PŘIBLIŽNÉ REKTIFIKACE KRUHOVÉHO OBLOUKU

Martina Kašparová

V první části následujícího textu se budeme věnovat konstrukcím úseček, jejichž délky jsou přibližně rovny délce daného kruhového oblouku. Popíšeme především rektifikaci známou jako Sobotkova a stručně se zmíníme o rektifikacích těch autorů, které J. Sobotka uvedl v historických poznámkách učebnice [S36]. Z mnoha dalších konstrukcí budeme věnovat pozornost rektifikacím A. Pleskota jakožto českého autora, d'Ocagneově konstrukci, která patří mezi nejznámější, a Rankinovým rektifikacím, které vynikají jednoduchostí a dobrou přesností.

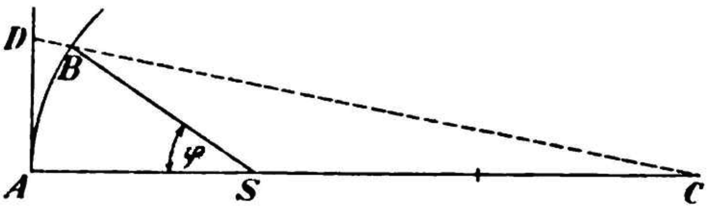
V druhé části se budeme zabývat přibližnými rektifikacemi obvodu kružnice či jeho poloviny, o nichž Jan Sobotka píše v odstavcích 438–440 učebnice [S36] (Archimédova aproximace π, „čínská přesná hodnota" π, Spechtova konstrukce, uvedeme přibližné rektifikace poloviny, případně čtvrtiny obvodu kružnice publikované některými našimi autory.

V závěru provedeme porovnání teoretické přesnosti rektifikací v závislosti na délce rektifikovaného oblouku, pokusíme se také o porovnání složitosti jednotlivých konstrukcí.

Sobotkova rektifikace (rekS1)

Popišme nyní přibližnou rektifikaci kruhového oblouku a její zpřesnění tak, jak ji uvádí J. Sobotka na str. 614–618 učebnice [S36] v odstavci 441.

Předpokládejme, že je dán kruhový oblouk AB o poloměru r příslušný středovému úhlu $\sphericalangle ASB$, $|\sphericalangle ASB| = \varphi$. Na polopřímce AS je sestrojen bod C tak, že $|AC| = 3 \cdot |AS|$. Označme D průsečík polopřímky CB s tečnou sestrojenou v bodě A k oblouku AB. Úsečka AD udává přibližnou délku oblouku AB.[1] (Viz obrázek.)



(Převzato z [S36], str. 614, obr. 469)

[1] Konstrukce je popsána např. v odstavci 245 na str. 493 učebnice [7], jako první řešení úlohy 15.8 na str. 17 učebnice [23], v odstavci 7,6,2 na str. 96 učebnice [2], na str. 50–53 publikace [4]. Pod označením Sobotkova rektifikace ji najdeme i v přehledech matematiky (viz např. str. 131–132 kompendia Rektorys K. a kol., *Přehled užité matematiky*, 1. vyd. 1963).

Délku úsečky AD vypočteme z podobných trojúhelníků ADC a B_0BC, kde B_0 je pata kolmice spuštěná z bodu B na AC. Platí $|B_0B| = r\sin\varphi$, $|B_0C| = r\cos\varphi + 2r$, $|AC| = 3r$, a tedy

$$|AD| = \frac{3r\sin\varphi}{2+\cos\varphi}. \tag{$*$}$$

Naznačme nyní, jak J. Sobotka pomocí rozvojů funkce sinus a kosinus zdůvodňuje výše uvedenou konstrukci a odvozuje její zpřesnění, které je použitelné i pro středové úhly větší než 30°.

Uvažujme kruhový oblouk AB o poloměru r příslušný středovému úhlu $\sphericalangle ASB$ a bod D na tečně sestrojené v bodě A k oblouku AB takový, že délka úsečky AD je rovna délce oblouku AB. Hledáme bod C jako průsečík polopřímek AS a DB.

J. Sobotka zvolil soustavu souřadnic tak, že $S = [0,0]$, $A = [r,0]$, a tedy $B = [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$, $D = [r, r\varphi]$. Rovnici přímky BD pak udává ve tvaru

$$(x-r)(\varphi-\sin\varphi) - (y-r\varphi)(1-\cos\varphi) = 0. \tag{1}$$

Směrnici k přímky BD lze nyní vyjádřit dvěma způsoby. Z předchozího vztahu je

$$k = \frac{\varphi-\sin\varphi}{1-\cos\varphi}, \tag{2}$$

navíc je

$$k = \operatorname{tg}|\sphericalangle DCA| = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{r\varphi}{|AC|}. \tag{3}$$

Ve výrazu na pravé straně (2) dosadil J. Sobotka za goniometrické funkce jejich rozvoje v počátku

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \tag{4}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots. \tag{5}$$

Dělením

$$\left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} - \dots\right) : \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} - \dots\right)$$

se získá podíl

$$k = \frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi^3}{90} + \frac{\varphi^5}{2\,520} + \dots$$

Pokud se zanedbají všechny členy s mocninou vyšší než dva, bude $k \doteq \frac{\varphi}{3}$, a tedy z (3) vyplývá rovnost

$$\frac{r\varphi}{|AC|} \doteq \frac{\varphi}{3},$$

odkud je

$$|AC| \doteq 3r.$$

V další úvaze J. Sobotka označil průsečík AS a DB jako E. Jeho x-ová souřadnice x_E se vypočte ze vztahu (1), položíme-li v něm $y = 0$, tj.

$$x_E = r - r\varphi\frac{1-\cos\varphi}{\varphi - \sin\varphi}.$$

Po dosazení ze vztahů (4), (5) a vydělení čitatele zlomku jeho jmenovatelem bude

$$x_E = r - r\frac{\frac{\varphi^3}{2!} - \frac{\varphi^5}{4!} + \frac{\varphi^7}{6!} - \dots}{\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} - \dots} = r - r\left(3 - \frac{\varphi^2}{10} - \frac{\varphi^4}{4\,200} + \dots\right).$$

Pokud se velikost středového úhlu blíží nule, je $x_E = -2r$ a bod E splyne s bodem C sestrojeným podle předchozí úvahy. Přesnější vyjádření délky oblouku AB získáme, když místo bodu C vezmeme bod E, pro nějž je $x_E = -2r + r\frac{\varphi^2}{10}$. Je tudíž

$$|CE| = \frac{r\varphi^2}{10}. \tag{6}$$

Pro nalezení přibližné hodnoty φ^2 v předchozím vztahu J. Sobotka opět šikovně použil rozvoj (5). Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\varphi^2}{2!} = 1 - \cos\varphi + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots,$$

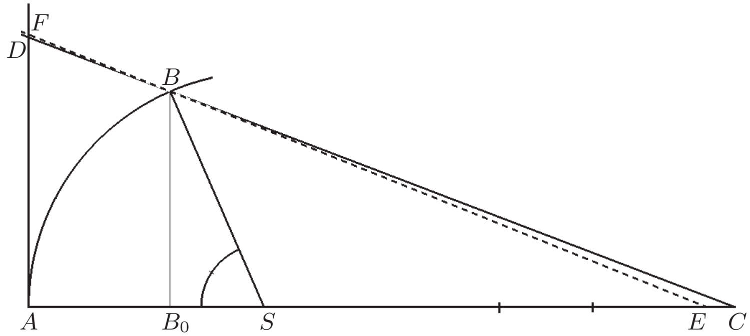
aproximuje

$$\varphi^2 = 2(1 - \cos\varphi).$$

Po dosazení za φ^2 v (6) je

$$|CE| = \frac{r(1-\cos\varphi)}{5}.$$

Odtud zároveň plyne konstrukce bodu E **(rekS2)**. Je totiž $r\cos\varphi$ první souřadnice bodu B a také $|B_0S|$, kde B_0 je pata kolmice spuštěná z bodu B na úsečku AS, a tedy $r - r\cos\varphi = |AB_0|$. Stačí tedy na polopřímku CS nanést od bodu C nalezeného dříve popsaným způsobem pětinu úsečky AB_0 (viz obrázek). Přímka EB protne tečnu AD k oblouku AB v bodě F a $|AF|$ udává přibližnou délku oblouku AB přesněji než $|AD|$.



Délku úsečky AF vypočteme z podobných trojúhelníků AFE a B_0BE. Vzhledem k tomu, že $|B_0B| = r\sin\varphi$, $|B_0E| = r\cos\varphi + 2r - \frac{r}{5}(1-\cos\varphi) = \frac{r}{5}(9+6\cos\varphi)$, $|AE| = 3r - \frac{r}{5}(1-\cos\varphi) = \frac{r}{5}(14+\cos\varphi)$, je[2]

$$|AF| = r\sin\varphi\,\frac{14+\cos\varphi}{9+6\cos\varphi}. \qquad (\diamond)$$

Jan Sobotka uvádí v závěru učebnice [S36] četné historické poznámky k vyloženým poznatkům. Na str. 643 píše, že přibližnou rektifikaci podle předpisu $(*)$ znal už Mikuláš Kusánský (1401–1464), přidal odkaz na str. 184 Cantorových přednášek *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1892. Jan Sobotka v souvislosti s přibližnou rektifikací kruhového oblouku uvedenou na obrázku na str. 53 dále zmiňuje Willebrorda Snellia (1580–1626) včetně odkazu na str. 645 v Cantorově práci (1892), Christiaana Huygense (1629–1695) s odkazem na větu XIII v jeho práci *De circuli magnitudine inventa* a Auguste E. Pelleta (1848–?), který konstrukci rozšířil pro obecné křivky.

Mikuláš Kusánský dospěl roku 1450 v práci *De mathematica perfectione* k předpisu $(*)$, když uvažoval, že délku oblouku lze pro velké n nahradit polovinou strany vepsaného pravidelného n-úhelníka a vzdálenost jeho strany od středu vzdáleností jeho vrcholu od středu.[3] Pro seznámení s dalšími Kusánského rektifikacemi lze zájemcům doporučit práci Nicolaus von Cues, *Die mathematischen Schriften*, přeložila Josepha Hofmann (úvod a poznámky J. E. Hofmann), Hamburk, 1952 (2. vyd. 1980), na niž mě upozornil Z. Nádeník včetně odkazu v Juškevičově knize *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1978, kde se píše, že Kusánský v období 1445 až 1459 sepsal řadu dalších prací o rektifikaci.

