IV. část

Bernoulliova věta

IV/1 Komentář

1 Úvod ke IV. části

1.1 Jakob Bernoulli

Osobnost a dílo Jakoba Bernoulliho není předmětem naší práce, protože však o něm byla řeč již velice často, považujeme za vhodné uvést v úvodu této části aspoň jeho základní životopisné údaje.

O Bernoulliích existuje rozsáhlá speciální literatura [1]. Rod Bernoulliů pocházel z Antverp, ale v rámci různých náboženských nepokojů se v průběhu XVI. století několikrát stěhoval a od r. 1620 se usadil v Basileji. Protože byli matematicky činní po několik generací, rozlišují je historikové pořadovými číslicemi (jako panovníky).

Teorií pravděpodobnosti se zabývali tři z nich: Jakob I (1654 - 1705), Niclaus I (1687 - 1759) a Daniel I (1700 - 1782); protože o Bernoulliích s vyššími pořadovými čísly v dalším nebude řeč, budeme číslici I vynechávat. Pokud se pravopisu křestních jmen Bernoulliů týče, přidržujeme se způsobu používaného v [3], III.

Jakob Bernoulli se narodil a zemřel v Basileji; od r. 1687 až do smrti byl profesorem matematiky na basilejské universitě [2]. Od r. 1690 publikoval spolu se svým bratrem Johannem v návaznosti na Leibnize celou řadu prací z infinitesimálního počtu a lze říci, že tato trojice měla veliký podíl na rychlém rozvoji této části matematiky. Ze všech Bernoulliů se zapsal nejvýrazněji do dějin teorie pravděpodobnosti svým spisem *Ars conjectandi*, z jehož první části jsme hojně citovali při rozboru spisu Christiana Huygense.

Niclaus a Daniel Bernoulliové byli synovci Jakoba Bernoulliho; z hlediska naší práce je podstatné, že Niclaus v r. 1713 vydal spis svého strýce Jakoba *Ars conjectandi*. Oba jsou v dějinách teorie pravděpodobnosti uváděni hlavně v souvislosti s úlohou, zvanou (podle místa publikace) petrohradský paradox [3].

[1] U nás byl publikován stručný přehled v článku ZICHOVÁ, J.: *„Co možná nevíte o rodině Bernoulliů“*, Informace MVS JČMF 38 (září 1992). Speciálnější problematice je věnován článek SIERKSMA, G.: *„Johann Bernoulli (1667 - 1748): Deset neklidných let v Groningen“*, PMFA 39 (1994), 1, 14-26, kde je také uvedena další speciální literatura. Celkový přehled o Bernouliích lze nalézt např. v knize NIKIFOROVSKIJ, V.A.: *Velikije matematiki Bernulli.* Nauka, Moskva 1984.

[2] Toto místo zaujímali Bernoulliové nepřetržitě více než sto let: Jakob I v letech 1687 - 1705, Johannn I v letech 1705 - 1748 a Johann II v letech 1748 - 1790.

[3] Niklaus v korespondenci s již dříve zmíněným P. Montmortem úlohu zformuloval, Daniel ji publikoval a řešil.

1.2 *Ars conjectandi*

Jak už bylo řečeno, hlavním vkladem Bernoulliů do teorie pravděpodobnosti byl spis Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi*, napsaný mezi lety 1679 - 1685 ([3], III, str. 339) a vydaný Jakobovým synovcem Niclausem v r. 1713. Uveďme zde základní údaje o tomto spisu.

Vlastní spis [7] (bez předmluvy a pod.) má 239 stran [4] formátu (přibližně) A5 a je členěn do čtyř částí; podrobný výklad lze najít např. v [1, 2]. První část (str. 1 - 71) obsahuje plné znění Huygensova spisu *De ratiociniis in ludo aleæ* s podrobnými komentáři a obsáhlými doplňky Jakoba Bernoulliho a byla už o ní řeč v části II/1 naší práce. Druhá část (str. 72 - 137) je v podstatě učebnicí kombinatoriky, třetí část (str. 138 - 209) lze charakterizovat jako sbírku kombinatorických úloh s herní motivací; těmito dvěma částmi se nebudeme zabývat. Z hlediska historie počtu pravděpodobnosti byla nejdůležitější čtvrtá část knihy (str. 210 - 239), a to i přesto, že zůstala nedokončená; jejím hlavním přínosem byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel, kterému se nyní budeme věnovat.

