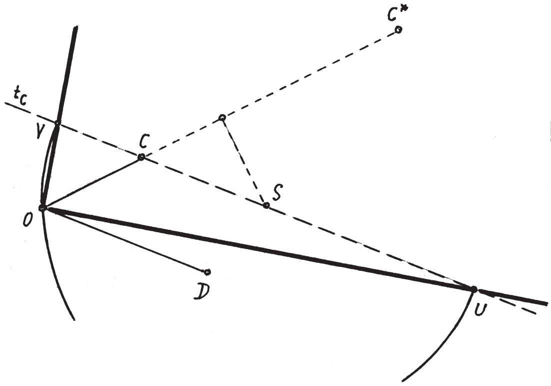
— — —

Není mi známa žádná práce, která by – podobně jako to učinil K. Pelz s konstrukcemi os elipsy ze dvou jejích sdružených poloměrů – konstrukce os elipsoidu ze tří jeho sdružených poloměrů shrnula a srovnala, případně se navíc pokusila o sjednocující analytické důkazy.

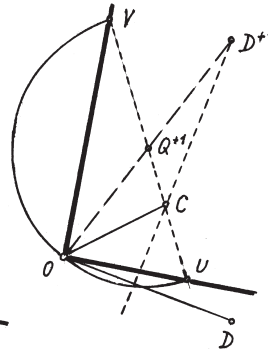
Před zhruba 55 roky byla konstrukce os kvadriky dané třemi sdruženými průměry jednou z úloh ve cvičeních z deskriptivní geometrie pro kandidáty učitelství. Na pražské přírodovědecké fakultě jsem tato cvičení zapisoval v letním semestru 1947/48 až v letním semestru 1948/49. Cvičení vedl Alois Urban (1912–1981, od roku 1954 profesor deskriptivní geometrie na strojní fakultě ČVUT). Jemu jsem odevzdal několik rysů, které si ponechal. V jeho pozůstalosti je našel Ladislav Drs (emeritní profesor rovněž deskriptivní geometrie na strojní fakultě ČVUT), který mi je předal. Z jednoho rysu je na obr. D2.3 reprodukována konstrukce os ${}^1o$, ${}^2o$, ${}^3o$ trojosého elipsoidu ze zadaných jeho sdružených průměrů AB, CD, EF se středem S. Vpravo dole jsou Urbanovy iniciály AU a oválné razítko s nápisem „Přírodovědecká fakulta – konstr. cvič. z deskr. geom. – Karlovy university.“



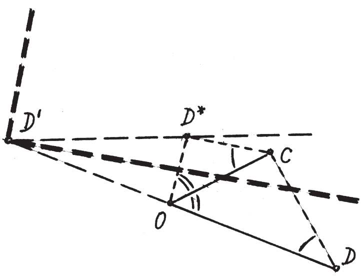
Obr. D2.3



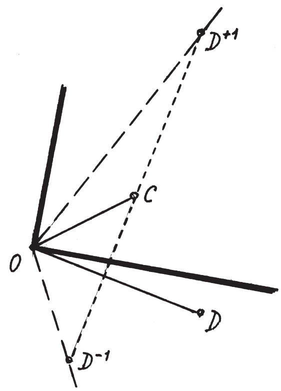
Obr. 1



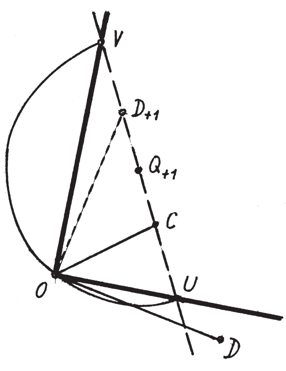
Obr. 2



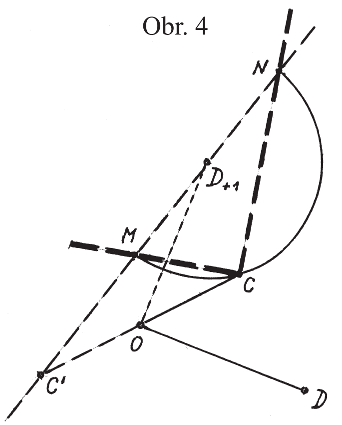
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Obr. 1 – Pappos 3. stol.