W. Snellius uvedl ve své práci *Cyclometricvs* [19] z roku 1621 meze, v nichž se pohybuje velikost kruhového oblouku. V odstavci *Propositio XXXI* na str. 46 ukazuje, že je (při našem označení) velikost kruhového oblouku AB větší než délka úsečky AD. Horní mezí se zabývá v části *Propositio XXXIX* na str. 83. Při označení stejném jako v následujícím obrázku[4] je horní mez dána délkou úsečky il. Přímka mfu, jíž bod l náleží, se sestrojí tak, aby délka úsečky mf byla rovna poloměru kruhového oblouku. V takovém případě je velikost úhlu umi rovna třetině velikosti úhlu uei.[5] Délku úsečky il lze vypočítat z trojúhelníku ilm. Trojúhelník efm je rovnoramenný s rameny délky r a úhly při základně

[2] Podle [24], pozn. 1 na str. 203, napsal tento vztah I. Newton (1643–1727) v dopise W. Leibnizovi (1646–1716) roku 1676. J. H. Lambert (1728–1777) vztah $(\diamond)$ dokázal na str. 312 práce *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, II. sv., Berlin, 1765 (viz [24], pozn. 2 na str. 203), navíc vyvodil příslušnou přibližnou konstrukci.

[3] Viz Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Band, 1200–1668, 2. vyd., B. G. Teubner, Leipzig, 1913, str. 199–201.

[4] Podobný obrázek viz Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Band, 1200–1668, 2. vyd., B. G. Teubner, Leipzig, 1913, str. 706, kde je také uvedeno omezení délky kruhového oblouku.

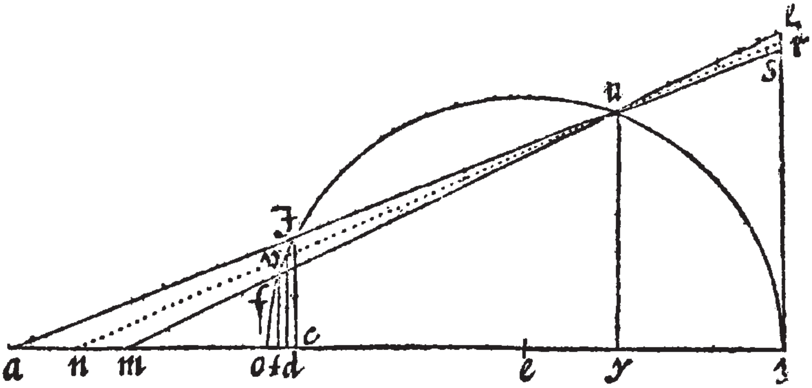
[5] Viz např. Bečvář J., Štoll I., *Archimedes. Největší vědec starověku*, Prometheus, Praha, 2005, str. 62–63, nebo Yates R. C., *The Trisection Problem*, National Mathematics Magazine **15**(1941), no. 6, str. 280.

o velikosti $\frac{\varphi}{3}$. Je tedy $em = 2r\cos\frac{\varphi}{3}$ a pro délku úsečky il platí

$$il = im \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = r\left(2\cos\frac{\varphi}{3}+1\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = r\left(2\sin\frac{\varphi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}\right).$$

Podle Snellia je tedy délka oblouku AB omezena takto:

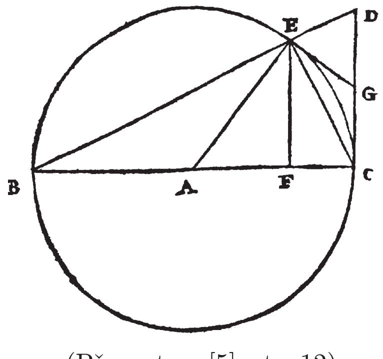
$$r\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} < |\widehat{AB}| < r\left(2\sin\frac{\varphi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}\right).$$



(Převzato z [19], str. 83)

Ch. Huygens se mj. omezením kruhového oblouku zabývá v práci *De circuli magnitudine inventa* (1654).[6] Ve větě XIII na str. 29 popisuje konstrukci rektifikace kruhového oblouku, která se u nás vžila pod označením Sobotkova, a tvrdí, že takovým způsobem získaná úsečka je kratší než příslušný oblouk. Na str. 12 (*Theor. VIII. Prop. VIII*) omezuje délku oblouku shora. Dokazuje (viz následující obrázek), že součet $\frac{2}{3}|CD|+\frac{1}{3}|EF|$ je větší než velikost oblouku CE. Označíme-li φ velikost úhlu EAC, můžeme Huygensův výsledek zapsat ve tvaru

$$r\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} < |\widehat{CE}| < \frac{r}{3}\left(\sin\varphi + 4\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$



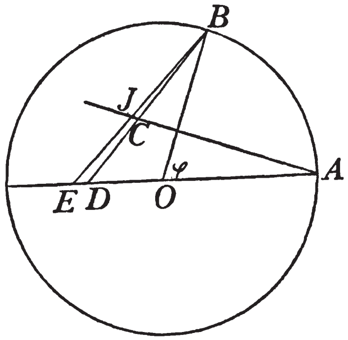
(Převzato z [5], str. 12)

[6] Stručný přehled jím dokázaných vět v této práci viz [3].

Pleskotova rektifikace (rekP)

Antonín Pleskot (1866–1935) popisuje v příspěvku *O jisté úloze, která řeší přibližnou rektifikaci oblouku kruhového* [14] rektifikaci kruhového oblouku odlišnou od Sobotkovy, která však také vede ke konstrukci úsečky, jejíž délka je dána předpisem $(*)$.

Nechť je dán kruhový oblouk AB příslušný středovému úhlu $\sphericalangle AOB$; označme $|\sphericalangle AOB| = \varphi$ (viz obrázek). Na polopřímce opačné k polopřímce OA je sestrojen bod D tak, že $|OD| = \frac{1}{2}\cdot|OA|$, bod C je průsečík úsečky BD a kolmice spuštěné na úsečku BO z bodu A. Potom je délka úsečky AC přibližně rovna délce oblouku AB.



(Převzato z [14], str. 309, obr. 3)

Při odvození popsané konstrukce řeší A. Pleskot následující úlohu. Předpokládá, že je dána kružnice se středem O a poloměrem r a libovolným středovým úhlem $\sphericalangle AOB$, jehož ramena protínají kružnici v bodech A, B. Na kolmici k OB vedené bodem A je sestrojen bod C tak, že $|\widehat{AB}| = r\varphi = |AC|$. Úkolem je zjistit, k jakému bodu se blíží průsečík D přímek OA a BC, jestliže se délka oblouku AB blíží k nule.

Podobně jako při odvození Sobotkovy rektifikace je zavedena soustava souřadnic tak, že $O = [0,0]$, $A = [r,0]$, a tedy

$$B = [r\cos\varphi, r\sin\varphi], \qquad C = [r - r\varphi\sin\varphi, r\varphi\cos\varphi].$$

Z vyjádřené x-ové souřadnice bodu D počítá A. Pleskot limitu pro $\varphi \to 0$:

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(r\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\cos\varphi - 1 + \varphi\sin\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}\right) =$$

$$= r - r\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi - \sin\varphi + \varphi\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$$

Užitím l'Hospitalova pravidla na druhý člen rozdílu se dostane

$$r - r\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos 2\varphi - \cos\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \cos\varphi + \varphi\sin\varphi} =$$

$$= r - r\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos^2\varphi - \cos\varphi}{\varphi\sin\varphi} - r\lim_{\varphi\to 0}\frac{2\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi} =$$

$$= r - r \lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos\varphi(-2\sin^2\frac{\varphi}{2})}{2\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} - 2r = -r + r \lim_{\varphi \to 0} \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\frac{\varphi}{2}} = -r + \tfrac{1}{2}r = -\tfrac{1}{2}r$$

Po výpočtech je $D = [-\frac{r}{2}, 0]$, odkud vyplývá jeho přibližná rektifikace oblouku AB.

Pomocí podobných trojúhelníků ACD a $A'BD$, kde A' je průsečík přímky OA a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem B, se snadno vypočte délka úsečky AC. Zjistili bychom, že pro $OD = \frac{r}{2}$ je dána předpisem $(*)$.

Autor dále omezuje délku oblouku AB shora. Na průměru OA volí bod $E = [-r\frac{\sqrt{3}}{3}, 0]$, jemuž na kolmici k OB bodem A odpovídá bod J. Vyjádřením délky úsečky AJ lze získat následující omezení délky oblouku AB.

$$r\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} < |\widehat{AB}| < r\frac{\sin\varphi(1+\sqrt{3})}{\cos\varphi + \sqrt{3}}.$$

V závěru článku A. Pleskot navrhuje pro oblouky středových úhlů větších než 60° rozpůlení oblouku, rektifikaci poloviny oblouku a následné zdvojnásobení získané úsečky. Ukazuje, že délka takové úsečky udává přibližnou hodnotu $|\widehat{AB}|$ přesněji než délka úsečky získané rektifikací daného oblouku, tj.

$$r\varphi - 2 \cdot \frac{3r\sin\frac{\varphi}{2}}{2+\cos\frac{\varphi}{2}} < r\varphi - \frac{3r\sin\varphi}{2+\cos\varphi}.$$

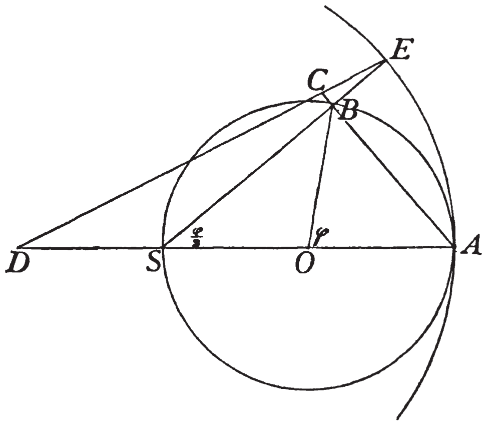
Uvádí ještě dvě konstrukce, v nichž je „skryta“ rektifikace polovičního oblouku provedená výše popsaným způsobem. Oba postupy vedou přímo k rektifikaci daného oblouku bez nutnosti zdvojnásobování délky úsečky získané rektifikací polovičního oblouku. První konstrukce dokonce nevyžaduje ani půlení oblouku:

Předpokládejme opět, že je dán kruhový oblouk AB příslušný středovému úhlu $\sphericalangle AOB$, kde $|\sphericalangle AOB| = \varphi$. Označme S průsečík přímky OA a s kružnicí $k = (O, r = |OA|)$ různý od bodu A (viz obrázek). Nechť D je bod polopřímky OS takový, že $|OD| = 2r$. Z bodu S je opsán kruhový oblouk o poloměru $|SA| = 2r$. Přímka SB se s ním protne v bodě E. Průsečíkem DE a AB je bod C, délka úsečky AC je přibližně rovna délce oblouku AB.[7]

