IV. část: Bernoulliova věta. Původní text závěrečné části Bernoulliova spisu „Ars conjectandi"

In: Karel Mačák (author): Počátky počtu pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 93–105.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401662

IV/2

Jakob Bernoulli:

Ars conjectandi

Pars quarta, Caput V

Kopie původního textu z exempláře uloženého
v Národní knihovně České republiky v Praze

obſervationes; quemadmodum capiendæ forent cum calculis, ſi numerus eorum in urna mutari ſupponeretur.

CAPUT V.

Solutio Problematis præcedentis.

Ut prolixæ rem demonſtrationis quâ licet brevitate & perſpicuitate expediam, conabor omnia reducere ad abſtractam Matheſin, depromendo ex illa ſequentia Lemmata, quibus oſtenſis cætera in nuda applicatione conſiſtent.

Lemma 1. Poſita ſerie quotlibet numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c. à nulla ſeu cifra naturali ſe conſequentium ordine, quorum extremus & maximus dicatur $r+s$, intermediorum quispiam r, & qui huic ex utraque parte proximè latus cingunt, $r+1$ & $r-1$: ſi continuetur porrò hæc ſeries, donec extimus terminus utcunque multiplex fiat numeri $r+s$, putà donec ſit $nr+ns$, atque in eadem ratione augeantur intermedius r, & ejus laterales $r+1$ & $r-1$; ſic ut eorum loco prodeant nr, $nr+n$ & $nr-n$, ipſaque ſeries initio poſita

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots r-1, r, r+1, \ldots\ldots\ldots r+s.$$

mutetur in hanc

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots nr-n \ldots nr \ldots\ldots nr+n \ldots\ldots\ldots nr+ns.$$

multiplicabuntur quidem hoc pacto termini ſeriei, tam illi qui medio nr & alterutri limitum $nr+n$ aut $nr-n$ interjacent, quàm illi qui inde à limitibus ad extimos uſque $nr+ns$ aut 0 porrò protenduntur: nunquam tamen (quantumvis magnus aſſumatur numerus n) numerus terminorum ultra limitem majorem $nr+n$ plusquam $s-1$; nec numerus terminorum ultra minorem $nr-n$ pluſquam $r-1$ vicibus ſuperabit numerum horum, qui intermedio nr & alterutro limitum $nr+n$ vel $nr-n$ ſunt concluſi. Nam facta ſubtractione patet, à limite majore ad terminum extremum $nr+ns$ eſſe intervallum terminorum $ns-n$; à limite minore ad alterum extremum 0 intervallum $nr-n$; & ab intermedio numero ad alterutrum limitem intervallum n terminorum. Eſt verò ſemper $ns-n . n :: s-1 . 1$; & $nr-n . n :: r-1 . 1$. Quare conſtat &c.

Lemm.

Lemm. 2. Omnis poteſtas integra alicujus binomii $r+s$ terminis exprimitur uno pluribus, quàm eſt unitatum numerus in poteſtatis indice. Nam Quadratum conſtat terminis tribus, Cubus 4, Biquadratum 5, & ita porrò, ut notum.

Lemm. 3. In qualibet poteſtate hujus binomii (ſaltem cujus index æqualis binomio $r+s = t$, aut ejus multiplex, putà $nr+ns = nt$) ſi terminum quempiam M nonnulli præcedant, alii ſequantur, & ſit numerus omnium præcedentium ad numerum omnium ſequentium reciprocè, ut s ad r, ſeu quod eodem redit, ſi in illo termino numeri dimenſionum literarum r & s directe ſint, ut ipſæ quantitates r & s, erit illè terminus omnium in eadem poteſtate maximus, illi verò propior ab utravis parte major remotiori ab eadem parte: ſed idem terminus M ad propiorem minorem habebit rationem, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem.

Dem. 1. Nota res eſt inter Geometras, quòd poteſtas nt binomii $r+s$, hoc eſt, $\overline{r+s}^{\,nt}$ hâc ſerie exprimitur:

$$r^{nt}+\frac{nt}{1}r^{nt-1}s+\frac{nt.nt-1}{1.2}r^{nt-2}ss+\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}r^{nt-3}s^{3}+\&c.$$

uſque ad $+\frac{nt}{1}rs^{nt-1}+s^{nt}$; in cujus progreſſu pars una binomii r dimenſionibus ſuis gradatim minuitur, pars altera s augetur, exiſtentibus interea coëfficientibus ſecundi & penultimi termini $\frac{nt}{1}$, 3ti & antepenultimi $\frac{nt.nt-1}{1.2}$, 4ti & proantepenultimi $\frac{nt.nt-1.nt-2}{1.2.3}$, & ſic deinceps. Et quia numerus omnium præter M terminorum per Lemm. 2. eſt $nt = nr+ns$, ex hypoth. autem numerus ipſum præcedentium ad numerum ſequentium ſe habet, ut s ad r, erit numerus eorum, qui terminum M præcedunt, ns; & qui ipſum ſequuntur, nr. Unde ex lege progreſſionis terminus M fiet