Plný název této části je *Artis conjectandi pars quarta, tradens usum & applicationem precedentis doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Œconomicis.* Je rozdělena do pěti kapitol; zákon velkých čísel je uveden v poslední z nich. Bernoulliova formulace tohoto zákona byla samozřejmě jiná, než formulace užívaná dnes; z hlediska použitého matematického aparátu je pozoruhodné, že Bernoulli vystačil s binomickými koeficienty.

Předmětem této části naší práce bude výklad Bernoulliovy formulace a důkazu tvrzení, nazývaného dnes Bernoulliovou větou, které bylo první exaktní formulací tzv. zákona velkých čísel. Budeme přitom sledovat strukturu Bernoulliova textu, nebudeme ale jeho postup doslova překládat; pro zájemce o historické matematické texty uvádíme v příloze kopii celé této části Bernoulliovy práce [5].

2 Pomocná tvrzení

2.1 Značení

Symboly n, r, s budeme značit přirozená (tj. celá kladná) čísla. Standardně budeme značit $t = r + s$.

V binomickém rozvoji

$$(r+s)^{nt} = r^{nt} + \binom{nt}{1} r^{nt-1}s + \binom{nt}{2} r^{nt-2}s^2 + \cdots +$$

[4] Ke spisu jsou připojeny dva dodatky: na str. 241 - 306 je to *Tractatus de seriebus infinitis, earumque summa finita, et usu in quadraturis spatiorum & rectificationibus curvarum* a potom se samostatným stránkováním 1 - 35 *Lettre à un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume.*

[5] Děkujeme Národní knihovně České republiky v Praze za souhlas k publikaci této kopie, která byla pořízena z exempláře Bernoulliova spisu, chovaného v této knihovně pod signaturou 14 F 43.

$$+\binom{nt}{nt-2}r^2s^{nt-2}+\binom{nt}{nt-1}rs^{nt-1}+s^{nt} \qquad (1)$$

označíme

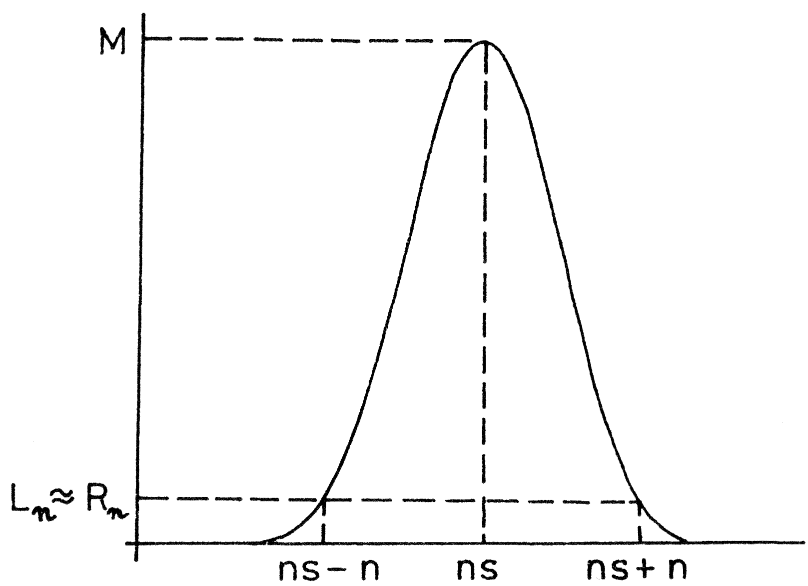
$$M=\binom{nt}{ns}\cdot r^{nr}\cdot s^{ns}\ ;$$

dále označíme postupně R_1, R_2, ... , R_{nr} členy následující za M a analogicky L_1, L_2, ... , L_{ns} členy předcházející před M v pořadí vzdalujícím se od M [6].

2.2 Základní struktura důkazu

Bernoulli nejprve dokazuje pět lemm, na jejichž základě pak dokáže hlavní tvrzení. Lemmy se vesměs týkají binomického rozvoje (1), ale hlavní tvrzení se týká binomického rozdělení s počtem pokusů nt a pravděpodobností sledovaného jevu [7] $p=\frac{s}{t}$, což je až na součinitele $\frac{1}{t^{nt}}$ totéž jako rozvoj (1); bylo by tedy možné lemmy přeformulovat tak, aby se týkaly přímo onoho binomického rozdělení, o které vlastně Bernoullimu jde.