Úsečka AC je výsledkem výše popsané konstrukce pro kruhový oblouk AE kružnice se středem S o poloměru $2r$, který přísluší středovému úhlu $\sphericalangle ASE$, $|\sphericalangle ASE| = \frac{\varphi}{2}$. Bod D je totiž bodem polopřímky opačné k polopřímce SA a platí $|SD| = r = \frac{1}{2} \cdot 2r = \frac{1}{2}|SA|$. Vzhledem k tomu, že B je bodem kružnice k s průměrem SA, je přímka AB kolmicí k úsečce SE. Tím je její průsečík s úsečkou DE sestrojen stejným způsobem, jak bylo popsáno na straně 58, a platí

$$|AC| = 2r\frac{3\sin\frac{\varphi}{2}}{2+\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

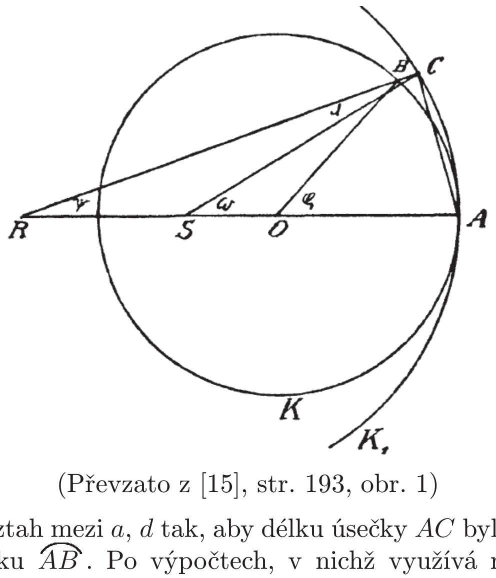
[7] Viz [14], str. 312.



(Převzato z [14], str. 312, obr. 4)

A. Pleskot publikoval roku 1918 v příspěvku [15] obecnější postup rektifikace kruhového oblouku. Různou volbou bodů R a S (viz obrázek) lze získat úsečky AC, jejichž délka s rozdílnou přesností odpovídá délce daného oblouku AB.

V dané kružnici $K = (O, r)$ s kruhovým obloukem AB příslušným středovému úhlu $\sphericalangle AOB$, $|\sphericalangle AOB| = \varphi$, je na polopřímce AO vyznačen bod S tak, že $|AS| = a$, a¿r, a bod R, pro nějž je $|AR| = r + d$, kde $d = |OR|$. Společný bod přímky RB a kružnice K_1 se středem S a poloměrem a v polorovině RAB označme C.



(Převzato z [15], str. 193, obr. 1)

Autor hledá vztah mezi a, d tak, aby délku úsečky AC bylo možno přibližně považovat za délku $\widehat{AB}$. Po výpočtech, v nichž využívá rozvojů funkcí do mocninných řad, dospěl ke vztahu

$$d = \frac{12k - 3k^2 - 8}{3k^2 - 4},$$

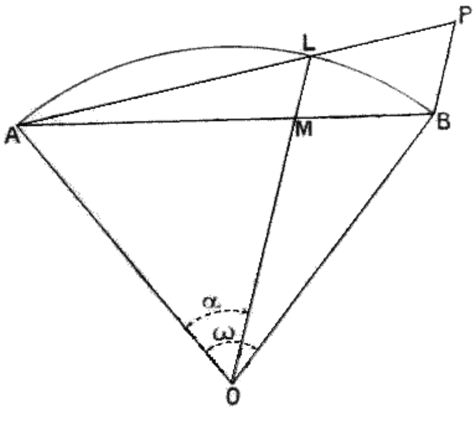
kde $k = \frac{r}{a}$. V takovém případě je rozdíl $|AC| - |\widehat{AB}|$ úměrný r a páté mocnině φ.

A. Pleskot ukazuje, že pro $a \to \infty$ (kružnice K_1 je tudíž tečnou dané kružnice v bodě A) je $d = 2r$, tj. $|AR| = 3r$, a popsaná konstrukce představuje rektifikaci (rekS1). V následujících příkladech volí postupně $d = 0$, $d = r$, $d = r + a$. Z výšeuvedeného vztahu získá hodnoty k, resp. a, a různě přesné přibližné rektifikace oblouku AB.

D'Ocagneova rektifikace (rekO)

Philbert Maurice d'Ocagne (1862–1938), Sobotkův vrstevník, zveřejnil roku 1907 v práci [10] rektifikaci kruhového oblouku, kterou můžeme popsat takto (viz obrázek).

Předpokládejme, že je dán kruhový oblouk AB o jednotkovém poloměru příslušný středovému úhlu $\sphericalangle AOB$, $|\sphericalangle AOB| = \omega$. Na tětivě AB je sestrojen bod M tak, že $|AM| = \frac{2}{3}|AB|$. Označme L průsečík polopřímky OM s obloukem AB. Délka úsečky AL tvoří přibližně $\frac{2}{3}$ délky oblouku AB. Přibližná délka oblouku AB je tedy dána délkou úsečky AP, kde P je průsečík přímky AL a rovnoběžky s přímkou OM vedené bodem B.[8]



(Převzato z [10], str. 1)

Autor ke konstrukci dospěl následovně. Na tětivě AB uvažuje bod M, pro který platí $\frac{|AM|}{|AB|} = m$, a porovnává délku oblouku AB, tj. ω, s délkou úsečky AL.

Úsečka AL je základnou v rovnoramenném trojúhelníku ALO s rameny délky 1 a úhlem proti základně $\sphericalangle AOL$, $|\sphericalangle AOL| = \alpha$. Je proto

$$|AL| = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

V dalším d'Ocagne vyjadřuje ω v závislosti na m a $|AL|$. Např. ze sinové věty pro trojúhelníky AMO a MBO plyne

$$\frac{\sin\alpha}{|AM|} = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{|MB|}.$$

[8] Tato konstrukce je rovněž popsána např. v učebnicích: [7], odstavec 70, str. 117–118, [23], druhé řešení úlohy 15.8 na str. 17, [2], odstavec 7,6,3, str. 96.

Užitím $\frac{|AM|}{|AB|} = m$, je

$$\sin(\omega - \alpha) = \tfrac{1-m}{m} \sin\alpha. \tag{8}$$

Vyjádření $\omega = |\widehat{AB}|$ z předchozího vztahu se opírá o rozvoj

$$\arcsin y = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots(2n)(2n+1)}y^{2n+1} + \dots \tag{9}$$

Autor v rozvoji uvažuje $y = \sin(\omega - \alpha)$. Poté za $\sin(\omega - \alpha)$ dosazuje výraz na pravé straně (8), přičemž pro zjednodušení zápisu píše p místo $\frac{1-m}{m}$, takže je

$$\omega - \alpha = p\,\sin\alpha + \tfrac{1}{6}p^3\sin^3\alpha + \tfrac{3}{40}p^5\sin^5\alpha + \dots$$

Vzhledem k tomu, že délka úsečky AL je ve vztahu (7) vyjádřena v závislosti na $\sin\frac{\alpha}{2}$, přepisuje předchozí vztah užitím identity $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ a označení $\Theta = \sin\frac{\alpha}{2}$ takto:

$$\omega - \alpha = 2p\,\Theta(1-\Theta^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{8}{6}p^3\Theta^3(1-\Theta^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{96}{40}p^5\Theta^5(1-\Theta^2)^{\frac{5}{2}} + \dots \tag{10}$$

Funkce $(1-\Theta^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-\Theta^2)^{\frac{3}{2}}$, $(1-\Theta^2)^{\frac{5}{2}}$ d'Ocagne nahradil jejich rozvoji v počátku a získaný výraz pro $\omega - \alpha$ upravil vzhledem k mocninám Θ:

$$\omega - \alpha = 2p\,\Theta + \left(\tfrac{4}{3}p^3 - p\right)\Theta^3 + \left(\tfrac{12}{5}p^5 - 2p^3 - \tfrac{1}{4}p\right)\Theta^5 + \dots \tag{11}$$

Pro $y = \sin\frac{\alpha}{2}$ dostáváme z (9)

$$\tfrac{\alpha}{2} = \Theta + \tfrac{1}{6}\Theta^3 + \tfrac{3}{40}\Theta^5 + \dots \tag{12}$$

Dvojnásobek (12) přičtený k (11) udává délku oblouku AB v závislosti na p, resp. na m (připomeňme, že $p = \frac{1-m}{m}$) a Θ, resp. $|AL|$ ($|AL| = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\Theta$). Autor uvádí tvar:

$$\begin{aligned} m\omega = 2\Theta &+ \frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\Theta^3 + \\ &+ \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^4}\Theta^5 + \dots \end{aligned} \tag{13}$$

Všiml si, že $9m^2 - 12m + 4 = (3m-2)^2$. Pro $m = \frac{2}{3}$ má (13) tvar

$$\tfrac{2}{3}\,\omega = |AL| - \tfrac{1}{320}|AL|^5 + \dots$$

Tím je zdůvodněn výše uvedený postup, kterým lze sestrojit úsečku, jejíž délka je přibližně stejná jako délka daného oblouku. (Podle předchozího vztahu je taková úsečka nepatrně delší než rektifikovaný oblouk.)