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nt-ns+1\,(nr+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots ns}\,r^{nr}s^{ns},\ \text{vel}$$

$$\frac{nt.nt-1.nt-2\ldots nt-nr+1\,(ns+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots nr}\,r^{nr}s^{ns};$$

& ſimiliter terminus huic proximus ad

sinistram: | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nr+2}}{1.2.3.4\ldots\overline{ns-1}}\,r^{nr+1}s^{ns-1} \quad\Big|\quad \frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{ns+2}}{1.2.3.4\ldots\overline{nr-1}}\,r^{nr-1}s^{ns+1};$$

nec non sequens versus *sinistram:* | *dextram:*

$$\frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{nr+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{ns-2}}\,r^{nr+2}s^{ns-2} \quad\Big|\quad \frac{nt.\overline{nt-1}.\overline{nt-2}\ldots\overline{ns+3}}{1.2.3.4\ldots\overline{nr-2}}\,r^{nr-2}s^{ns+2};$$

è quibus, præmissa ubique convenienti reductione tam coëfficientium quàm terminorum purorum per divisores communes, patebit, quòd terminus M ad proximum versus sinistram se habet, ut $\overline{nr+1}.s$ ad $ns.r$, hic ad sequentem, ut $\overline{nr+2}.s$ ad $\overline{ns-1}.r$ &c. nec non terminus M ad proximum versus dextram, ut $\overline{ns+1}.r$ ad $nr.s$; & hic ad sequentem, ut $\overline{ns+2}.r$ ad $\overline{nr-1}.s$. &c. Est verò $\overline{nr+1}.s$ $(nrs+s) > ns.r$ (nrs), & $\overline{nr+2}.s$ $(nrs+2s) > \overline{ns-1}.r$ $(nrs-r)$ &c. ut & $\overline{ns+1}.r$ $(nrs+r) > nr.s$ (nrs), & $\overline{ns+2}.r$ $(nrs+2r) > \overline{nr-1}.s$ $(nrs-s)$ &c. ut apparet. Ergò terminus M major proximo ab utravis parte, hic major remotiori ab eadem parte, &c. Q. E. D.

2. Ratio $\frac{nr+1}{ns}$ minor est ratione $\frac{nr+2}{ns-1}$, ut patet: ergò & addita communi ratione $\frac{s}{r}$, ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r} < \frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$. Similiter ratio $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, ut liquet: igitur addita ratione communi $\frac{r}{s}$, ratio quoque $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s} < \frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$. Sed ratio $\frac{\overline{nr+1}.s}{ns.r}$ est illa quam terminus M habet ad proximum versus sinistram; & $\frac{\overline{nr+2}.s}{\overline{ns-1}.r}$ illa, quam habet hic ad sequentem: item ratio $\frac{\overline{ns+1}.r}{nr.s}$ est ea, quam terminus M habet ad proximum versus dextram; & $\frac{\overline{ns+2}.r}{\overline{nr-1}.s}$, quam habet hic ad sequentem; uti modò ostensum est, & ad cæteros omnes ex æquo concludi potest. Quare maximus terminorum M ad propiorem ex utravis parte minorem rationem habet, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem ex eadem parte. Q. E. D.

Lemm.

Lemm. 4. In poteſtate binomii, cujus index nt, tantus poteſt concipi numerus n, ut maximus terminorum M ad alios duos L & Λ, intervallo n terminorum ſiniſtrorſum & dextrorſum à ſe diſtantes, rationem acquirat qualibet data majorem.