Jak známo, lze pro velká n binomické rozdělení s parametry nt a p aproximovat normálním rozdělením s parametry $\mu=ntp$ a $\sigma^2=ntp(1-p)$; použijeme proto k objasnění základní struktury Bernoulliova důkazu následujícího grafu hustoty normálního rozdělení.



[6] Binomický rozvoj má tedy tvar $L_{ns}+\cdots+L_2+L_1+M+R_1+R_2+\cdots+R_{nr}$.

[7] Zde se poněkud odchylujeme od Bernoulliova značení; viz k tomu první odstavec následující kap. 3.

Ponecháme-li stranou první dvě lemmy, které mají pouze pomocný charakter, pak ve třetí lemmě Bernoulli dokáže, že M je největším členem v binomickém rozvoji (1) a vyšetří poměry dvou sousedních členů v binomickém rozvoji (1) v závislosti na vzdálenosti od M.

Ve čtvrté lemmě Bernoulli dokáže, že poměry $\frac{M}{L_n}$ a $\frac{M}{R_n}$ mohou být s rostoucím n učiněny libovolně velkými. Uvědomíme-li si, že mocnina dvojčlenu v rozvoji (1) (v binomickém rozdělení: počet pokusů) je rovna nt, pak je zřejmé, že v tomto rozvoji počet členů od L_n (inklusive) až do M (exklusive) představuje stále stejnou poměrnou část ze všech členů rozvoje (1) (totéž platí pro R_n a M); členy od L_n do R_n by bylo možno nazvat „prostřední částí" rozvoje (1).

V páté lemmě Bernoulli dokáže, že součet členů této „prostřední části" může být s rostoucím n učiněn libovolněkrát větší než součet členů zbývající části. Přechod od této lemmy k formulaci věty je už jenom technická otázka.

Podstatné je, že Bernoulli nepodává pouhý existenční důkaz, ale dokazuje i tvrzení, které lze považovat za předchůdce Čebyševovy nerovnosti, což mu umožní odhadnout hodnotu čísla n potřebnou k dosažení požadované „převahy" prostřední části rozvoje nad zbývajícími členy (v binomickém rozdělení: umožní mu odhadnout počet pokusů potřebný k dosažení požadované shody mezi empirickou četností a pravděpodobností).

2.3 Bernoulliovy lemmy

Dvě první lemmy [8] uvedeme bez důkazu, protože jsou jednoduché.

Lemma 1. V konečné posloupnosti

$$0, 1, 2, \dots, ns-n, \dots, ns, \dots, ns+n, \dots, ns+nr$$

platí:
a/ počet členů posloupnosti větších než $ns+n$ je roven $n(r-1)$;
b/ počet členů posloupnosti menších než $ns-n$ je roven $n(s-1)$.

Lemma 2. Binomický rozvoj výrazu $(r+s)^n$ má $n+1$ členů.

Lemma 3. Člen M je největším členem binomického rozvoje (1) a platí

$$M > L_1 > L_2 > L_3 > \cdots > L_{ns} ,$$
$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_1}{L_2} < \frac{L_2}{L_3} < \cdots < \frac{L_{ns-1}}{L_{ns}} ,$$
$$M > R_1 > R_2 > R_3 > \cdots R_{nr} ,$$
$$\frac{M}{R_1} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{R_2}{R_3} < \cdots < \frac{R_{nr-1}}{R_{nr}} .$$

[8] V první lemmě se poněkud odchylujeme od Bernoulliova značení; viz k tomu první odstavec následující kap. 3.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro členy předcházející před M, protože pro členy následující za M je důkaz analogický.

Označíme-li $L_0 = M$, pak

$$L_i = \binom{nt}{ns - i} r^{nr+i} s^{ns-i} \,,$$

$$i = 0,\ 1,\ \cdots,\ ns\,,$$

a platí

$$\frac{L_i}{L_{i+1}} = \frac{nr + i\ + 1}{ns - i} \cdot \frac{s}{r}\,;$$

protože $nrs + s(i+1) > nrs - ri$, je $L_i > L_{i+1}$.