V závěru článku d'Ocagne popisuje, jak sestrojit bod L, pokud je střed O nedostupný, jak nanést danou délku na kružnici, zmiňuje se o možnosti trisekce úhlu a počítá relativní chyby aproximace pro oblouky jednotkové kružnice odpovídající středovým úhlům $10°$, $20°$, …, $90°$. Pro jejich výpočet je vhodné určit délku úsečky AP v závislosti na délce oblouku $\widehat{AB}$, tj. na ω. Pro nalezenou hodnotu $m = \frac{2}{3}$ je

$$|AP| = \tfrac{3}{2}|AL| = 3\sin\tfrac{\alpha}{2}. \tag{14}$$

Vyjádření α v závislosti na ω vyvodil autor ze vztahu (8), v němž za m dosadil $\frac{2}{3}$, tj. ze vztahu

$$\sin(\omega - \alpha) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha.$$

Užitím vzorce pro sinus rozdílu úhlů na levé straně rovnosti lze dospět po jednoduchých úpravách ke vztahu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\omega}{\cos\omega + \frac{1}{2}}. \tag{15}$$

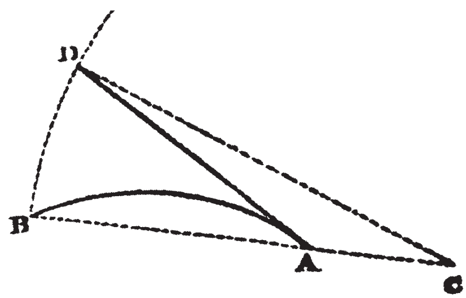
Předpis pro $|AP|$ v závislosti na ω autor neuvádí, pro konkrétní hodnotu ω nejprve vypočetl odpovídající hodnotu α podle vztahu (15), kterou posléze dosadil do (14). Jím vypočtené odchylky od přesné hodnoty jsou menší než 0,006 4 pro oblouky se středovým úhlem menším než $\frac{\pi}{2}$. Poznamenejme, že užitím analytické geometrie lze dojít k poměrně komplikovanému předpisu pro výpočet délky úsečky přibližně rektifikující daný oblouk závislé jen na ω:

$$\begin{aligned} |AP| &= \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{2\cos\omega + 1}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}}} = \\ &= \frac{3\sqrt{2}\sin\omega}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}\left(2\cos\omega + 1 + \sqrt{5 + 4\cos\omega}\right)} \end{aligned} \tag{16}$$

Rankinovy rektifikace

Stavební inženýr a fyzik, W. J. Macquorn Rankine (1820–1872) zveřejnil v roce 1867 dvě konstrukce úsečky, která přibližně rektifikuje daný oblouk AB. První konstrukci **(rekR1)** uvedl jako dodatek k práci [16], v níž řeší opačný problém – sestrojení kruhového oblouku dané délky. Uveďme popis jeho konstrukce.

Na tětivě AB prodloužené za bod A je vyznačen bod C tak, že $|AC| = \frac{1}{2}|AB|$ (viz obrázek). Z bodu C se opíše kružnice o poloměru $|CB| = \frac{3}{2}|AB|$. Ta protne tečnu sestrojenou v bodě A k oblouku AB v bodě D, který náleží stejné polorovině jako oblouk AB. Úsečka AD přibližně rektifikuje oblouk AB.



(Převzato z [16], str. 286, fig. 3, a upraveno)

Délku úsečky AD vypočteme z trojúhelníku ACD. Středový úhel $\sphericalangle ASB$, kde S je středem kružnice, jíž náleží oblouk AB, je úhlem proti základně v rovnoramenném trojúhelníku ABS s rameny jednotkové délky. Označme $|\sphericalangle ASB| = \varphi$, pak je $|AB| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, a proto

$$|AC| = \sin\tfrac{\varphi}{2}, \qquad |CD| = 3\sin\tfrac{\varphi}{2}.$$

Velikost úhlů při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABS je rovna $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. Vzhledem k tomu, že přímka AD je tečnou k oblouku AB v bodě A, tj. přímka AD je kolmá na rameno AS, platí $|\sphericalangle BAD| = \frac{\varphi}{2}$. Úhly $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle DAC$ jsou vedlejší, proto $|\sphericalangle DAC| = \pi - \frac{\varphi}{2}$. V trojúhelníku ACD nyní známe délky dvou stran a velikost jednoho úhlu. Užitím kosinové věty dostáváme vztah pro neznámou délku úsečky AD:

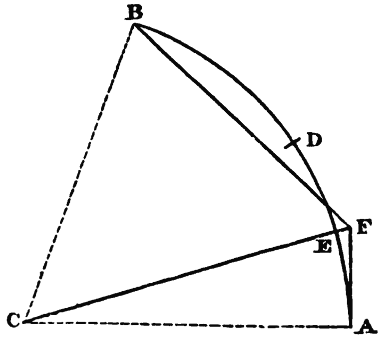
$$(3\sin\tfrac{\varphi}{2})^2 = \sin^2\tfrac{\varphi}{2} + |AD|^2 - 2|AD|\sin\tfrac{\varphi}{2}\cos(\pi - \tfrac{\varphi}{2})$$

Po úpravách má předchozí vztah tvar

$$|AD| = \sin\tfrac{\varphi}{2}\left(\sqrt{8+\cos^2\tfrac{\varphi}{2}} - \cos\tfrac{\varphi}{2}\right), \tag{17}$$

s jehož pomocí již snadno vypočteme chyby aproximace oblouku AB.

Druhá Rankinova konstrukce **(rekR2)** spočívá v rozdělení středového úhlu $\sphericalangle ACB$ na čtvrtiny. Označme D střed oblouku AB a E střed oblouku AD (viz obrázek). Nechť je F průsečík přímky CE s tečnou sestrojenou v bodě A k oblouku AB. Součet $|AF| + |FB|$ udává přibližnou délku oblouku AB.



(Převzato z [17], str. 381)

Označme opět φ velikost středového úhlu $\sphericalangle ACB$ příslušného oblouku AB. Podle konstrukce je $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle ACF| = \frac{\varphi}{4}$. V pravoúhlém trojúhelníku CAF proto platí

$$|AF| = \operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{4}, \qquad |CF| = \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{4}},$$

vezmeme-li délku úsečky AC jako jednotkovou délku. Zbývá určit délku úsečky FB. Na trojúhelník BCF použijeme kosinovou větu, neboť známe délky dvou jeho stran ($|CF|$ a $|CB| = 1$) a velikost úhlu $\sphericalangle BCF$, $|\sphericalangle BCF| = \frac{3}{4}\varphi$:

$$|BF|^2 = 1 + \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{4}} - \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{4}}\cos\tfrac{3}{4}\varphi$$

Úpravami pravé strany předchozího vztahu získáme

$$|BF|^2 = \mathrm{tg}^2 \tfrac{\varphi}{4} \left(8 \cos^2 \tfrac{\varphi}{4} + 1\right).$$

Součet

$$|AF| + |FB| = \mathrm{tg}\, \tfrac{\varphi}{4} \left(1 + \sqrt{8 \cos^2 \tfrac{\varphi}{4} + 1}\right) \tag{18}$$

je o něco větší než velikost oblouku AB, který přibližně rektifikuje.

V dodatku k práci [17], str. 382, připomíná, že první konstrukce **(rekR1)** dává úsečku, jejíž délka je menší než rektifikovaný oblouk. Obě konstrukce vhodně zkombinoval tak, aby výsledná chyba byla ještě menší. Ke čtyřem pětinám úsečky získané konstrukcí **(rekR2)** přidal pětinu úsečky sestrojené podle **(rekR1)**. K takovému dělení úseček dospěl úvahami o chybách aproximací vypočtených z rozvojů funkcí na pravých stranách vztahů (17) a (18).

Obě konstrukce jsou popsány také např. na str. 28 Rankinovy knihy *A Manual of Machinery and Millwork*, Charles Griffin and Company, London, 1869, a na str. 113 Cremonovy práce *Graphical statics*, Claredon Press, Oxford, 1890.

— — —

Rektifikace pomocí známých přibližných hodnot π

Rektifikace kruhového oblouku a kvadratura kruhu jsou, jak věděli již řečtí matematikové, ekvivalentní problémy. Od starověku se objevují snahy o nalezení hodnoty co možná nejpřesněji nahrazující hodnotu π.[9]

Připomeňme, že iracionalitu čísla π poprvé dokázal J. H. Lambert roku 1767 a jeho transcendenci F. Lindemann (1852–1939) v roce 1882. Lambertův důkaz iraciontality čísla π je srozumitelně vysvětlen v článku Žáčková J., *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla* π, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **11**(1966), č. 4, str. 240–250. Poznamenejme ještě, že A. Legendre (1752–1833) v Lambertově postupu doplnil důkaz iracionality určitých řetězových zlomků a dokázal, že π^2 je také iracionální. Jiným způsobem dokázal iracionalitu π a π^2 Ch. Hermite (1822–1901) v příspěvcích *Extrait d'une lettre de Monsieur Ch. Hermite à Monsieur Paul Gordan*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **74**(1873), str. 303–311, a *Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite à Mr. Borchardt*, tamtéž, str. 342–344. V práci *Sur la fonction exponentielle*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **77**(1873), str. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293, dokázal, že číslo e je transcendentní. Hermiteovy výsledky se staly základem Lindemannovy práce *Ueber die Zahl* π, Mathematische Annalen **20**(1882), str. 213–225, resp. *Über die Ludolph'sche Zahl*, Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1882), str. 679–682, v nichž je dokázána transcendence π.[10]

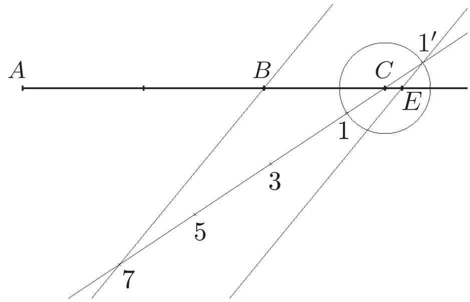
---

[9] Viz [1].

[10] Důkazy iracionality a transcendence e a π viz 8. kapitola [24], str. 317–340. Přístupnější formou je důkaz proveden např. v Mayer S., *The Transcendence of* π, 2006 (dostupné z http://sixthform.info/maths/files/pitrans.pdf), Dörrie H., *Triumph der Mathematik*, ka-

Z mnoha aproximací hodnoty π jsou níže uvedeny pouze takové, jež se uplatnily v přibližných rektifikacích obvodu kružnice uvedených J. Sobotkou v [S36]. Navíc jsou popsány konstrukce našich autorů – Tilšerova, Šrůtkova, Pleskotova a Jarolímkova rektifikace.[11]

Pro grafické vyjádření obvodu kružnice uvažuje J. Sobotka v odstavci 438 na str. 610 knihy [S36] jako přibližnou hodnotu π nejprve $3\,\frac{1}{7}$. Již Archimedes v práci *Měření kruhu* dokázal, že je tato hodnota větší než π. Úsečka takové délky se snadno sestrojí **(rekπA)**. Na obrázku je $|AE|$ aproximací poloviny obvodu kružnice s průměrem AB, chyba této aproximace je menší než 0,001 3.



