# II.část

# CHRISTIAN HUYGENS: *De ratiociniis in ludo aleæ*

## II/1 Komentář

### 1 Úvod ke II. části

V této části naší práce je podán poměrně podrobný komentář k uvedenému Huygensovu spisu. Jedná se vlastně o podrobné rozvedení kapitoly I.3.3, takže některé formulace z uvedené kapitoly se zde mohou vyskytnout znovu; nejsou zde ale znovu uváděna všeobecná historická fakta, obecné souvislosti a souhrnná hodnocení.

Jak už bylo řečeno v kap.I.3.2, Huygensův spis podrobně komentoval už Jakob Bernoulli. Ta místa v Bernoulliově komentáři, která se nám jeví z historického hlediska jako zajímavá [1], uvádíme i v našem komentáři, který se tak na některých místech vlastně stává „komentářem ke komentáři".

Jak už rovněž bylo řečeno v kap.I.3.2, vycházíme zde z textu Huygensova spisu uveřejněného v [8]. První dvě strany spisu obsahují Huygensův dopis F. Schootenovi; tento dopisu zde ponecháme stranou, protože z obecného hlediska už o něm byla řeč v kap.I.3.2 a lze si ho přečíst v připojeném překladu. Vlastní práce začíná stručnou, nijak nenadepsanou úvodní částí; pak následuje hlavní text pojednání členěný do čtrnácti témat (nazývaných *Propositio*), která lze podle obsahu rozdělit do tří skupin, a celý spis je uzavřen pěti neřešenými úlohami. Tohoto členění se přidržíme i zde; uvedeme jednak volný překlad čtyř *Propositiones*, která lze z dnešního hlediska považovat za definice (*Propositiones I - III*) nebo větu (*Propositio IX*), jednak volný překlad zadání všech příkladů obsažených v Huygensově práci (ať už jsou uvedeny jako samostatné *Propositio* nebo jen na doplnění jiného textu), a to vše doplníme komentářem. Latinský text Huygensova pojednání a jeho (pokud možno) přesný překlad je uveden v části II/2.

Právě v uvedených čtyřech *Propositiones* lze spatřovat podstatný rozdíl mezi spisem Huygensovým na straně jedné a korespondencí Pascala s Fermatem na straně druhé; zatímco Pascal s Fermatem pouze řešili úlohy, u Huygense jsou už zaváděny obecné pojmy a postupy.

[1] Vycházíme přitom z německého překladu knihy [7].

# 2 Huygensovy *Propositiones*

## 2.1 *Propositiones I - III*

PROPOSITIO I. *Očekávám-li částku* a *nebo částku* b, *které obě mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je*

$$\frac{a+b}{2}.$$

PROPOSITIO II. *Očekávám-li částky* a, b *nebo* c, *z nichž každou mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je*

$$\frac{a+b+c}{3}.$$

PROPOSITIO III. *Je-li počet případů, v nichž obdržím částku* a, *roven* p, *a počet případů, v nichž obdržím částku* b, *roven* q, *a jestliže předpokládám, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak mé očekávání bude mít hodnotu*

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Těmito definicemi je vlastně poprvé v historii matematiky zavedena střední hodnota diskrétní náhodné veličiny, tento termín se ale u Huygense nevyskytuje. Všechny jeho úlohy se vztahují ke hrám o nějakou částku (sázku) a příslušný pojem se proto nazývá buď *expectatio* nebo *sors*; v této práci budeme v dalším většinou užívat termínu „očekávaná výhra". Zavedení střední hodnoty lze považovat za hlavní Huygensův vklad do teorie pravděpodobnosti; sílu tohoto pojmu demonstruje Huygens tím, že všechny úlohy ve svém spisu řeší pouze pomocí uvedených tří definic, a to i v případech, kdy bychom se dnes přiklonili k jednodušší úvaze kombinatorické.

Huygensovy *Propositiones I - III* jsou zajímavé i z hlediska vzniku tzv. klasické definice pravděpodobnosti, jejímž výchozím pojmem jsou stejně možné (tj. v jakémsi intuitivním smyslu stejně pravděpodobné) elementární náhodné jevy. Huygens pojem „pravděpodobnost" vůbec nezavádí, stačí mu pojem „očekávaná výhra", ale s problémem stejně možných elementárních jevů se nějak vypořádat musí, což činí formulací, že očekávané výsledky může získat „stejně snadno" [2].

Uveďme na závěr pro zajímavost, že Bernoulli jako komentář k Huygensovu *Propositio III* uvádí následující příklad: smísíme-li 3 džbány vína po 13 zlatých se dvěma džbány vína po 8 zlatých, pak jeden džbán smíchaného vína bude mít cenu

$$\frac{\text{cena všeho vína}}{\text{počet džbánů}} = \frac{3.13+2.8}{5} = 11 \quad \text{zlatých.}$$

[2] V originálu zní např. *Propositio I* takto: „*Si* a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere* $\frac{a+b}{2}$.".