Dem. Cùm enim in Lemm. præced. terminus M ſit inventus

$$\frac{nt.\,nt-1.\,nt-2\,\ldots\ldots\,nr+1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\,ns}\,r^{nr}\,s^{ns},\ \text{vel}$$

$$\frac{nt.\,nt-1.\,nt-2\,\ldots\ldots\,ns+1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\,nr}\,r^{nr}\,s^{ns},$$

erit ex lege progreſſionis (addito n ad ultimum factorem coëfficientis in numeratore, & ablato ab ultimo in denominatore; nec non alterius literarum r & s dimenſionibus eodem n auctis, alterius diminutis) terminus

L *ad ſiniſtram:* | Λ *ad dextram.*

$$\frac{nt.\,nt-1.\,nt-2\ldots nr+n+1}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots ns-n}\,r^{nr+n}\,s^{ns-n}\ \Big|\ \frac{nt.\,nt-1.\,nt-2\ldots\ldots ns+n+1}{1.\,2.\,3.\,4\ldots nr-n}\,r^{nr-n}\,s^{ns+n};$$

unde facta convenienti reductione per diviſores communes, reſultat

$$\frac{M}{L} \infty \frac{nr+n.\,nr+n-1.\,nr+n-2\ldots nr+1}{ns-n+1.\,ns-n+2.\,ns-n+3\ldots ns}\,\frac{\times s^n}{\times r^n}$$

$$\Big|\ \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{ns+n.\,ns+n-1.\,ns+n-2\ldots\ldots ns+1}{nr-n+1.\,nr-n+2.\,nr-n+3\ldots\ldots nr}\,\frac{\times r^n}{\times s^n},$$

ſive (dimenſionibus quantitatum r^n & s^n in ſingulos factores, ob æqualem amborum numerum, æqualiter diſtributis)

$$\frac{M}{L} \infty \frac{nrs+ns.\,nrs+ns-s.\,nrs+ns-2s\ldots\ldots nrs+s}{nrs-nr+r.\,nrs-nr+2r.\,nrs-nr+3r\ldots\ldots nrs}$$

$$\Big|\ \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{nrs+nr.\,nrs+nr-r.\,nrs+nr-2r\ldots\ldots nrs+r}{nrs-ns+s.\,nrs-ns+2s.\,nrs-ns+3s\ldots\ldots nrs}:$$

ſed hæ rationes ſunt infinitè magnæ, cùm numerus n ponitur infinitus; tunc enim evaneſcunt numeri 1, 2, 3, &c. præ n, ipſæque $nr \between n \between$ 1, 2, 3, &c. & $ns \between n \between$ 1, 2, 3, &c. tantundem valent, ac $nr \between n$ & $ns \between n$, ſic ut diviſione inſtituta per n, prodeat

$$\frac{M}{L} \infty$$

$$\frac{M}{L} \infty \frac{rs+s.rs+s.rs+s.\dots.rs}{rs-r.rs-r.rs-r\dots.rs} \quad \Big| \quad \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{rs+r.rs+r.rs+r.\dots.rs}{rs-s.rs-s.rs-s.\dots.rs};$$

quæ quantitates componuntur, ut patet, ex tot rationibus $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$, quot ſunt factores: at horum numerus eſt n, h. e. infinitus; cùm inter primum $nr+n$, aut $ns+n$, & ultimum $nr+1$ aut $ns+1$ differentia ſit $n-1$. Idcircò rationes iſtæ ſunt infinituplicatæ rationum $\frac{rs+s}{rs-r}$ & $\frac{rs+r}{rs-s}$, ac proinde ſimpliciter infinitæ: qua de ſequela si dubites, concipe infinitos continuè proportionales in ratione $rs+s$ ad $rs-r$, vel $rs+r$ ad $rs-s$; erit primi ad tertium ratio duplicata, primi ad 4^{tum} triplicata, ad 5^{tum} quadruplicata,] &c. ad ultimum infinituplicata rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$: conſtat autem, rationem primi ad ultimum infinitè magnam eſſe, ob ultimum ∞ o. (*Vid. Coroll. Poſit. noſtræ 6^tæ de Seriebus Infinitis.*) Quare etiam conſtat, infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitam eſſe. Oſtenſum itaque eſt, quòd in poteſtate infinitè alta binomii terminus maximus M ad duos L & Λ rationem habeat omni aſſignabili ratione majorem. Q. E. D.

Lemm. 5. Poſitis, quæ in præced. tantus intelligi poteſt numerus n, ut ſumma omnium terminorum ab intermedio & maximo M ad ambos uſque L & Λ incluſivè ſumtorum, ad ſummam omnium reliquorum extra hos limites L & Λ utrinque protenſorum rationem habeat omni data ratione majorem.