Přesnějšího přiblížení se dosáhne, pokud se za přibližnou hodnotu π vezme

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}.$$

J. Sobotka vysvětluje na str. 611 práce [S36], jak užitím této hodnoty[12] sestrojit **(rekπČ)** úsečku, jejíž délka je přibližně rovna délce obvodu kružnice s průměrem AB. Označme j délku zvolené jednotky. Nechť C a D jsou body vhodně zvolené polopřímky s počátkem v bodě A takové, že $|AC| = 16j$ a $|AD| = 7|AC| + j$ (viz obrázek). Pak rovnoběžka s přímkou BD vedená bodem C protne průměr AB v bodě E tak, že

$$|AE| = \frac{16}{7 \cdot 16 + 1}|AB| = \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}|AB|.$$

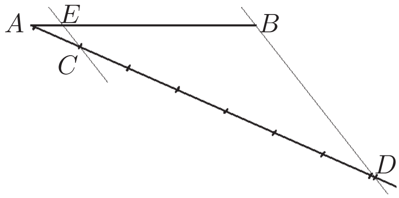
Obvod kružnice s průměrem AB je přibližně dán úsečkou, která je grafickým součtem úsečky AE a tří průměrů AB. Chyba je menší než 0,000 000 3.

---

pitola 25 *Transzendenzsatz von Hermite-Lindemann*, str. 128–137, Ferdinand Hirt, Breslau, 1933, kde je uveden důkaz podle Weber H., *Lehrbuch der Algebra*, Friedrich Vieweg, Braunschweig, 1896 (25. oddíl, str. 751–759). Transcendenci čísla π populárně objasňuje Beckmann P., *Historie čísla* π, kapitola 16 *Transcendence* π, str. 137–142, Academia, Praha, 1998.

[11] V [24], str. 311, je k hodnotě $\pi \doteq 3 + \frac{\cos 15^\circ + 0{,}45}{10}$ uveden tento odkaz: „Jičinsky, s. Studnicka, Véstnik VIII, Nr. 6, p. 305". Příslušný příspěvek se mně ve *Věstníku* nepodařilo najít. Z dalších našich autorů jmenujme Otakara Lemingera, jehož geometrické aproximace hodnoty π pomocí $\sqrt{5}$ jsou popsány v dodatku k práci [4].

[12] V Evropě je objev aproximace π hodnotou $\frac{355}{113}$ (tj. čínskou „přesnou hodnotou" π) připisován Adrianu Anthoniszovi (1527–1607) známému též jako Metius. Viz [18], str. 219.

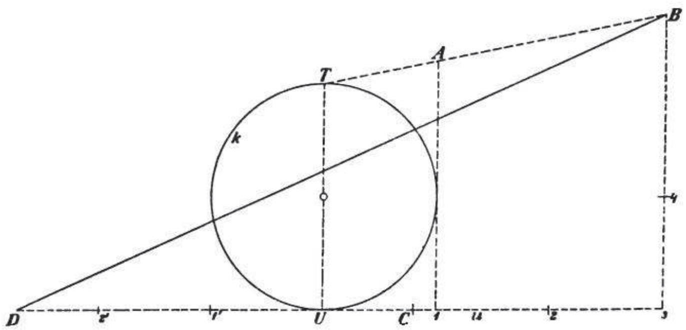


Odlišnou konstrukci úsečky délky $\frac{355}{113}$ provedl Jakob de Gelder (1797–1872) v práci uveřejněné v Grunert Archiv der Mathematik **7**(1849), str. 98.[13] T. Hughes je autorem další geometrické rektifikace čínské hodnoty π. Jeho konstrukce byla zveřejněna v příspěvku *A Triangle that gives the Area and Circumference of any Circle, and the Diameter of a Circle equal in Area to any given Square*, Nature **93**(1914), str. 110.[14]

V odstavci 440 popisuje J. Sobotka další konstrukci **(rekπSo)** přibližné délky obvodu kružnice k o poloměru r. Vede k úsečce, která je $0{,}26\sqrt{146}$-násobkem jejího průměru. Předesílá, že konstrukci *lze jednoduchou a poměrně krátkou cestou provésti*, uvážíme-li že

$$0{,}26\sqrt{146} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{25}\sqrt{5^2 + 11^2}.$$

V krajním bodě U nějakého průměru UT dané kružnice k o poloměru r je sestrojena tečna u (viz obrázek). V jednom směru je na ní nanesen poloměr r dvakrát ($|U1'| = |1'2'| = r$), ve druhém třikrát ($|U1| = |12| = |23| = r$). Dále jsou body 1 a 3 vedeny rovnoběžky s UT, přičemž na druhé z nich je vyznačen bod 4 tak, že $|34| = r$. Rovnoběžka s $2'4$ vedená bodem T protne sestrojené přímky v bodech A a B. Označme C bod tečny u, pro který platí $|C3| = |A1|$. Rovnoběžka s $C4$ vedená bodem B protne tečnu u v bodě D. Úsečka BD odpovídá přibližně obvodu kružnice k.



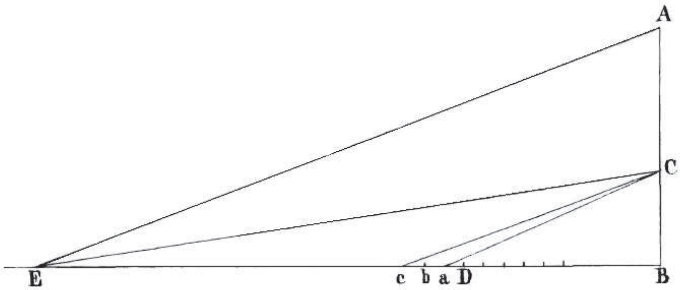
(Převzato z [S36], str. 613, obr. 468)

V předchozí konstrukci jsou trojúhelníky $D3B$ a $C34$ podobné. Pro výpočet $|BD|$ je třeba nejprve určit $|B3|$ a $|C4|$. Trojúhelníky $2'34$, TA_0A, TB_0B, kde A_0, resp. B_0 jsou paty kolmice z T na $1A$, resp. $3B$, jsou dle konstrukce také

[13] Viz např. [24], str. 310, [18], str. 227, [3], str. 34, [1], str. 404–405, [9], str. 22.
[14] Viz [18], str. 282, [1], str. 304.

podobné. Snadno se zjistí, že $|AA_0| = \frac{1}{5}r$, $|BB_0| = \frac{3}{5}r$, a tedy $|1A| = \frac{11}{5}r$ a $|B3| = \frac{13}{5}r$. Vzhledem k tomu, že $|3C| = |1A|$, lze stanovit délku přepony $C4$, $|C4|^2 = r^2(1 + (\frac{11}{5})^2)$, a tím i $|BD|$.

V historických poznámkách na str. 642 v [S36] J. Sobotka připomíná, že aproximaci $\pi \doteq 0{,}26\sqrt{146}$ a příslušnou přibližnou rektifikaci **(rekπSp)** kružnice uveřejnil už C. G. Specht. Dodejme, že tak učinil v příspěvku *Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **3**(1828), str. 83. Spechtova konstrukce je odlišná od Sobotkovy. Na jednom rameni pravého úhlu s vrcholem B je vyznačen bod C tak, že jeho vzdálenost od bodu B je rovna poloměru r kružnice (viz obrázek). Na druhém rameni je vyznačen bod D tak, že $|BD| = 2r$ a body a, b, c, pro něž $|Da| = |ab| = |bc| = \frac{r}{5}$. Na polopřímce BC je sestrojen bod A tak, že $|BA| = |Ca|$. Nakonec se bodem A vede rovnoběžka s přímkou Cc, která na rameni BD určí bod E, jehož vzdálenost od bodu B udává přibližně délku obvodu kružnice.[15]



(Převzato z [20], Taf. I za str. 100, Fig. 13)

Poznamenejme, že ve stejném časopise publikoval C. G. Specht na str. 405–406 ještě v témž roce další konstrukci (*Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges*) vycházející z aproximace 2π hodnotou

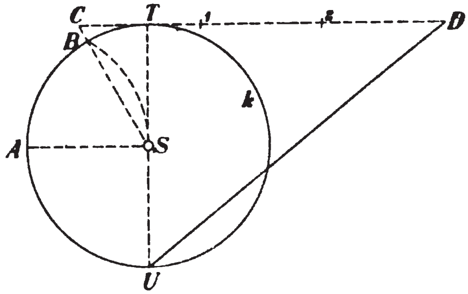
$$\frac{5\sqrt{3^2 + 6^2 + 13^2 + 15^2}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 13^2 + 8^2}} = 5\sqrt{\frac{439}{278}}.$$

Kochańského rektifikace (rekπK)

Z pěti přibližných rektifikací uvedených J. Sobotkou v poslední kapitole monografie [S36] jsme dosud neuvedli Kochańského rektifikaci. Známou konstrukci provádí Sobotka následovně. V dané kružnici k se středem S a poloměrem r zvolí nějaký průměr UT a k němu kolmý poloměr SA (viz obrázek). Označme B takový bod oblouku AB, pro nějž je $|AB| = r$. Sestrojme tečnu ke kružnici k v bodě T. Přímka SB ji protne v bodě C. Na polopřímce CT vyznačme bod

[15] Tuto rektifikaci popisuje např. Václav Hübner (1856–1937) v příspěvku *Rozmanitosti*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **44**(1915), str. 101–102.

D tak, aby $|CD| = 3r$. Úsečka UD určuje přibližnou délku poloviny obvodu kružnice.[16]



(Převzato z [S36], str. 612, obr. 467)

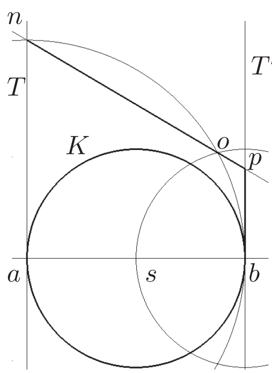
Z konstrukce plyne, že $|\sphericalangle BST| = 30°$, a tedy $|CT| = |TS| \cdot \operatorname{tg} 30°$. Délka úsečky UD se snadno vypočte z pravoúhlého trojúhelníka UDT:

$$|UD|^2 = 4r^2 + \left(3 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 r^2 = \left(\tfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}\right) r^2$$

Tilšerova rektifikace (rekπT)

Jedním z našich matematiků, kteří se zabývali přibližnou rektifikací kruhového oblouku, byl František Tilšer. Na str. 40 práce [22] vydané 1870 popsal dva způsoby rektifikace kružnice. Uveďme druhý z nich, který byl dle [21], str. 84, v té době nejužívanější konstrukcí.[17]

V dané kružnici K se středem s vyznačme nějaký její průměr ab (viz obrázek). V bodech a, b sestrojme tečny T, T'. Označme n průsečík tečny T s kružnicí se středem a a poloměrem ab a o bod poloroviny abn, který je průsečíkem této kružnice s kružnicí se středem v bodě b a poloměrem bs. Přímka no protíná T' v bodě p. Součet délek úseček np a pb je přibližně roven polovině obvodu kružnice K.



