Tři dodatky

In: Karel Mačák (author): Počátky počtu pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 106–109.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401663

Tři dodatky

D1. Elementární teorie pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti

Uvažujme pokus, který lze libovolněkrát opakovat za stále stejných podmínek. Všechny jeho možné výsledky tvoří množinu (náhodných) elementárních jevů M, o nichž předpokládáme, že jsou všechny stejně možné (tj. - jinak řečeno - stejně pravděpodobné (v jakémsi intuitivním smyslu)) a že v každém pokusu nastane právě jeden elementární jev. (Náhodným) jevem A nazýváme každou podmnožinu množiny elementárních jevů.

Obsahuje-li množina elementárních jevů celkem m elementárních jevů a jev $A \subseteq M$ obsahuje a elementárních jevů, pak pravděpodobnost jevu A značíme $P(A)$ a je rovna

$$P(A) = \frac{a}{m}$$

(někdy se říká: $P(A)$ je rovna poměru počtu případů příznivých ku počtu případů možných) [1].

Vlastnosti pravděpodobnosti

Dále uvedené vlastnosti lze snadno odvodit z klasické definice pravděpodobnosti. Protože náhodné jevy chápeme jako množiny, můžeme pro operace s nimi používat množinové symboliky.

1/ $0 \leq P(A) \leq 1$.

2/ $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$.

3/ Jsou-li jevy A, B disjunktní (tj. $A \cap B = \emptyset$), pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (Této vlastnosti se někdy říká věta o sčítání pravděpodobnosti; udává pravděpodobnost toho, že ze dvou disjunktních jevů nastane aspoň jeden.)

3.1 Důsledek 1.
Označme A^c doplněk jevu A. Pak $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3.2 Důsledek 2.
Nechť jevy A, B nejsou disjunktní. Pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

---

[1] Není to samozřejmě definice v matematickém smyslu, spíš jakési slovní vyjádření intuitivně chápaného pojmu.

4/ Považujeme-li za intuitivně jasný pojem nezávislosti náhodných jevů, pak pro nezávislé náhodné jevy A, B platí $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Této vlastnosti se někdy říká věta o násobení pravděpodobnosti; udává pravděpodobnost toho, že dva nezávislé jevy nastanou současně. Nezávislost náhodných jevů je ovšem třeba také definovat; jedna z možností spočívá v tom, že se jako nezávislé náhodné jevy definují právě ty jevy, pro jejichž pravděpodobnosti platí $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

STŘEDNÍ HODNOTA DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY

Intuitivně lze náhodnou veličinu chápat jako číselnou veličinu, která mění svou hodnotu působením náhodných vlivů (v závislosti na náhodě). Formálně lze definovat náhodnou veličinu jako reálnou funkci definovanou na množině elementárních jevů (a splňující navíc jisté předpoklady); pro náš výklad toto intuitivní pojetí postačí.

Náhodnou veličinu ξ nazýváme diskrétní, může-li nabývat pouze hodnot z nějaké spočetné množiny $\mathcal{M}$. Takovou náhodnou veličinu lze zadat pomocí pravděpodobnostní funkce $p_\xi(x)$, která je definována pro všechna $x \in \mathcal{M}$ vztahem

$$p_\xi(x) = P(\xi = x).$$

Poznamenejme, že podle definice pravděpodobnosti musí být

$$\sum_{x \in \mathcal{M}} p_\xi(x) = 1.$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny ξ se obvykle značí $E(\xi)$ a je definována vztahem

$$E(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{M}} x.p_\xi(x),$$

pokud je řada vpravo absolutně konvergentní.

D2. Bernoulliova věta

BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

Předpokládejme, že konáme sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností p; takto uspořádané sérii pokusů se někdy říká Bernoulliovo schéma. Označme ξ náhodnou veličinu, jejíž hodnota je rovna počtu výskytů jevu A v prováděné sérii n nezávislých pokusů. Snadno zjistíme, že pro její pravděpodobnostní funkci platí

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $k = 0, 1, ..., n$; o této náhodné veličině říkáme, že má binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti (nebo krátce: má binomické rozdělení).

Čebyševova nerovnost

Vzhledem k tomu, jakým způsobem Jakob Bernoulli dokazoval své tvrzení, považujeme za vhodné připomenout zde nerovnost, ze které se vychází při dokazování Bernoulliovy věty dnes [2]:

Nechť náhodná veličina ξ má střední hodnotu $E(\xi)$ a konečný rozptyl $var(\xi)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\xi)}{\varepsilon^2} \,.$$

Nerovnost nese jméno petrohradského matematika P.L.Čebyševa (1821 - 1894), který ji publikoval v r. 1867; jeho pravděpodobnostní práce jsou podrobně rozebrány v [2], str. 222 - 246.

Bernoulliova věta

Nechť m je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností p. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

D3. Poznámka k úloze o rozdělení sázky

Obecně lze úlohu o rozdělení sázky formulovat takto:

Nechť hráči $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her. Pravděpodobnost výhry hráče A_i v každé jednotlivé hře je rovna p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; pochopitelně $\sum p_i = 1$. Série

[2] Podrobnosti lze najít například v knížce Likeš, J. - Machek, J.: *Počet pravděpodobnosti.* SNTL Praha, 1982 (2. vyd. 1988), str. 131 - 132.

her je přerušena ve chvíli, kdy hráči A_i chybí do výhry a_i her, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jakou pravděpodobnost výhry celé série má hráč A_1 v případě dohrávání?

Označme tuto pravděpodobnost jako $P(1)$.

Má-li hráč A_1 vyhrát celou sérii, může být sehráno $a_1 + u_2 + \cdots + u_n$ her, kde $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$; přitom ale poslední hru musí vyhrát hráč A_1. V předešlých $a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1$ hrách musí hráč A_1 vyhrát právě $(a_1 - 1)$-krát, hráč A_2 právě u_2-krát, ... , hráč A_n právě u_n-krát; pravděpodobnost této situace je podle známého vztahu pro pravděpodobnostní funkci multinomického rozdělení rovna

$$\frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)! u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1 - 1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}.$$

Uvážíme-li nyní, že hráč A_1 musí ještě vyhrát poslední hru, což je jev, který nastane s pravděpodobností p_1, pak pravděpodobnost toho, že hráč A_1 vyhraje celou sérii právě v $a_1 + u_2 + \cdots + u_n$ hrách, je rovna

$$p_1 \frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)! u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1 - 1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}.$$

Uvážíme-li nakonec, že všechny (n - 1)-tice $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, pro které $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$ vytvářejí disjunktní jevy, dostáváme

$$P(1) = \sum \frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)! u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n},$$

kde sčítáme přes všechny (n - 1)-tice $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, pro které $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Domníváme se, že užití tohoto vzorce představuje asi nejjednodušší možný přístup k řešení úlohy o rozdělení sázky v obecné podobě.

Příklad

Použijeme našeho vzorce k řešení úlohy uvedené v Huygensovu spisu v *Propositio VII.* V našem značení to znamená $n = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$; aby bylo použití našeho vzorce zřetelnější, označíme $a_1 = 4$, $a_2 = 2$. Pak bude u_2 nabývat hodnot 0 nebo 1 a náš vzorec bude obsahovat dva sčítance

$$P(1) = \frac{3!}{3!\,0!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{4!}{3!\,1!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} = \frac{3}{16},$$

z čehož snadno plyne Huygensův výsledek.

♠ ♡ ◇ ♣