Analogicky

$$\frac{L_{i+1}}{L_{i+2}} = \frac{nr + i\ + 2}{ns - i\ - 1} \cdot \frac{s}{r}$$

a protože

$$\frac{nr + i\ + 1}{ns - i} < \frac{nr + i\ + 2}{ns - i\ - 1}\,,$$

je

$$\frac{L_i}{L_{i+1}} < \frac{L_{i+1}}{L_{i+2}}\,. \quad \square$$

POZNÁMKA. Pokud se lemmy 4. a 5. týče, Bernoulli nejprve podává jejich důkazy pomocí úvah o nekonečných posloupnostech a pak v poznámce (*Scholium*, str. 233) podává důkaz odlišný. Protože jeho první důkaz není (dle našeho názoru) zcela korektní a protože ve druhém důkazu (který dle našeho názoru korektní je) dospívá ke vzorcům, kterých pak používá při řešení příkladu, provedeme zde druhou variantu důkazu.

Lemma 4. Poměry

$$\frac{M}{L_n}\,,\quad \frac{M}{R_n}$$

mohou při rostoucím n nabývat libovolně velké hodnoty.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro první z uvedených poměrů, protože pro druhý z nich je analogický. Základní myšlenka důkazu spočívá v tom, že zvolíme libovolné $c > 0$ a hledáme n_0 tak, aby

$$\frac{M}{L_n} > c(s-1) \text{ pro všechna } n > n_0.$$

Platí

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(ns-n)!\ (nr+n)!}{(ns)!\ (nr)!} \cdot \frac{s^n}{r^n} =$$

$$= \frac{(nr+n)(nr+n-1)(nr+n-2)\cdots(nr+n-(n-1))}{(ns)(ns-1)(ns-2)\cdots(ns-(n-1))} \cdot \frac{s^n}{r^n}\,.$$

Roznásobíme-li čitatele i jmenovatele prvního zlomku druhým zlomkem a obrátíme-li ve jmenovateli pořadí součinitelů, lze celý výraz napsat ve tvaru

$$\frac{M}{L_n} = \frac{nrs+ns}{nrs-nr+r} \cdot \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r} \cdot \ldots \cdot \frac{nrs+ns-(n-1)s}{nrs-nr+nr} =$$

$$= \prod_{m=1}^{n} \frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-(n-m)r} \ . \tag{2}$$

Všichni tito součinitelé jsou větší než 1 a menší než $\frac{rs+s}{rs-r}$. Při pevném n hodnota těchto součinitelů monotónně klesá s rostoucím m; při pevném m hodnota těchto součinitelů monotónně roste,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-(n-m)r} = \frac{rs+s}{rs-r}$$

a protože $\frac{r+1}{r} < \frac{rs+s}{rs-r}$, existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je

$$\frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-(n-m)r} > \frac{r+1}{r} \ .$$

Označme nyní nyní m_0 nejmenší přirozené číslo, pro které platí [9]

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^{m_0} \geq c(s-1) \ \Rightarrow \ m_0 = \left\lceil \frac{\log c + \log(s-1)}{\log(r+1) - \log r} \right\rceil \ .$$

Dále označme n_0 nejmenší přirozené číslo, pro které platí

$$\frac{n_0 rs + n_0 s - (m_0-1)s}{n_0 rs - (n_0 - m_0)r} > \frac{r+1}{r} \ \Rightarrow \ n_0 = \left\lceil m_0 + \frac{(m_0-1)s}{r+1} \right\rceil \ .$$

Pro poměr $\frac{M}{L_{n_0}}$ platí, že v součinu (2) všichni součinitelé s $m \leq m_0$ jsou větší něž $\frac{r+1}{r}$ a protože navíc jsou všichni součinitelé větší než 1, je

$$\frac{M}{L_{n_0}} > \left(\frac{r+1}{r}\right)^{m_0} \geq c(s-1) \ .$$

Protože podle lemmy 3 je $L_i > L_{i+j}$ pro všechna i, j, platí

$$\frac{M}{L_n} > c(s-1)$$

pro všechna $n > n_0$, čímž je dokázána první část lemmy.