Zjistěme nyní hodnotu součtu $|np| + |pb|$. Zavedeme-li soustavu souřadnic tak, že $a = [0, 0]$, $b = [2, 0]$, bude pro průsečík o kružnice $x^2 + y^2 = 4$ se středem v bodě a a kružnice $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ se středem v bodě b platit $o = [\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}]$. Snadno se

[16] Kochańského rektifikace je popsána např. v odstavci 245 na str. 493 učebnice [7], v řešení úlohy 15.7 na str. 16 učebnice [23], v odstavci 7,6,1 na str. 95 učebnice [2], na str. 45 učebnice Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu reálek*, Praha, 1911 (na str. 32 v 6. vyd. 1933), na str. 53–54 publikace [4], ale také v učebním textu Veselý J., *Matematická analýza pro učitele*, první díl, Matfyzpress, Praha, 2. vyd., 2001, na str. 9.

[17] Tilšerovu rektifikaci připomíná V. Hübner v příspěvku *Rektifikace kružnice* publikovaném v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky **45**(1916), str. 103–104.

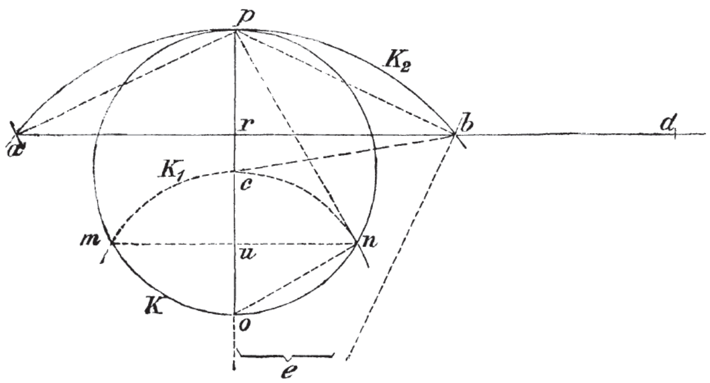
určí bod p jako společný bod přímky no o rovnici $(8-\sqrt{15})x+7y-14=0$ a tečny T', pro niž je $x=2$. Po jednoduchém výpočtu dostaneme $p=[2, \frac{2}{7}(\sqrt{15}-1)]$. Odtud je

$$
\begin{aligned}
|np|+|pb| &= \tfrac{2}{7}(4\sqrt{8-\sqrt{15}}+\sqrt{15}-1) = \\
&= \tfrac{2}{7}(4\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{15}-1)^2}+\sqrt{15}-1) = \\
&= \tfrac{2}{7}(\sqrt{15}-1)(2\sqrt{2}+1) \doteq \pi.
\end{aligned}
$$

Šrůtkova rektifikace (rekπŠ)

Jan Šrůtek publikoval roku 1892 v práci [21] tři konstrukce (v závislosti na délce poloměru rektifikované kružnice) opírající se o sestrojení úseček délek $\sqrt{10}$ a $\sqrt{39}$, což jsou známé aproximace π a 2π. Následující konstrukci doporučil pro oblouky kružnic s malým poloměrem.

Nechť je dána kružnice K se středem c a jednotkovým poloměrem (viz obrázek). Vezměme krajní bod o nějakého průměru op kružnice K za střed kružnice K_1 s poloměrem 1 a kružnice K_2 s poloměrem 2. Označme m, n průsečíky kružnic K a K_1. Kružnice se středem v bodě p a poloměrem délky $|mn|$ se s kružnicí K_2 protne v bodech a, b. Označme ještě r střed úsečky ab a d bod polopřímky ab takový, že $|bd|=|bc|$. Úsečka rd představuje přibližně polovinu obvodu kružnice K.



(Převzato z [21], str. 84, obr. 1)

Vypočtěme délku úsečky rd. Délka tětivy mn je rovna dvojnásobku výšky v rovnostranném trojúhelníku onc, resp. omc, tj. $|mn|=\sqrt{3}$, z konstrukce plyne, že je též $|pb|=\sqrt{3}$. Z Eukleidovy věty o odvěsně použité na pravoúhlý trojúhelník pbe získáme $|pr|=\frac{3}{4}$. Odtud již snadno vypočteme $|rb|=\frac{\sqrt{39}}{4}$. Zbývá určit délku úsečky bd. Protože $|bd|=|bc|$, je

$$|bd|^2=(1-|pr|)^2+|rb|^2,$$

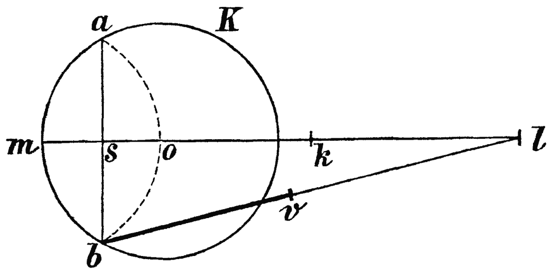
a tedy $|bd|=\frac{1}{2}\sqrt{10}$. Úsečka rb délky $\frac{\sqrt{39}}{4}$ i úsečka $|bd|=\frac{\sqrt{10}}{2}$ aproximují $\frac{\pi}{2}$. Jejich součet tudíž udává přibližně délku poloviny obvodu jednotkové kružnice.

Pleskotovy rektifikace čtvrtkružnice (rekπP1)

Rok po Šrůtkových konstrukcích, tj. roku 1893, byla rovněž v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky zveřejněna Pleskotova rektifikace kruhového oblouku příslušného středovému úhlu $\frac{\pi}{2}$. Stejnou konstrukci publikoval A. Pleskot v r. 1895 v časopise Journal de Mathématiques élémentaires (viz [13]).

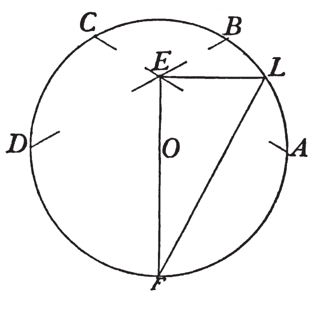
Uvažujme opět jednotkovou kružnici K se středem o (viz obrázek). Jednotková kružnice se středem v bodě m, který je koncovým bodem nějakého průměru km, protíná danou kružnici v bodech a, b. Tětiva ab má s průměrem km společný bod s. Označme l takový bod polopřímky mk, že $|sl| = 2|ab|$. Grafický rozdíl úsečky lb a průměru kružnice K dává úsečku, jejíž délka je přibližně $\frac{\pi}{2}$.

Úsečka sb je výškou v rovnostranném trojúhelníku omb, je tedy $|sb| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Délka úsečky sl je dle konstrukce dvojnásobkem $|ab|$, proto $|sl| = 2\sqrt{3}$. Z pravoúhlého trojúhelníku lsb se vypočte $|lb| = \frac{\sqrt{51}}{2}$, a tedy $\frac{\sqrt{51}}{2} - 2$ je délka úsečky, která aproximuje $\frac{\pi}{2}$.[18]



(Převzato z [12], str. 153, a upraveno)

Jinou rektifikaci **(rekπP2)** čtvrtkružnice prezentoval A. Pleskot v roce 1914 na str. 307 příspěvku [14] jako jistý dodatek k rektifikaci kruhového oblouku, jíž jsme se věnovali v předchozí části.



(Převzato z [14], str. 308, obr. 2)

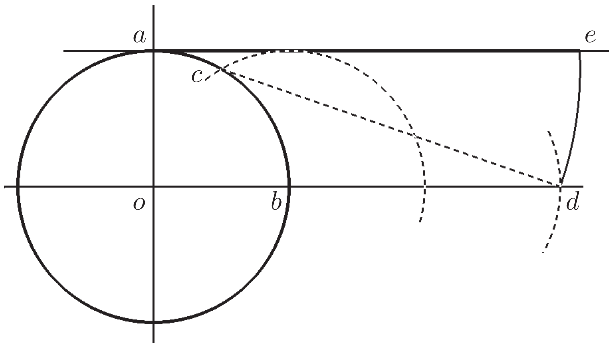
[18] Pleskotovu přibližnou hodnotu čísla π zveřejněnou v [13] cituje např. T. Vahlen v [24], str. 311, É. Lemoine v [8], str. 137, 142–143.

Bod E je těžištěm rovnostranného trojúhelníku OBC se stranou délky r, je tudíž $|EO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{3} r$. Úsečka OF je poloměrem dané kružnice, proto $|EF| = (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}) r \doteq \frac{\pi}{2} r$.

Jarolímkova rektifikace (rekπJ)

Z našich autorů uveďme ještě V. Jarolímka, který se svou konstrukcí publikovanou roku 1911 rovněž zúčastnil „závodu o nejpřesnější π“.[19]

V dané kružnici se středem o a poloměrem délky r (zachováno Jarolímkovo značení) vyznačme nějaký její průměr (viz obrázek). V bodě o a v bodě a, který je jedním z krajních bodů průměru, sestrojíme kolmice k oa. Nechť b je průsečík dané kružnice s kolmicí vztyčenou v bodě o, c bod dané kružnice, přičemž $|bc| = r$, a d bod ob, pro nějž $|od| = 3r$. Označme e průsečík kolmice vztyčené v bodě a s kružnicí se středem v bodě c a poloměrem cd, který leží v polorovině aob. Úsečka ae přibližně rektifikuje polovinu obvodu dané kružnice.



Délku úsečky ae vypočteme užitím analytické geometrie. Zvolme $o = [0,0]$ a $a = [0,1]$, pak $b = [1,0]$, $c = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $d = [3,0]$. První souřadnici společného bodu kružnice se středem c a poloměrem cd,

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = (3 - \tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2,$$

[19] J. Šrůtek v [21] na str. 84 poznamenává k odchylce π od jím nalezené rektifikace, která činí 0,000 79 . . . :

> *U konstrukce až dosud nejvíce užívané (viz Tilšer, Soustava deskript. geometrie, pag. 40. Konstrukce druhá.) jest tento rozdíl* . . . 0,000 97 . . .