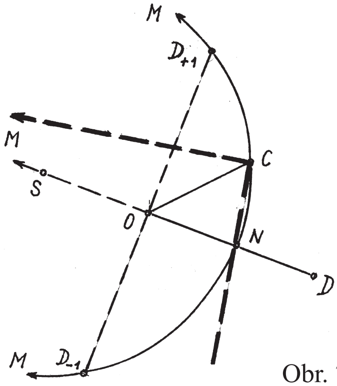
Obr. 2 – Frézier 1737

Obr. 3 – Euler 1750

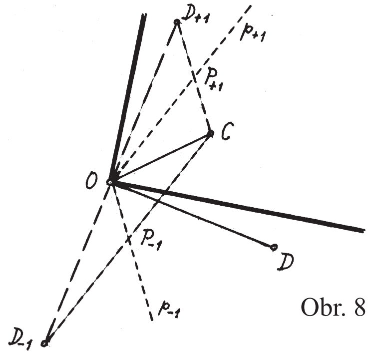
Obr. 4 – Chasles 1837

Obr. 5 – Rytz 1845

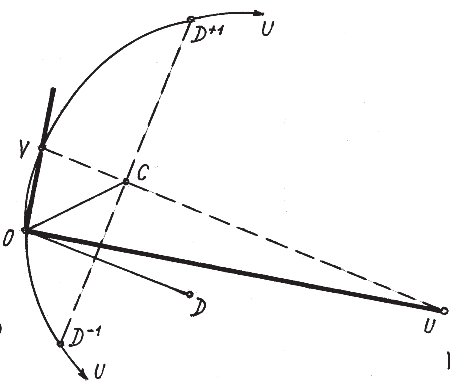
Obr. 6 – Meyer 1849



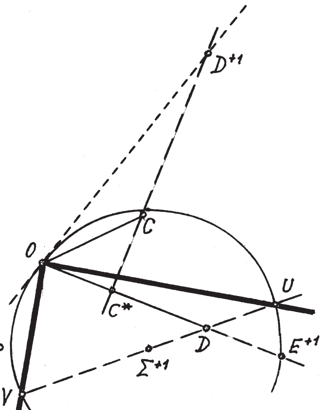
Obr. 7



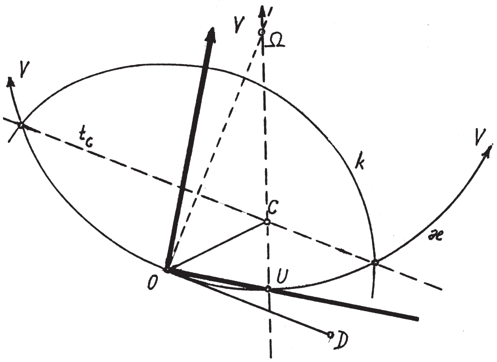
Obr. 8

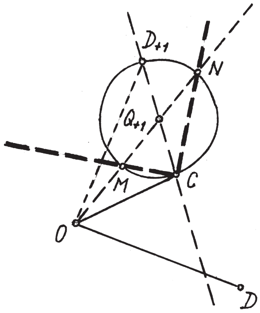


Obr. 9



Obr. 11





Obr. 12

Obr. 13

Obr. 7 – Broch 1850
Obr. 8 – Somov 1860
Obr. 9 – Steiner před 1867
Obr. 11 – Rodenberg 1883
Obr. 12 – Graefe 1901
Obr. 13 – Mannheim 1904

Závěr

Skončím několika poznámkami.

Kdyby nynější studenti učitelství deskriptivní geometrie měli rýsovat podobné úlohy jako konstrukci os elipsoidu z jeho sdružených poloměrů, byla by to vážná chyba. Ale byla by rovněž vážná chyba, kdyby se neseznámili s postupem, na němž je řešení založeno.

Kdo vnikl v myšlenkové konstrukce syntetické geometrie – což nelze učinit v krátkosti a bez cviku – nemůže jim nepřiznat někdy až zcela výjimečnou důmyslnost. Kdyby mladí geometři neměli o nich alespoň povědomí a nevěděli, kde je hledat, byly by pro ně úplně ztracené, pokud by je někdy – což nelze vyloučit – zase potřebovali.