Zcela analogicky se dokáže lemma pro poměr $\frac{M}{R_n}$, pouze se bere

$$\frac{M}{R_n} \geq c(r-1) \text{ pro všechna } n > n_0 \ ,$$

[9] Symbol $\lceil x \rceil$ znamená nejmenší přirozené číslo větší nebo rovné x; Bernoulli pochopitelně tohoto symbolu nepoužívá, ale z příkladu, který řeší na str. 238 latinského textu, je zřejmé, že fakticky takto počítá.

$$m_0 = \left\lceil \frac{\log c + \log(r-1)}{\log(s+1) + \log s} \right\rceil ,$$

$$n_0 = \left\lceil m_0 + \frac{(m_0 - 1)r}{s+1} \right\rceil . \quad \square$$

Lemma 5. Poměr součtu $L_n + L_{n-1} + \cdots + L_1 + M + R_1 + \cdots + R_{n-1} + R_n$ ku součtu všech zbývajících členů může při rostoucím n nabývat libovolně velké hodnoty.

DŮKAZ. Podle důkazu předešlé lemmy stanovíme čísla n_0 pro poměry $\frac{M}{L_n}$, $\frac{M}{R_n}$ a položíme N rovné většímu z nich. Pak podle lemmy 4

$$\frac{M}{L_N} > c(s-1) , \quad \frac{M}{R_N} > c(r-1) ;$$

v pokračování důkazu se budeme věnovat jen první z uvedených nerovností.

Z lemmy 3 plyne (označíme opět $M = L_0$)

$$\frac{L_i}{L_{i+1}} < \frac{L_{N+i}}{L_{N+i+1}} \Rightarrow \frac{L_i}{L_{N+i}} < \frac{L_{i+1}}{L_{N+i+1}} ,$$

takže pro $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ Ns - N - 1$ dostáváme

$$\frac{M}{L_N} < \frac{L_1}{L_{N+1}} < \frac{L_2}{L_{N+2}} < \cdots < \frac{L_{Ns-N}}{L_{Ns}} , \tag{3}$$

a protože

$$\frac{M}{L_N} > c(s-1) ,$$

dostáváme z (3)

$$L_i > c(s-1)L_{N+i} \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \cdots, Ns - N ,$$

z čehož plyne

$$\sum_{i=1}^{N} L_i > c(s-1) \sum_{i=1}^{N} L_{N+i} ;$$

z toho podle lemmy 3 dále plyne

$$\sum_{i=1}^{N} L_i > c(s-1) \sum_{i=1}^{N} L_{N+i} > c(s-1) \sum_{i=1}^{N} L_{2N+i} > \cdots > c(s-1) \sum_{i=1}^{N} L_{(s-1)N+i} ,$$

takže sečtením dostáváme

$$(s-1) \sum_{i=1}^{N} L_i > c(s-1) \sum_{i=N+1}^{Nr} L_i$$

a protože c je podle důkazu lemmy 3 libovolné kladné číslo, je tím dokázáno tvrzení lemmy 5 pro členy vlevo od největšího členu M; důkaz pro členy vpravo je analogický. $\square$

3 Bernoulliova formulace a důkaz Bernoulliovy věty

Dříve než uvedeme Bernoulliovu větu v původní formulaci, považujeme za nutné upozornit na jednu odchylku námi použitého značení od značení Bernoulliova. Dnes se při definici pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení bere jako nezávisle proměnná počet úspěšných pokusů; v binomickém rozvoji (1) by tedy počet úspěšných pokusů měl být roven exponentu u s a počet neúspěšných pokusů exponentu u r. Bernoulli ale ve formulaci věty volí značení opačné než v rozvoji (1) a označuje pravděpodobnost úspěchu $\frac{r}{t}$ a pravděpodobnost neúspěchu $\frac{s}{t}$. S přihlédnutím k dnešním zvyklostem jsme sjednotili značení v lemmách se značením ve větě, takže v této kapitole našeho textu je symbolů r a s užito v opačném významu než u Bernoulliho.

Nyní uveďme Bernoulliovu formulaci jeho hlavního tvrzení (*Propositio principalis* na str. 236 latinského textu; vynecháváme terminologickou část tvrzení a terminologii poněkud přizpůsobujeme dnešním zvyklostem):

Nechť je tedy počet případů příznivých ku počtu případů nepříznivých v poměru $\frac{s}{r}$, tedy ku počtu všech případů v poměru $\frac{s}{r+s}$ čili $\frac{s}{t}$, kterýžto poměr ohraničují meze $\frac{s+1}{t}$ & $\frac{s-1}{t}$. Má být dokázáno, že je možné učinit tolik pokusů, aby vyšlo libovolněkrát pravděpodobněji (kupříkladu c-krát, kde c je dáno), že počet příznivých pozorování padne mezi tyto hranice než mimo ně, tj. počet pozorování příznivých ku počtu všech pozorování nebude v poměru ani větším než $\frac{s+1}{t}$, ani menším než $\frac{s-1}{t}$.