Dem. Vocentur termini intra maximum M & limitem ſiniſtrum L, ſecundus à maximo F, tertius G, quartus H, &c. & extra limitem L, ſecundus ab ipſo P, tertius Q, quartus R, &c. Quoniam igitur ratio $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ & $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, & $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ &c. per part. 2. Lem. 3. erit quoque viciſſim $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. Quare cùm poſitio n numero infinito, ratio $\frac{M}{L}$ ſit infinitè magna, per

Lem.

Lem. 4. fortius etiam cæteræ rationes $\frac{F}{P}$, $\frac{G}{Q}$, $\frac{H}{R}$, &c. erunt infinitæ; eaque propter & $\frac{F+G+H+\&c.}{P+Q+R+\&c.}$ infinita, h. e. omnes simul termini intra maximum M & limitem L contenti infinities majores erunt totidem simul terminis extra L porrectis ipsi L proximis. Et quoniam numerus omnium terminorum extra limitem L numerum omnium intra eundem & maximum M non nisi $s-1$ (h. e. non nisi finitis) vicibus superat, per 1. Lem. ipsique insuper termini eo minores evadunt, quo sunt à limite remotiores, per 1. part. 3. Lem. idcirco termini simul omnes intra M & L (etiam non computato M) omnes simul terminos extra L adhuc infinities superabunt. Similiter autem ostenditur ab altera parte, quòd omnes intra M & Λ conclusi termini omnes extra Λ porrectos (quorum numerus priorum numerum per Lem. 1. non nisi $r-1$ vicibus excedit) infinities superant. Quare denique omnes termini inter utrumque limitem L & Λ comprehensi (demto licet maximo M) omnes omninò terminos extra positos itidem infinities superabunt. Ergo multo magis unà cum maximo. Q. E. D.

Schol. Objici posset contra 4 & 5tum Lema, ab his qui speculationibus infiniti non assueverunt, quòd etiamsi in casu numeri n infiniti factores quantitatum, quæ rationes $\frac{M}{L}$ & $\frac{M}{\Lambda}$ exprimunt, $nr \; 8 \; n \; 8 \; 1, 2, 3$, &c. & $ns \; 8 \; n \; 8 \; 1, 2, 3$, &c. tantundem valent ac $nr \; 8 \; n$ & $ns \; 8 \; n$, evanescentibus ratione singulorum factorum numeris 1, 2, 3, &c. fieri tamen possit, ut omnes collecti vel in se ducti (propter infinitum factorum numerum) in infinitum excrescant, adeoque rationem infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitè diminuant, h. e. finitam reddant. Cui scrupulo melius satisfacere non possum, quàm si nunc porro modum ostendam assignandi, reapse finitum numerum n, sive finitam potestatem binomii, in qua summa terminorum intra limites L & Λ ad summam terminorum extra, rationem habeat data ratione quantumvis magna, quam litera c designo, majorem; utpote quo ostenso objectionem ultro corruere necesse est.