## 2.2 *Propositiones IV - IX*

V této části spisu je řešena úloha o rozdělení sázky, o které už byla řeč v první části této práce. Huygens nejprve řeší následující případy pro dva hráče:

a/ m = 1, n = 2 (výsledek 3 : 1);
b/ m = 1, n = 3 (výsledek 7 : 1);
c/ m = 1, n = 4 (výsledek 15 : 1);
d/ m = 2, n = 3 (výsledek 11 : 5);
e/ m = 2, n = 4 (výsledek 13 : 3).

Úlohy a/, b/, d/ se vyskytují už v (prvním zachovaném) dopisu Pascala Fermatovi z 29. VII. 1654.

Huygensovu metodu řešení těchto úloh lze stručně demonstrovat na úloze a/. Bude-li se v sérii her pokračovat, pak v první hře při pokračování jsou možné dva „stejně snadné" (viz *Propositio I*) výsledky: buď vyhraje jeden hráč celou sázku, nebo vznikne situace, ve které jsou na tom oba hráči stejně (oběma chybí do celkového vítězství po jedné hře), což znamená, že při dělení sázky by každý dostal polovinu. Jestliže se tedy nebude v sérii her pokračovat a sázka bude rozdělena, pak hráči, kterému při přerušení chybí k celkovému vítězství už jen jedna hra, přísluší dle *Propositio I* částka

$$\frac{C + \frac{C}{2}}{2}$$

a druhému přísluší zbytek.

Úlohy b/ - e/ lze řešit postupně zcela analogicky vždy s využitím předešlé úlohy.

Pak Huygens přechází k řešení úlohy o rozdělení sázky pro tři „stejně dobré" hráče; metoda řešení je zcela analogická metodě použité pro dva hráče. Nejprve řeší případ, kdy dvěma hráčům chybí po jedné hře a třetímu chybí dvě hry (výsledkem je dělení v poměru 4 : 4 : 1); pak formuluje (i když dle našeho názoru ne právě nejjasněji) svou metodu zcela obecně pro řešení úlohy o rozdělení sázky pro libovolný počet „stejně dobrých" hráčů:

PROPOSITIO IX. *Abychom mohli vypočítat podíl každého hráče při libovolně mnoha hráčích, z nichž některému chybí více a jinému méně her, je třeba zjistit, co náleží hráči, jehož podíl má být zjištěn, když on sám nebo nějaký jiný hráč vyhraje následující hru. Sečtou-li se takto získané části dohromady a dělí-li se tento součet počtem hráčů, obdrží se hledaný podíl dotyčného hráče.*

Jedná se vlastně o rekurentní postup, který je ilustrován na příkladu hry tří hráčů, z nichž jednomu chybí jedna hra a dvěma chybí po dvou hrách [3] (výsledkem je dělení v poměru 17 : 5 : 5). Celé *Propositio* je uzavřeno tabulkou, ve které jsou uvedeny poměry pro rozdělení sázky v sedmnácti situacích, které mohou nastat ve hře tří hráčů.

Porovnáme-li Huygensův postup s postupem Pascalovým (viz kap.I.2.2.3.b), vidíme hned, že základní myšlenka je úplně stejná; rozdíl mezi Pascalem a Huygensem spočívá v tom, že Pascal v korespondenci s Fermatem pouze řeší pří-

[3]Tento příklad se rovněž vyskytuje v Pascalově korespondenci s Fermatem.

klady, zatímco Huygens zformuloval obecnou metodu řešení, a to dokonce pro $n$ stejně dobrých hráčů.

## 2.3 Výklad o hře v kostky

Mezi tabulkou uzavírající *Propositio IX* a následujícím *Propositio X* je text (cca 1 stránka), který se už netýká úlohy o rozdělení sázky, ale představuje vlastně jakýsi úvod k několika následujícím *Propositiones*. Tato část nemá žádný nadpis, ale první písmeno textu [4] je napsáno přes dva řádky; tento typ písma se jinak objevuje pouze na začátku jednotlivých *Propositiones* a Bernoulli tuto část opatřil nadpisem *De tesseris*; považoval ji tedy za samostatnou část Huygensova pojednání.

Z matematického hlediska není tato část zajímavá. Obsahuje nejprve odpověď na otázku, kolika různými způsoby mohou padnout 1, 2, 3 a 4 kostky, a potom je stanoveno, kolika způsoby může při hodu dvěma kostkami padnout součet rovný 2, 3, ... , 12 a kolika způsoby může při hodu třemi kostkami padnout součet rovný 3, 4, ... , 18. Tuto úlohu ale zajímavým způsobem zobecnil Bernoulli a proto se jí budeme chvíli věnovat.