O rok později píše A. Pleskot v [12] na str. 152

> *V předešlém ročníku (str. 83–88) uvedeny jsou některé konstrukce, týkající se rektifikace kruhu. Při kruhu, jehož poloměr jest* 1, *činí chyba pro polovinu obvodu* $0 \cdot 000\,79$ *a tedy pro celý obvod již více než* $0 \cdot 001$. *Nalezl jsem velmi jednoduchou konstrukci, při níž chyba pro celý obvod činí méně než* $0 \cdot 000\,4$ *poloměru.*

V. Jarolímek v [6] na str. 257 podotýká:

> . . . *Proto může naše konstrukce dobře konkurovati s obvyklými (prof. Tilšer, Desk. geom. p. 40., prof. Šrůtek, Čas. math. XXI., 83, prof. Pleskot, Čas. math. XXII., 152 a j.), ježto mnohé z nich svou jednoduchostí i předčí.*

a kolmice vztyčené v bodě a, $y = 1$, tj. první souřadnici bodu e, snadno vypočteme z příslušné soustavy:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{7-4\sqrt{3}}{4} = 7$$
$$|x - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{21 + 4\sqrt{3}}$$

Bod e náleží polorovině aob, jeho x-ová souřadnice je tudíž rovna

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21 + 4\sqrt{3}},$$

což je zároveň délka úsečky ae, a tedy přibližná hodnota π.[20]

Srovnání

Na předchozích stranách jsme popsali řadu konstrukcí úsečky, jejíž délka se přibližně rovná délce daného oblouku kružnice. Chceme-li je mezi sebou porovnat, nabízí se předně jejich srovnání podle relativní odchylky od skutečné délky oblouku kružnice.

Uvažujme nejprve úsečky AX získané rektifikacemi kruhového oblouku $\widehat{AB}$, tj. konstrukcemi rekS1, rekS2, rekP, rekO, rekR1, rekR2. Z následující tabulky jsou patrné odchylky a relativní odchylky délek těchto úseček vypočtených podle předpisů $(*)$ – rekS1, rekP, $(\diamond)$ – rekS2, (14) a (15), resp. (16) – rekO, (17) – rekR1, (18) – rekR2 od délky oblouku jednotkové kružnice příslušného středovému úhlu $\sphericalangle ASB$ pro $|\sphericalangle ASB| = 0{,}3$ (0,6, 0,9 a 1,2) rad., tj. hodnoty $|\widehat{AB}| - |AX|$ a $\frac{|\widehat{AB}| - |AX|}{|\widehat{AB}|}$ pro $|\widehat{AB}| = 0{,}3$ (0,6, 0,9 a 1,2) jednotek. (Odchylky $|\widehat{AB}| - |AX|$ jsou v tabulce uvedeny vždy v prvním řádku pro každou konstrukci, relativní odchylky $\frac{|\widehat{AB}| - |AX|}{|\widehat{AB}|}$ na druhém řádku jsou v procentech. Záporné hodnoty se vyskytují v případech, kdy konstrukce vede k úsečce delší než je aproximovaný oblouk.)

	$\lvert\widehat{AB}\rvert$ ($\lvert\sphericalangle ASB\rvert$ ve °)			
Rektifikace	0,3 (17°11,3’)	0,6 (34°22,6’)	0,9 (51°34’)	1,2 (68°45,3’)
rekS1, rekP	0,000 013 645 0,004 548 %	0,000 450 902 0,075 150 %	0,003 611 614 0,401 290 %	0,016 387 038 1,365 586 %
rekS2	0,000 000 105 0,000 035 %	0,000 013 908 0,002 317 %	0,000 250 853 0,027 873 %	0,002 031 21 0,169 268 %
rekO	−0,000 001 505 −0,000 502 %	−0,000 048 68 −0,008 113 %	−0,000 375 938 −0,041 771 %	−0,001 618 863 −0,134 905 %
rekR1	0,000 002 254 0,000 751 %	0,000 072 507 0,012 085 %	0,000 555 253 0,061 695 %	0,002 365 974 0,197 165 %
rekR2	−0,000 000 563 −0,000 188 %	−0,000 018 162 −0,003 027 %	−0,000 139 495 −0,015 499 %	−0,000 597 41 −0,049 784 %

[20] V Jarolímkově výpočtu na str. 257 vypadl v předchozím součtu sčítanec $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{r}{2}$.

Z tabulky je patrné, že pro oblouky příslušné menším středovým úhlům (do 35°) je nejpřesnější Sobotkou upravená Kusánského rektifikace rekS2. S rostoucím středovým úhlem však tato konstrukce dává čím dál, tím horší výsledky. Už pro středový úhel cca 39,1° je přesnější Rankinova konstrukce rekR2, pro středové úhly větší než cca 62,13° d'Ocagneova konstrukce rekO a pro středové úhly nad 73,4° je konstrukce rekS2 druhá nejhorší. Už od nejmenších středových úhlů za ostatními konstrukcemi v přesnosti výrazně zaostává sestrojení úseček AX podle rekS1. I přesto je pro praktické účely pro malé středové úhly dostačující, uvážíme-li, že pro kruhový oblouk o poloměru 1 km příslušný středovému úhlu 34° je chyba menší než 45 cm.

Další tabulkou jsou porovnány odchylky různých aproximací π od jeho „skutečné" hodnoty, tj. rozdíly $\pi - |AX|$, kde AX je úsečka přibližně rektifikující půlkružnici jednotkové kružnice. (Záporné hodnoty opět naznačují, že délka sestrojené úsečky je větší než hodnota π.)

Rektifikace	$\lvert AX\rvert$	$\pi - \lvert AX\rvert$
rekπA	$3\,\frac{1}{7}$	−0,001 264 489
rekπČ	$\frac{355}{113}$	−0,000 000 267
rekπSo, rekπ Sp	$0,26\sqrt{146}$	0,000 000 7
rekπK	$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	0,000 059 315
rekπT	$\frac{2}{7}(\sqrt{15} - 1)(2\sqrt{2} + 1)$	−0,000 980 881
rekπŠ	$\frac{\sqrt{39}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{2}$	−0,000 795 676
rekπP1	$\sqrt{51} - 4$	0,000 164 225
rekπP2	$2\frac{\sqrt{3}}{3} + 2$	−0,013 107 885
rekπJ	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21 + 4\sqrt{3}}$	−0,000 764 402

Nejpřesněji polovinu jednotkové kružnice, tj. π aproximuje úsečka délky $\frac{355}{113}$. S ní srovnatelnou chybu má Sobotkova a Spechtova konstrukce rekπSo, rekπSp. Ostatní rektifikace jsou o několik řádů horší.

Porovnání konstrukcí pomocí odchylky či relativní odchylky od skutečné délky kruhového oblouku neumožňuje rozlišit vzájemně různé postupy pro sestrojení stejně dlouhé úsečky úsečky.[21] Určitou možnost, jak kvantitativně vyjádřit složitost geometrické konstrukce, nabídl Émile Lemoine (1840–1912) ve svých pracích o geometrografii[22] publikovaných v letech 1888 až 1902. Zkoumal složitost konstrukcí při použití pouze základních pomůcek (pravítko, kružítko) i při jejich rozšíření o další nástroje. Pro určení složitosti konstrukce pomocí

[21] Chyba aproximace je stejná pro Kusánského (rekS1) a Pleskotovou (rekP) přibližnou rektifikací oblouku kružnice, neboť v obou případech je oblouk nahrazen úsečkou délky $\frac{3r\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$. Nerozlišitelné mezi sebou jsou též Sobotkova (rekπSo) a Spechtova (rekπSp) přibližná rektifikace poloviny obvodu kružnice úsečkou délky $0{,}26\sqrt{146}r$.

[22] Jan Sobotka píše o geometrografii v odstavci 371 učebnice [S36] na str. 536–538.

geometrografie je nutné zjistit, kolik kterých úkonů (pravítkem a kružítkem) z následujících pěti bylo potřeba k jejímu provedení.

P_1 přiložení pravítka do daného bodu[23]

P_2 narýsování přímky pravítkem

K_1 umístění hrotu kružítka do daného bodu[24]

K_2 umístění kružítka do neurčeného bodu na přímce či kružnici

K_3 narýsování kružnice

Konstrukce je charakterizována výrazem

$$a_1P_1 + a_2P_2 + b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3,$$

kde např. a_2 znamená počet přímek narýsovaných pravítkem, podobně pro ostatní operace. Součet počtu všech úkonů, tj.

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + b_3,$$

je tzv. míra složitosti, součet $a_1 + b_1 + b_2$ se nazývá míra přesnosti.

Jiný seznam základních grafických operací, na něž je nutné rozložit zkoumanou konstrukci, uvedl např. E. Papperitz[25] v odstavci *9. Die Einfachheit graphischer Konstruktionen. Operationssysteme. Geometrographie* na str. 530 *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 3. Bd. (1. Teil, 1. Hälfte), Teubner, Lipsko, 1907–1910, a D. Grüttner, *Die Zerlegung geometrischer Zeichnungen in Konstruktionselemente und ihre Anwendung bei der Lösung von Aufgaben*, Zeitschrift für mathematischen und naturalwissenschaftlichen Unterricht **39**(1908), 256–261.[26]

Následující tabulka obsahuje počty základních operací podle Lemoineova systému. Dospěli jsme k nim za podmínky, že používáme pouze eukleidovské pravítko a kružítko, tj. veškeré kolmice i rovnoběžky[27] jsou sestrojeny eukleidovsky. K přenášení délek jsme použili kružítko, což je v rozporu s dovoleným

[23] Přiložení pravítka tak, aby procházelo dvěma body, odpovídá $2P_1$.

[24] Změření vzdálenosti dvou bodů kružítkem se uvažuje jako operace vyžadující dvě umístění hrotu kružítka, tj. $2K_1$.

[25] E. Papperitz rozdělil konstrukce do čtyř skupin:
A. (konstrukce nultého stupně) σ – narýsování libovolného bodu, ε – narýsování libovolné přímky, κ – narýsování libovolné kružnice;
B. (konstrukce prvního stupně) σ_1 – vyznačení libovolného bodu na dané čáře, ε_1 – narýsování libovolné přímky daným bodem nebo daným směrem, κ_1 – opsání libovolné kružnice z bodu dané čáry nebo daný bodem, μ – výměna nástrojů;
C. (konstrukce druhého stupně) σ_2 – nalezení průsečíku dvou daných čar, ε_2 – opsání libovolné kružnice z daného bodu nebo daným bodem z nějakého bodu dané čáry;
D. (konstrukce třetího stupně) κ_3 – opsání kružnice z daného bodu daným bodem. Pomocí nich definuje stupeň celé konstrukce a míru její jednoduchosti.

[26] Viz Hess A. L., na str. 2 *Certain Topics related to Constructions with Straightedge and Compasses*, Mathematics Magazine **29**(1956), str. 217–221.