Tisícekrát pracovali deskriptivní geometři s Rytzovou konstrukcí, a přece se nedostali k důkladnějšímu rozboru její přesnosti a přednosti vůči jiným konstrukcím. Bohužel pro stálé šermování pravítkem a kružítkem nevěnovali se soustavnějšímu posouzení grafického postupu. Skoro výjimečná je krátká poznámka, kterou k těmto otázkám učinil F. Hohenberg [14], str. 59:

> *Hat die Ellipse fast Kreisform, so wird die Konstruktion ungenau, weil die Verbindungsgerade zweier sehr naher Punkte* (C a D_{+1} v našem označení) *nur ungenau gezeichnet werden kann.*

A k tomu tato pozn. pod čarou:

> *Eine Konstruktion, die in einem Sonderfall theoretisch versagt, versagt praktisch infolge der unvermeindlichen Zeichenungenauigkeit schon in der Nähe des Sonderfalls (Hessenberg).*[28]

A. F. Frézier byl nejvýznamnějším Mongeovým předchůdcem a studium jeho díla z 30. let 18. století by mohlo přinést další překvapení. Rozbor Frézierova díla by byl výborným námětem pro podporu deskriptivní geometrie v jejím posledním období, kdy stále upadá.

O. Baier 1967 zakončil svůj článek [1] takto:

> *Die bislang nach Rytz benannte Konstruktion wird daher besser nach Frézier benannt, wenigstens solange, als hierfür kein früherer Autor nachgewiesen ist.*[29]

Viděli jsme, že konstrukce os elipsy z jejích sdružených průměrů byly opakovaně objevovány. Při práci na tomto článku jsem v podobné souvislosti přišel v Nouvelles Annales de mathématiques 16(1857), str. 189, na tuto redakční poznámku:

> *Beati qui nihil legunt: omnia invenient.*[30] [31]

---

[28] Má-li elipsa skoro tvar kružnice, stává se konstrukce nepřesnou, neboť spojnice dvou velmi blízkých bodů může být vyrýsována jen nepřesně. – Konstrukce, která ve zvláštním případu teoreticky selhává, selhává prakticky v důsledku nevyhnutelných rýsovacích chyb již v blízkosti zvláštního případu.

[29] Dosud po Rytzovi nazývanou konstrukci bude tedy lépe jmenovat Frézierovou, alespoň tak dlouho, dokud se neprokáže nějaký dřívější autor.

[30] Šťastní, kteří nic nečtou: všechno objevují.

[31] Po téměř 150 letech by O. Terquem mohl opakovat svou poznámku s daleko větší ironií o některých článcích ve sbornících komise JČMF pro geometrii a počítačovou grafiku.

LITERATURA

[∗] Sobotka J., *Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, Praha, 1906, 643 stran.

— — —

[1] Baier O., *Zur Rytzschen Achsenkonstruktion*, Elemente der Mathematik **22** (1967), 107–108.

[2] Brauner H., *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*, Wien, 1986.

[3] Breton de Champ, *Des systèmes simultanés de description de l'ellipse par le point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe*, Nouvelles Annales de Mathématiques **5**(1846), 591–599.

[4] Broch O., *Auflösung einer geometrischen Aufgabe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **40**(1850), 233–234.

[5] Burmester L., *Grundzüge der Reliefperspektive*, Leipzig, 1883.

[6] Bydžovský B., *Úvod do analytické geometrie*, Praha, 1923 (2. vyd. 1946, 3. vyd. 1956).

[7] Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, Paris, 2. nezm. vyd. 1875 (1. vyd. 1837, německý překlad 1839).

[8] Delabar G., *Die Polar- und Parallelperspektive, als Lehrmittel für Lehrer und Schüler*, Freiburg, 2. vyd. 1893 (1. vyd. 1871).

[9] Delabar G., *Construktion der Achsen irgend einer Ellipse, von der zwei conjugierte Durchmesser gegeben sind*, Archiv der Mathematik und Physik **52**(1871), 310–312.

[10] Euler L., *Solutio problematis geometrici*, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae **3**(1750–51), 224–234.

[11] Fialkowski N., *Zeichnende Geometrie*, 3. vyd. Klinkhardt, Wien, Leipzig, 1882, xiv+138 stran (2. vyd. Wallishausser, Wien, 1860, xiv+127 stran).

[12] Frézier A. F., *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois* . . . , Strasbourg, Paris, I. díl 1737, II. díl 1738, III. díl 1739 (2. vyd. 1754, 1768, 1769).

[13] Graefe F., *Zusammenhang zwischen Zentralellipse und Trägheitskreis (nebst Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern)*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **46**(1901), 348–353.