Bernoulli řeší úlohu: házíme $n$ kostkami; kolika způsoby může padnout součet rovný $k$, $n \leq k \leq 6n$ ? Na základě postupného rozboru situací při házení jednou, dvěma,... kostkami, které zapisuje do vhodně uspořádané tabulky (viz dále), dospívá Bernoulli k rekurentnímu postupu řešení úlohy, který bychom mohli zapsat takto:

Označme $Z(n,k)$ počet způsobů, kterými při hodu $n$ kostkami může padnout součet rovný $k$, přičemž $Z(n,k) = 0$ pro $k < n$ nebo $k > 6n$. Pak

$$Z(n,k) = \sum_{i=1}^{6} Z(n-1, k-i).$$

Základní myšlenka tohoto vzorce je jednoduchá: má-li na $n$ kostkách padnout součet $k$, musí na $n-1$ kostkách padnout součet menší o 1 nebo o 2 nebo ... nebo o 6 a každá z chybějících hodnot 1, 2, ... , 6 na poslední kostce může padnout pouze jedním způsobem.

Postupný výpočet hodnot $Z(n,k)$ lze snadno provést v následující tabulce, která představuje zjednodušenou tabulku Bernoulliovu. V hlavičce tabulky je uveden součet $k$, v legendě tabulky je uveden počet kostek $n$ a v políčkách tabulky jsou uvedeny příslušné hodnoty $Z(n,k)$.

[4]Začátek této části zní: *Quod ad tesseras attinet, ... (Pokud se kostek týče, ... ).*

| | $k$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
| 3 | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 | 27 | 25 | 21 | ... |
| 4 | | | | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 80 | 104 | 125 | 140 | ... |
| 5 | | | | | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 205 | 305 | 420 | ... |
| 6 | | | | | | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 456 | 756 | ... |
| $\vdots$ | | | | | | | | $\vdots$ | | | | | | |

Vytvoření tabulky je jednoduché.

I/ První řádek tabulky je zřejmý, protože při házení jednou kostkou může padnout každá z hodnot 1, 2, ... , 6 právě jedním způsobem.

II/ Známe-li $(n-1)$-ní řádek tabulky, pak $n$-tý řádek získáme takto: číslo v $k$-tém sloupci $n$-tého řádku je rovno součtu čísel v šesti sloupcích vlevo od $k$-tého sloupce v $(n-1)$-ním řádku, přičemž prázdné sloupce nebo neexistující sloupce vlevo od prvního sloupce bereme jako nuly.

Uvedený postup řešení je (jako každý rekurentní postup) pro vyšší hodnoty $n$ pracný a zdlouhavý, ale je univerzální a po formální stránce natolik jednoduchý, že jednodušší postup řešení dané úlohy asi nelze nalézt; proto jsme považovali za vhodné věnovat mu zde pozornost.

## 2.4 *Propositiones X - XII*

Další část Huygensovy práce obsahuje nejprve dvě úlohy, které se v podstatě vyskytují už v Pascalově korespondenci s Fermatem; řečeno dnešní terminologií, v *Propositio X* se počítají pravděpodobnosti padnutí alespoň jedné šestky při jednom až šesti hodech jednou kostkou, v *Propositio XI* se počítají pravděpodobnosti alespoň jednoho padnutí dvou šestek současně při jednom, dvou a čtyřech hodech dvěma kostkami. *Propositio XI* pokračuje úvahou (ne výpočtem) o 8 a 24 hodech dvěma kostkami a končí tvrzením (v dnešní terminologii), že pro 24 hodů je zkoumaná pravděpodobnost pořád ještě menší než 1/2, ale pro 25 hodů je už větší než 1/2, což je známý problém rytíře de Méré z prvního dopisu Pascala Fermatovi (viz kap.I.2.2.1).

V *Propositio XII* je položena otázka (v dnešní terminologii), kolika kostkami musíme házet, aby pravděpodobnost padnutí aspoň dvou šestek v prvním hodu byla větší než 1/2. Základní myšlenka řešení spočívá v tom, že pravděpodobnost padnutí dvou šestek v jednom hodu $n$ kostkami je stejná, jako pravděpodobnost padnutí dvou šestek při $n$ hodech jednou kostkou. Huygens provádí výpočet pro dvě a tři kostky, pak už jen konstatuje, že postupným výpočtem by se nakonec došlo k odpovědi na danou otázku: musíme házet aspoň deseti kostkami.