Gg Hunc

Hunc in finem assumo rationem quamlibet majoris inæqualitatis, quæ tamen sit minor ratione $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pro terminis ad partem sinistram) puta rationem $\frac{rs+s}{rs}$ seu $\frac{r+1}{r}$, eamque toties (m vicibus) multiplico, quoad æquet vel superet rationem $c.\overline{s-1}$ ad 1, hoc est, ut sit $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m}$ ∞ vel $> c.\overline{s-1}$. Quoties autem id fieri debeat, compendiosè investigatur per logarithmos; nàm sumtis quantitatum logarithmis fit $mL\overline{r+1} - mLr$ ∞ vel $> Lc.\overline{s-1}$, & divisione peracta statim habetur m ∞ $> \frac{Lc.\overline{s-1}}{L\overline{r+1}-Lr}$; quo invento sic pergo: In serie illa fractionum sive factorum, $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}$. $\frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}$. $\frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}$ .... $\frac{nrs+s}{nrs}$, è quorum ductu per Lem. 4. resultat ratio $\frac{M}{L}$, observare licet, quòd singulæ fractiones sint minores quàm $\frac{rs+s}{rs-r}$, ita tamen ut ad hanc continuè propius accedant, quo major sumitur n: itaque quælibet earum aliquando fiet æqualis ipsi $\frac{rs+s}{rs}$ ∞ $\frac{r+1}{r}$; Quare videndum, quantus sit accipiendus valor n, ut fractio (cujus numerus ordinis est m) æquetur ipsi $\frac{r+1}{r}$. Est verò (ut ex progressionis lege perspicuum fit) fractio ordine m hæc: $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$, quæ adæquata fractioni $\frac{r+1}{r}$, dat n ∞ $m + \frac{ms-s}{r+1}$, & inde nt ∞ $mt + \frac{mst-st}{r+1}$. Dico, hunc esse indicem potestatis, ad quam si elevetur binomium $r+s$, futurum ut terminus maximus M superet limitem L plus quàm $c.\overline{s-1}$ vicibus. Nam quia fractio ordine m per hanc assumtionem numeri n fit $\frac{r+1}{r}$, per hypoth. & verò $\frac{r+1}{r}$ fractio secum ipsa m vicibus multiplicata, h. e. $\frac{\overline{r+1}^m}{r^m}$, per constr. æquet vel superet $c.\overline{s-1}$, fit ut fit ut hæc fractio in omnes præcedentes fractiones ducta multo magis excedat $c \cdot \overline{s-1}$; cùm singulæ præcedentium majores sint quàm $\frac{r+1}{r}$. Ergo magis adhuc superabit $c \cdot \overline{s-1}$, quando ducitur una cum præcedentibus in omnes etiam consequentes, utpote quarum singulæ saltem æqualitatis rationem excedunt. Sed productum omnium harum fractionum rationem exhibet termini M ad L; igitur omnino constat, terminum M superare limitem L plus quàm $c \cdot \overline{s-1}$ vicibus. Jam autem $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. ut ostensum. Hinc multo magis secundus à maximo M secundum à limite L plus quàm $c \cdot \overline{s-1}$ vicibus superabit, & magis adhuc tertius tertium, &c. Itaque tandem omnes termini intra maximum M & limitem L superant totidem è maximis extra hunc limitem plus quàm $c \cdot \overline{s-1}$ vicibus; adeoque superant totidem illorum $s-1$ vicibus sumtos plus quàm c vicibus. Ergo multo evidentius superant omnes extra limitem L, quorum non nisi $s-1$ vicibus plures sunt, plus quàm c vicibus.

Pro terminis dextimis pari modo procedo: Assumo rationem $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, & facio $\frac{\overline{s+1}^m}{s^m} \underset{>}{\infty} c \cdot \overline{r-1}$, invenioq; $m \underset{>}{\infty} \frac{Lc \cdot \overline{r-1}}{L\overline{s+1} - Ls}$. Deinde, in serie fractionum $\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s} \cdot \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s} \cdot \frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s} \cdots \frac{nrs+r}{nrs}$, quæ rationem $\frac{M}{\Lambda}$ innuit, pono fractionem, quæ ordine est m, nempe $\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms} \infty \frac{s+1}{s}$, indeque elicio $n \infty m + \frac{mr-r}{s+1}$, ac proin $nt \infty mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$. Quo facto similiter ostendetur, ut antea, quòd binomio $r+s$ ad hanc potestatem sublato, terminus ejus maximus M superabit limitem Λ plus quàm $c \cdot \overline{r-1}$ vicibus & per consequens etiam, quòd omnes maximo M & limite Λ conclusi superabunt omnes extra hunc limitem, quorum non nisi $r-1$ vicibus plures sunt, plus quam c vicibus. Itaque finaliter tandem concludimus, quòd elevato binomio $r+s$ ad potestatem, cujus index æquetur majori harum duarum quantitatum $mt + \frac{mst-st}{r+1}$

Gg 2

$\frac{mst - st}{r+1}$ & $mt + \frac{mrt - rt}{s+1}$, omnes ſimul termini inter utrumque limitem L & Λ comprehenſi multo pluribus quàm c vicibus ſuperabunt omnes ſimul terminos extra limites ab utraque parte protenſos. Reperta igitur eſt finita poteſtas, quæ optatam habeat proprietatem. Q. E. F.

Propoſ. Princip. Sequitur tandem Propoſitio ipſa, cujus gratia hæc omnia dicta ſunt, ſed cujus nunc demonſtrationem ſola Lemmatum præmiſſorum applicatio ad præſens inſtitutum abſolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo caſus illos, quibus eventus quidam contingere poteſt, *fœcundos* ſeu *fertiles*; & *ſteriles* illos, quibus idem eventus poteſt non contingere: nec non experimenta *fœcunda* ſive *fertilia* illa, quibus aliquis caſuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* ſive *ſterilia*, quibus ſterilium aliquis contingere obſervatur. Sit igitur numerus caſuum fertilium ad numerum ſterilium vel præcisè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ ſeu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Oſtendendum eſt, tot poſſe capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus veriſimilius evadat, numerum fertilium obſervationum intra hos limites quàm extra caſurum eſſe, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium obſervationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Ponatur numerus capiendarum obſervationum nt, & quæratur, quanta ſit expectatio, ſeu quanta probabilitas, ut omnes exiſtant fœcundæ, exceptis primo nulla, dein una, duabus, 3, 4 &c. ſterilibus. Quandoquidem autem in qualibet obſervatione præſto ſunt ex hyp. t caſus, eorumque r fœcundi & s ſteriles, & ſinguli caſus unius obſervationis cum ſingulis alterius combinari, combinatique rurſus cum ſingulis tertiæ, 4ᵗᵃᵉ &c. conjungi poſſunt, facile patet, huic negotio quadrare Regulam Annotationibus Prop. XIII.