[14] Hohenberg F., *Konstruktive Geometrie in der Technik*, Wien, 2. vyd. 1961 (1. vyd. 1956, 3. vyd. 1966).

[15] Chalupníček B., *O novém sestrojování os ellipsy ze sdružených průměrů aneb za podobných podmínek*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **33**(1904), 226–233.

[16] Jacobi R., *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **32**(1952), 30.

[17] Jeřábek V., *Sestrojení os ellipsy, jsou-li dány její průměry sdružené*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **24**(1895), 64–68.

[18] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptivní geometrie*, Praha, I. díl 1929.

[19] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha, 1968 (ruský originál: Moskva, 1961).

[20] Kounovský J., Vyčichlo F., *Deskriptivní geometrie pro samouky*, Praha, 2. vyd. 1951 (1. vyd. 1948, 5. vyd. 1959).

[21] Kraemer E., *Zobrazovací metody (Promítání rovnoběžné)*, díl I., Praha, 1991.

[22] Loria G., *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Milano, 1921.

[23] Mannheim A., *Solution de la question 366*, Nouvelles Annales de Mathématiques **16**(1857), 187–189.

[24] Mannheim A., *Construire les axes d'une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués*, Nouvelles Annales de Mathématiques, Sér. II, **17**(1878), 529–535.

[25] Mannheim A., *Cours de géométrie descriptive* . . . , Paris, 2. vyd. 1886 (1. vyd. 1880).

[26] Mannheim A., *Principes et dévellopements de Géométrie cinématique*, Paris, 1894.

[27] Mannheim A., *Construire en grandeur et en direction les axes d'une ellipse dont on connait deux diamètres conjugués*, Nouvelles Annales de Mathématiques, IV^{e} sér. **4**(1904), 5–7.

[28] Meyer M., *Findung der Hauptaxen aus zwei konjugierten Durchmessern*, Archiv der Mathematik und Physik **13**(1849), 406–409.

[29] Mossbrugger L., *Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive*, Zürich, 1845.

[30] Mossbrugger L., Rytz D., Archiv der Mathematik und Physik **20**(1853), 118–120.

[31] Müller E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen I*, Wien, 3. vyd. 1920 (1. vyd. 1908, 2. vyd. 1918).

[32] Nádeník Z., *Minulost a budoucnost deskriptivní geometrie*, Sborník 13. semináře skupiny JČMF pro deskr. geometrii a počítačovou grafiku, Pernink, 1993, 5–14.

[33] Nádeník Z., *Současnost a budoucnost deskriptivní geometrie*, Sborník 14. semináře skupiny JČMF pro deskr. geometrii a počítačovou grafiku, Bílá, 1994, 6–12.

[34] Nádeník Z., *O geometrických pracích Eduarda Weyra*, in J. Bečvář (ed.): Eduard Weyr 1852–1903, JČMF, Praha, 1995, 66–89.

[35] Nádeník Z., *200 let Mongeovy „Géométrie descriptive"*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v proměnách věků I, Praha, 1998, 147–162.

[36] Nádeník Z., *Historische Bemerkungen zur Rytzschen Achsenkonstruktion*, Rozmnožený rukopis, Praha, 2000.

[37] Nádeník Z., *O Sobotkově učebnici Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, předchozí článek této monografie.

[38] Nádeník Z., *Achsenkonstruktion der Ellipse*, přednáška na konferenci, kterou pořádala Fachsektion „Geschichte der Mathematik" der DMV, Zingsthof (Ostseebad Zingst – Vorpommern) 7.–11. 5. 2001. Plánovaný sborník nevyšel.

[39] Obenrauch F., *Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie*, Brünn, 1897.

[40] Papos, *Pappi Alexandrini Collectionis*, ed. F. Hultsch, Berlin, I. díl 1876, II. díl 1877, III. díl 1878.

[41] Pelz C., *Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugierten Diametern*, *Programm der k.-k. Staats-Realschule in Teschen* 1875–76, 3–14.

[42] Pelz K., *Deskriptivní geometrie I*, Praha, 1904 (rozmnožené přednášky).

[43] Rodenberg C., *Einfache Construction der Ellipse aus zwei conjugierten Durchmessern*, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure **27**(1883), 803–804.

[44] Rodenberg C., *Einfache Construction der Ellipse aus zwei conjugierten Durchmessern*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **29**(1884), 255–256.