Při důkazu Bernoulli vychází z toho, že je prováděna série nt pokusů, přičemž v každém pokusu je t možných výsledků, z nichž s je příznivých a r nepříznivých [10]. Pak se odvolává na binomický zákon rozdělení, který odvodil při komentování [11] Huygensova *Propositio XII* a konstatuje, že pravděpodobnost právě k příznivých výsledků v sérii nt pokusů je rovna

$$\binom{nt}{k} \cdot \frac{s^k r^{nt-k}}{t^{nt}} .$$

Pravděpodobnost toho, že poměr počtu pokusů s příznivým výsledkem ku počtu všech pokusů leží mezi (inklusive) $\frac{r-1}{t}$ a $\frac{r+1}{t}$, bude proto podle lemmy 5 při velkém počtu pokusů c-krát větší než pravděpodobnost toho, že uvedený poměr bude ležet mimo uvedený interval; číslo c přitom může být zvoleno libovolně velké.

Tím Bernoulli svůj důkaz končí; celou kapitolu (a tím vlastně i celý svůj spis) uzavírá příkladem, ke kterému se za chvíli vrátíme. Převeďme nyní Bernoulliovu formulaci do dnešní podoby.

Bernoulli fakticky říká toto:

---

[10] K tomu je třeba poznamenat, že z dnešního hlediska Bernoulli mlčky předpokládá nezávislost pokusů a stejné pravděpodobnosti všech možných výsledků každého pokusu.

[11] Viz naše kap. II. 2. 4; v latinském textu (str. 237) je chybně uvedeno *Propositio XIII*.

Nechť m je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností $p = \frac{s}{t}$. Pak pro jakékoli (velké) $c > 0$ lze najít N_c takové, že pro všechna $n > N_c$ platí

$$P\left(\frac{s-1}{t} \le \frac{m}{n} \le \frac{s+1}{t}\right) > c\left[P\left(\frac{m}{n} < \frac{s-1}{t}\right) + P\left(\frac{m}{n} > \frac{s+1}{t}\right)\right].$$

Tento výsledek lze přepsat do jednoduššího tvaru

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \frac{1}{t}\right) > cP\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \frac{1}{t}\right)$$

a protože

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \frac{1}{t}\right) = 1 - P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \frac{1}{t}\right),$$

můžeme Bernoulliův výsledek nakonec zapsat ve tvaru

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \frac{1}{t}\right) > \frac{c}{c+1},$$

což vlastně odpovídá současné formulaci Bernoulliovy věty.

Bernoulli ale ve svých lemmách fakticky dokázal víc. Z jeho lemmy 4 totiž plyne, že pro daná čísla c, r a t lze odpovídající N_c najít ze vztahu (v dnešním zápisu)

$$N_c = \max\left(\left\lceil\left\lceil\frac{\log c + \log(s-1)}{\log(r+1) - \log r}\right\rceil\left(1 + \frac{s}{r+1}\right)t - \frac{st}{r+1}\right\rceil;\right.$$
$$\left.\left\lceil\left\lceil\frac{\log c + \log(r-1)}{\log(s+1) - \log s}\right\rceil\left(1 + \frac{r}{s+1}\right)t - \frac{rt}{s+1}\right\rceil\right),$$

kde $s = t - r$, symbol $\lceil x \rceil$ znamená nejmenší celé číslo větší nebo rovné x.