[27] Konstrukce kolmice vztyčené v bodě A nějaké přímky a je charakterizovaná výrazem $3K_1 + 3K_3 + 2P_1 + P_2$ (umístění hrotu kružítka do bodu A – $1 \times K_1$, opsání kružnice k_1 se středem v bodě A libovolným poloměrem – $1 \times K_3$, konstrukce kružnic k_2, k_3 o libovolném stejném poloměru z průsečíků k_1 s a – $2\times K_1 + 2\times K_3$, přiložení pravítka k bodu A a průsečíku k_2 a k_3 – $2 \times P_1$, narýsování kolmice – P_2), rovnoběžka výrazem $6K_1 + 2K_3 + 2P_1 + P_2$.

použitím eukleidovského kružítka. Tím jsme však pro stejné konstrukce (uvedené zde a v [8], str. 144, resp. [11], str. 167) získali stejné charakteristiky. Veškeré dílčí konstrukce, které jsou součástí jednotlivých rektifikací, byly prováděny tak a v takovém pořadí, aby byla míra složitosti co nejmenší. Dále jsme u konstrukcí z první části tabulky předpokládali, že je v rovině narýsovaná kružnice, její střed a ramena středového úhlu, k němuž příslušný oblouk je třeba rektifikovat. V případě rektifikací čtvrtkružnice nebo půlkružnice vycházíme pouze z narýsované kružnice a jejího středu. Pokud je konstrukcí popsanou v předchozím textu rektifikována pouze čtvrtkružnice, byly přidány další úkony vedoucí k sestrojení úsečky, která aproximuje polovinu obvodu dané kružnice.

	Charakteristika konstrukce	Míra složitosti	Míra přesnosti
rekS1	$6P_1 + 3P_2 + 6K_1 + 5K_3$	20	12
rekS2	$11P_1 + 6P_2 + 22K_1 + 15K_3$	54	33
rekP	$10P_1 + 5P_2 + 7K_1 + 6K_3$	28	17
rekO	$11P_1 + 6P_2 + 15K_1 + 6K_3$	38	26
rekR1	$6P_1 + 3P_2 + 9K_1 + 7K_3$	25	15
rekR2	$6P_1 + 3P_2 + 9K_1 + 8K_3$	26	15
rekπA	$4P_1 + 3P_2 + 13K_1 + 7K_3$	27	17
rekπČ	$4P_1 + 3P_2 + 26K_1 + 15K_3$	48	30
rekπSo	$11P_1 + 6P_2 + 31K_1 + 19K_3$	67	42
rekπSp	$8P_1 + 5P_2 + 27K_1 + 14K_3$	54	35
rekπK	$5P_1 + 3P_2 + 10K_1 + 9K_3$	27	15
rekπT	$7P_1 + 4P_2 + 12K_1 + 9K_3$	32	19
rekπŠ	$3P_1 + 2P_2 + 8K_1 + 4K_3$	17	11
rekπP1	$5P_1 + 3P_2 + 11K_1 + 5K_3$	24	16
rekπP2	$7P_1 + 4P_2 + 5K_1 + 3K_3$	19	12
rekπJ	$5P_1 + 3P_2 + 12K_1 + 9K_3$	29	17

Podle první části tabulky je geometrograficky nejvýhodnější rektifikací kruhového oblouku konstrukce rekS1. Nízkou mírou složitosti se vyznačují také Rankinovy konstrukce, které jsou navíc dle předchozího srovnání přesné i pro větší středové úhly.

Z rektifikací půlkružnic vychází nejlépe Šrůtkova konstrukce úsečky délky $\pi \doteq \frac{\sqrt{39}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{2}$ s poměrně dobrou přesností. S ní srovnatelné geometrografické hodnoty má rektifikace rekπP2, která je však značně nepřesná. Druhou nejvýhodnější konstrukcí poloviny obvodu kružnice se po uvážení přesnosti i geometrografické charakteristiky jeví rekπP1.

Z předchozí tabulky je patrné, že Sobotkovy přibližné rektifikace kruhového oblouku (rekS2) i půlkružnice (rekπSo) jsou nejsložitější a nejméně přesné. To může být dáno omezujícími prostředky (eukleidovské pravítko a kružítko) dovolenými pro jejich konstrukci.

Poznamenejme na závěr, že metoda geometrografie není dokonalá. Míra složitosti slučuje neslučitelné; např. narýsování libovolné přímky a umístění hrotu kružítka má „stejnou hodnotu“. Nepřihlíží se k tomu, jak daleko jsou body spojované přímkou, pod jakým úhlem se protínají přímky či kružnice, jejichž průsečík je nutný pro pokračování v konstrukci, jak uvádí v [S36] na str. 537–538 J. Sobotka. Některé z těchto nedostatků se snaží odstranit S. Mustonen v [9], když složitost geometrické konstrukce měří její přesností ze statistického hlediska. Podle něj přesnost závisí především na tom, jak přesně jsme schopni umístit pravítko nebo kružítko do daného bodu či průsečíku. Předpokládá, že v ostatních ohledech jsou konstrukce přesné. S. Mustonen vytvořil program GEOM fungující pod statistickým systémem Survo, který počítá přesnost konstrukcí podle různých statistických modelů a počítá rovněž geometrografickou charakteristiku. (Více o programu GEOM viz [9], str. 46.)

Závěr

Cílem této kapitoly bylo představit přibližné rektifikace kruhového oblouku, jimiž se zabýval J. Sobotka, a porovnat je s některými dalšími konstrukcemi. Řadu rektifikací oblouku kružnice i geometrických aproximací čísla π jsme ponechali bez povšimnutí. Jmenujme předně zajímavou konstrukci úsečky aproximující daný kruhový oblouk, již pro žáky středních škol popsal M. Lerch v příspěvku *Drobné úvahy*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **12**(1883), str. 87–89, Kühnovu konstrukci úsečky délky $\sqrt{2}+\sqrt{3} \doteq \pi$,[28] aproximaci π hodnotou $1{,}8+3\sqrt{0{,}2}$, kterou uvedl A. Kunze (*Lehrbuch der Planimetrie*, Jena, 2. vyd., 1851), G. Peirce v [11] nebo O. Leminger (*Dodatek* v práci [4], str. 60–101), Ramanujanovy konstrukce aproximací čísla π. Případnému zájemci lze doporučit např. [1], [24] nebo stručný přehled v [18].

LITERATURA

[1] Berggren L., Borwein J., Borwein P., *Pi: A Source Book*, Springer, New York, 3. vyd. 2004.

[2] Drábek K., Harant F., Setzer O., *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Alfa, Praha, 1979.

[3] Hobson E. W., *Squaring the Circle: A History of the Problem*, University Press, Cambridge, 1913.

[4] Hruška V., *Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace*, ed. Cesta k vědění, sv. 7, JČMF, Praha, 2. vyd. 1950.

[28] V [8], str. 137, je uveden odkaz na Novi Commentarii Academiae scientiarvum imperialis Petropolitanae **3**(1753).

[5] Christiani Hugenii, *De Circuli magnitudine inventa*, Elzevier, 1654.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://books.google.cz/books?id=ppU_AAAAcAAJ>.]

[6] Jarolímek V., *Drobnosti z planimetrie a mathem. zeměpisu*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **40**(1911), str. 257–264.
[Dostupné na World Wide Web: <http://dml.cz/dmlcz/122396>.]

[7] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptivní geometrie*, díl první a druhý, JČMF, Praha, 1929 a 1932.

[8] Lemoine É., *Note on Mr. George Peirce's Approximate Construction for π*, Bulletin of the American Mathematical Society **8**(1902), str. 137–148.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&
verb=Display&handle=euclid.bams/1183416850>.]

[9] Mustonen S., *Statistical Accuracy of Geometric Constructions*, 2008.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://www.survo.fi/papers/GeomAccuracy.pdf>.]

[10] D'Ocagne M., *Sur la rectification approchée des arcs de cercle*, Nouvelles Annales de Mathématiques **7**(1907), 4$^{\text{e}}$ série, str. 1–6.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://www.archive.org/stream/s4nouvellesannal07pari#page/n10/>.]

[11] Peirce G., *A New Approximate Construction for π*, Bulletin of the American Mathematical Society **13**(1907), str. 166–167.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&
verb=Display&handle=euclid.bams/1183419152>.]

[12] Pleskot A., *Poznámka k rektifikaci kruhu*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **22**(1893), str. 152–153.
[Dostupné na World Wide Web: <http://dml.cz/dmlcz/122042>.]

[13] Pleskot A., *Sur la rectification approchée du cercle*, Journal de Mathématiques élémentaires **4**(1895), 4$^{\text{e}}$ série, str. 125–126.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://www.archive.org/stream/s4journaldemathm04pari#page/125>.]

[14] Pleskot A., *O jisté úloze, která řeší přibližnou rektifikaci oblouku kruhového*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **43**(1914), str. 305–313.
[Dostupné na World Wide Web: <http://dml.cz/dmlcz/109247>.]

[15] Pleskot A., *Některé nové přibližné rektifikace oblouku kruhového*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **47**(1918), str. 193–203.
[Dostupné na World Wide Web: <http://dml.cz/dmlcz/122329>.]

[16] Rankine W. J. M., *On the approximate drawing of circular arcs of given lengths*, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Fourth Series, **34**(1867), no. 230, str. 284–286.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://books.google.cz/books?id=i1EEAAAAYAAJ&pg=PA284>.]

[17] Rankine W. J. M., *On the approximate rectification of circular arcs*, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Fourth Series, **34**(1867), no. 231, str. 381–382.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://books.google.cz/books?id=i1EEAAAAYAAJ&pg=PA381>.]

[18] Schepler H. C., *The Chronology of PI*, Mathematics Magazine **23**(1950), str. 165–170, 216–228, 279–283.

[19] Snelli Willebrordi, *Cyclometricvs*, Ex Officinâ Elzeviriana, 1621.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://books.google.cz/books?id=kZg_AAAAcAAJ&dq=
=cyclometricus>.]

[S36] Sobotka J., *Deskriptivní geometrie promítání parallelního.* Sborník Jednoty českých mathematiků, č. X. Jednota českých mathematiků a Česká Matice technická, Praha, 1906.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://www.archive.org/stream/deskriptivngeom00sobogoog>.]

[20] Specht C. G., *Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **3**(1828), Heft I, str. 83.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=
=PPN243919689_0003&DMDID=dmdlog9>.]

[21] Šrůtek J., *Nový způsob rektifikace čáry kruhové*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **21**(1892), str. 83–88.
[Dostupné na World Wide Web: <http://dml.cz/dmlcz/123511>.]

[22] Tilšer F., *Soustava deskriptivní geometrie*, díl prvý – text, Praha, 1870.

[23] Urban A., *Deskriptivní geometrie II*, SNTL a Alfa, Praha, 2. vyd., 1979

[24] Vahlen T., *Konstruktionen und Approximationen*, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1911.
[Dostupné na World Wide Web:
<http://www.archive.org/details/konstruktionenun00vahluoft>.]