[45] Salmon G., *A treatise on conic sections*, London, 4. vyd. 1863 (1. vyd. 1848).

[46] Salmon G., Fiedler W., *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, Leipzig, 2. vyd. 1866 (1. vyd. 1860, 7. vyd. I. díl 1907).

[47] Skuherský R., *Die orthographische Parallel-Perspektive*, Praha, 1858.

[48] Somoff O. I., *Nouvelles constructions des axes d'une ellipse au moyen d'un système de diamètres conjugués sans tracer la courbe*, Nouvelles Annales de Mathématiques **19**(1860), 122.

[49] Steiner J., Geisler C., *Vorlesungen über synthetische Geometrie, I. Theil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung*, Leipzig, 1867.

[50] Steiner J., Schröter H., *Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Theil: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften*, Leipzig, 1867.

[51] Šilháček K., Sechovský H., *Geometrie pro VII. třídu reálek . . .* , Praha, 1936.

[52] Terquem O., *Les deux propriétés fondamentales des diamètres conjugués, dans les coniques, d'après Apollonius*, Nouvelles Annales de Mathématiques **3**(1844), 345–350.

[53] Vojtěch J., *Geometrie pro VII. třídu reálek . . .* , Praha, 5. vyd. 1934.

[54] Wiener Ch., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, díl I., Leipzig, 1884.

[55] Zeuthen H., *Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre*, Leipzig, 1882.

Dokončeno v říjnu roku 2000.

Dodatek v lednu roku 2010:

Ve svých záznamech z roku 2008 jsem našel delší referát, který otiskl Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 56(1933), 6–7, o práci J. E. Hoffmann – H. Wieleitner: *Zur Geschichte der sog. Rytz-schen Achsenkonstruktion einer Ellipse aus einem Paar konjugierten Durchmesser*, Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam) (2) 16(1930), 56–22. Druhý autor, Heinrich Wieleitner (1874–1931), byl známým historikem matematiky.[32] Uvádím český překlad referátu:

Již Apollonius řešil úlohu zkonstruovat osy středové kuželosečky, je-li dána dvojice sdružených poloměrů MA, MB s ležícími na nich koncovými body A, B křivky. Apolloniova konstrukce (kniha I, odd. 55 a 58; nejedná se přesně o právě formulovanou úlohu, ale o její ekvivalent) je ovšem zdlouhavá a k praktickým účelům sotva použitelná.

Mezi moderními konstrukcemi úlohy je Rytzova nejznámější a v praxi nejoblíbenější. Pochází od Davida Rytze (1. 4. 1801 – 25. 3. 1868), profesora matematiky na průmyslové škole v Aarau; nejdříve ji uveřejnil Leopold Mossbrugger (24. 1. 1796 – 12. 8. 1864) ve svém spisu Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive nebst deren Anwendungen auf konstruktive Auflösung von Aufgaben räumlicher Verwandschaften der Affinität, Collineationen usw. (Zürich 1845) a publikoval v časopisu Archiv für Math. u. Phys. (1) 20(1853), 118–120. Variantu této konstrukce pojal L. Burmester s citací Mossbruggerovy knihy do svých Grundzüge der Reliefperspektive (1883; F. d. M. 15, 500) a opatřil ji důkazem, v němž považoval elipsu

[32] Je autorem známé knihy *Geschichte der Mathematik*, I. *Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts*, Berlin-Leipzig 1922; II. *Von 1700 bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts*, Berlin-Leipzig 1923. Z různých vydání je sestaven ruský překlad *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, Москва, 1958, 2. vyd. 1966.

za obraz kružnice při kolmé afinitě. Christian Wiener převzal konstrukci spolu s tímto Burmesterovým důkazem do své učebnice Lehrbuch der darstellenden Geometrie (sv. I, 1884), a tím velmi přispěl k jejímu dalšímu rozšíření. Na téže stránce poukazuje Wiener na podobnou konstrukci, která pochází od Amédéea Françoise Fréziera (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois . . . , sv. I, Strassburg-Paris 1737). Od té doby se v učebnicích vesměs uvádí Burmesterova varianta Rytzovy konstrukce a označuje se jako Rytzova.

Autoři nyní popisují původní Rytzovu konstrukci, Burmesterovu variantu a Frézierovu konstrukci, ukazují identitu těchto konstrukcí a konečně dokládají, že Rytzova konstrukce je skoro doslovně již v Descartesovské škole. Fgl.