Jak už bylo řečeno, Bernoulli uzavírá svůj důkaz příkladem. V tomto příkladu se fakticky jedná o využití předešlého vztahu (i když v odlišné formulaci); Bernoulli počítá N_c pro $c = 1000$, $s = 30$, $t = 50$ a zjišťuje, že

$$N_c = \max\left(\left\lceil\left\lceil\frac{4,2787536)}{0,0142405}\right\rceil\frac{51}{31}50 - \frac{1000}{31}\right\rceil; \left\lceil\left\lceil\frac{4,4623980}{0,0211893}\right\rceil\frac{51}{21}50 - \frac{1500}{21}\right\rceil\right) =$$

$$= \max\left(\left\lceil\frac{301.2550-1000}{31}\right\rceil;\left\lceil\frac{211.2550-1500}{21}\right\rceil\right) =$$

$$= \max(24728; 25550) = 25550.$$

Konáme-li tedy sérii pokusů, z nichž v každém může sledovaný jev nastat s pravděpodobností $\frac{3}{5}$, pak při provedení (aspoň) 25550 pokusů máme zaručeno, že poměr počtu případů, v nichž sledovaný jev nastal, ku počtu všech pokusů bude ležet v intervalu

$$\left\langle\frac{29}{50},\frac{31}{50}\right\rangle = \langle 0.58, 0.62\rangle$$

s pravděpodobností tisíckrát větší než mimo tento interval. Kdybychom ovšem chtěli tuto pravděpodobnost stanovit, museli bychom při použití Bernoulliho metody vypočítat součet (dolní mez pro sčítání je $\frac{29}{50}25550$, horní mez pro sčítání je $\frac{31}{50}25550$)

$$\sum_{k=14819}^{15841}\binom{25550}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{25550-k};$$

to je prakticky neproveditelné (a navíc by se v tomto případu výsledná pravděpodobnost jen nepatrně lišila od 1, takže z pedagogického hlediska se tento příklad nejeví jako příliš vhodný [12]). Řešení takových úloh je prakticky možné aproximací binomického rozdělení rozdělením normálním, první kroky v tomto směru ale udělal až Abraham de Moivre (1667 - 1754).

4 Závěrečná poznámka

Zákon velkých čísel je považován (a to jistě právem) za hlavní Bernoulliův výsledek v oblasti teorie pravděpodobnosti. Při četbě jeho spisu ale vzniká dojem, že Bernoulli mířil dále (což může souviset s tím, že spis zůstal nedokončen), čemuž nasvědčují některé úvahy a příklady ze čtvrté kapitoly poslední části spisu. Jeden z těchto příkladů lze zformulovat takto ([7], latinský text str. 225 a násl.):

V urně je umístěno 3000 bílých a 2000 černých kamenů. Experimentátor tyto údaje nezná a chce stanovit poměr bílých a černých kamenů na základě pokusu, při kterém postupně vytahuje kameny z urny a sleduje, jak často vytáhl bílý a jak často černý; přitom vytažený kámen vždy vrátí zpět dříve, než

[12] Pomocí programového produktu MAPLE a aproximace binomického rozdělení normálním rozdělením bylo zjištěno, že hledaná pravděpodobnost je rovna 0,999999999935092, takže Bernoulliův odhad čísla N_c je příliš vysoký; stejným postupem bylo zjištěno, že k dosažení požadované přesnosti stačí „jen" asi 6500 pokusů.

vytahuje další [13]. V dalším výkladu Bernoulli dodává, že tento poměr nechce stanovit absolutně přesně, ale pouze s jistým přiblížením [14]. Z dnešního hlediska lze o tomto příkladu říci, že počet bílých (nebo černých) kamenů vytažený v sérii n pokusů je náhodná veličina s binomickým rozdělením, jehož parametr p neznáme a chceme ho odhadnout na základě výsledku série pokusů; to je typická úloha matematické statistiky.

Domníváme se proto, že Bernoulli mířil k řešení úloh matematické statistiky a důkazem zákona velkých čísel potvrdil, že intuitivní názor na možnost řešení těchto úloh pomocí dostatečně dlouhé série pokusů je objektivně oprávněný. Nedospěl sice až k řešení statistických úloh, přesto lze ale jeho spis považovat za první vykročení tímto směrem.

$\boxed{\diamondsuit \clubsuit \spadesuit \heartsuit}$

[13] *Ut exemplo constet quid velim, pono in urna quadam te inscio reconditos esse ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum post alterum (reponendo tamen singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & observare, quoties albus & quoties alter exeat.*; v dalším se už nemluví o počtu kamenů *(numerus)*, ale o poměru *(ratio)* (viz též následující citát).

[14] *Ne autem hæc secus intelligantur quàm oportet, probè notandum est, quòd rationem inter numeros casuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indivisibili acceptam velim ...*