XIII. primæ Part. in fine ſubnexam, & ejus Corollarium ſecundum, quod univerſalem formulam continet, cujus ope cognoſcitur, quòd expectatio ad nullam obſervationem ſterilem ſit $r^{nt} : t^{nt}$, ad unam $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt}$, ad duas ſteriles $\frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} ss : t^{nt}$, ad tres $\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3 : t^{nt}$, & ſic deinceps; adeoque (rejecto communi nomine t^{nt}) quod gradus probabilitatum ſeu numeri caſuum, quibus contingere poteſt, ut omnia experimenta ſint fœcunda, vel omnia præter unum ſterile, vel omnia præter duo, 3, 4 &c. ſterilia, ordine exprimantur per r^{nt}, $\frac{nt}{1} r^{nt-1} s$, $\frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} ss$, $\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3$, &c. ipſiſſimos nempe terminos poteſtatis nt binomii $r+s$, in Lemmatis modo noſtris excuſſæ: unde jam cætera omnia oppido manifeſta ſunt. Patet enim ex progreſſionis natura, quòd numerus caſuum, qui cum ns ſterilibus experimentis nr fœcunda adducunt, ſit ipſe terminus maximus poteſtatis M, utpote quem ns termini præcedunt, & nr ſequuntur, per Lem. 3. item, quòd numeri illorum caſuum, quibus aut $nr+n$ aut $nr-n$ experimentis fœcundis cæteriſque ſterilibus eſſe contingit, exhibeantur per terminos poteſtatis L & Λ, quippe intervallo n terminorum à maximo M utrinque diſtantes; & per conſequens etiam, quòd ſumma caſuum, quibus non pluribus experimentis quàm $nr+n$, nec paucioribus quàm $nr-n$ fœcundis eſſe contingit, exprimatur per ſummam terminorum poteſtatis intra limites L & Λ comprehenſorum; ſumma reliquorum caſuum, quibus aut plura aut pauciora experimenta fœcunda redduntur, per cæterorum terminorum limites hos L & Λ excedentium ſummam expreſſa. Quare cùm tanta ſumi poſſit poteſtas binomii, ut ſumma terminorum utroque limite L & Λ incluſorum pluribus quàm c vicibus ſuperet ſummam cæterorum limites hos excedentium, per Lem. 4. & 5. ſequitur etiam, capi poſſe tot obſervationes, ut ſumma caſuum, quibus numero fertilium obſervationum ad numerum omnium rationem habere contingit, non excedentem limites $\frac{nr+n}{nt}$ & $\frac{nr-n}{nt}$,

$\frac{nr-n}{nt}$, seu $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, pluribus quàm c vicibus superet summam casuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri observationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, quàm extra casuram esse. Quod demonstrandum erat.

In speciali autem horum applicatione ad numeros satis per se patet, quòd quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r, s & t, eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$ rationis $\frac{r}{s}$. Idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, sit ex. gr. sesquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat posuisse $r \propto 30$, $s \propto 20$, & $t \propto r+s \propto 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t} \propto \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{t} \propto \frac{29}{50}$; & statuatur insuper $c \propto 1000$: sic fiet ex Scholii præscripto, pro terminis ad

sinistram:

$$m > \frac{L\,c.\overline{s-1}}{L\,\overline{r+1} - L\,r} \propto \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt \propto mt + \frac{mst-st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{L\,c.\overline{r-1}}{L\,\overline{s+1} - L\,s} \propto \frac{4.4623980}{211893} < 211.$$

$$nt \propto mt + \frac{mrt-rt}{s+1} \propto 25550.$$

Unde per ibi demonstrata infertur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $c \propto 10000$, aut $c \propto 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies,

millies, ſi capiantur 36966, &c. & ſic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quòd si eventuum omnium obſervationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum prædixit.