Jakob Bernoulli v *Ars conjectandi* tuto úlohu zobecnil a hledal (v dnešní terminologii) pravděpodobnost toho, že nějaký jev [5] nastane v $n$ hodech kost-

[5]Jevem se rozumí např. „padne 1", „padne 2 nebo 5" atd.

kou aspoň $k$-krát. Při řešení této úlohy Bernoulli zavedl (v dnešní terminologii) binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, neboť jeho výsledek lze v dnešní terminologii zapsat takto:

Pravděpodobnost, že při $n$ hodech kostkou nastane nějaký jev $A$ právě $k$-krát, je rovna

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $p$ je pravděpdobnost [6] jevu $A$.

Svůj komentář Bernoulli uzavírá řešením Huygensovy úlohy, přičemž fakticky počítá pravděpodobnost doplňkového jevu; tento termín ale nezavádí, prostě počítá „šanci soupeře". Huygensova úloha je tak převedena na řešení nerovnice:

*Pravděpodobnost, že při hodu n kostkami padne nejvýše jedna šestka =*

$$= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{1}{2},$$

což lze upravit do tvaru

$$10 + 2n < 5\left(\frac{6}{5}\right)^n$$

a tuto nerovnici Bernoulli řeší jednak postupným dosazováním, jednak graficky [7].

## 2.5 *Propositiones XIII - XIV*

V *Propositio XIII*, které dle našeho názoru není zajímavé ani z hlediska historického, ani metodického, je řešena následující úloha:

*Hráči A a B spolu hrají o nějakou sázku tak, že jeden z nich jednou hodí dvěma kostkami; padne-li sedm bodů, vyhrává A, padne-li deset bodů, vyhrává B, při každém jiném počtu bodů bude sázka rozdělena mezi oba hráče rovným dílem. Jaká je očekávaná výhra každého hráče?*

Řešení úlohy je jednoduché; protože při házení dvěma kostkami může 7 bodů padnout šesti způsoby a 10 bodů třemi způsoby, zbývá 27 možných situací (z celkového počtu 36 možných situací při házení dvěma kostkami), při nichž se sázka bude dělit napůl. Označíme-li celkovou sázku jako $C$, pak očekávaná výhra hráče $A$ dle *Propositio III* bude

$$\frac{6.C + 27 \cdot \frac{C}{2}}{36} = \frac{39}{72} \cdot C \quad ;$$

[6] Bernoulli ovšem neužívá termínu „pravděpodobnost", ale používá zlomku, který má v čitateli počet případů odpovídajících danému jevu a ve jmenovateli počet všech možných případů.

[7] Znovu připomínáme, že Bernoulli neužívá pojmu pravděpodobnost, takže jeho výpočet je poněkud odlišný od našeho.

výsledek je tedy 13/24 sázky pro hráče A, zbytek pro hráče B.

Následující *Propositio XIV* lze charakterizovat jako úvod k úlohám, které jsou neřešené umístěny v dodatku; je zajímavé tím, že k řešení úlohy Huygens sestavuje soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Zadání je následující:

*Hráči A a B spolu hrají o nějakou sázku tak, že střídavě hází dvěma kostkami a hráč A hází jako první; A vyhraje, hodí-li jako první šest bodů, B vyhraje, hodí-li jako první sedm bodů. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*

(Výsledek je 30 : 31.)

Tuto úlohu Huygens sdělil dopisem Robervalovi a od něho se úloha dostala k Fermatovi a Pascalovi; ti Huygensovi na oplátku prostřednictvím Carcavyho poslali jiné úlohy, které se pak objevily v dodatku k Huygensovu spisu (podrobněji o této korespondenci viz [6]).

Huygensův postup řešení lze stručně zapsat takto:

Označme $x$ očekávanou výhru hráče $B$ před hodem hráče $A$, $y$ očekávanou výhru hráče $B$ před vlastním hodem. Protože 6 bodů může padnout pěti způsoby a 7 bodů může padnout šesti způsoby, dle *Propositio III* platí

$$x = \frac{5.0 + 31.y}{36},$$

$$y = \frac{6.C + 30.x}{36},$$

a řešením této soustavy dostaneme $x = \frac{31}{61}C$, z čehož plyne hledaný poměr 30 : 31.

Jakob Bernoulli v *Ars conjectandi* podal zcela odlišnou metodu řešení této (a podobných) úloh; vyložíme ji zde pomocí dnešní terminologie, protože jinak bychom museli připojit obsáhlé předběžné úvahy. Základní myšlenka této metody spočívá v použití součtu geometrické řady [8].

Uvažujme nejprve nekonečnou posloupnost hráčů, z nichž postupně každý sehraje jednu hru a celá série her končí ve chvíli, kdy některý hráč svoji hru vyhraje. Hráči s lichými pořadovými čísly mají pravděpodobnost výhry ve své hře (pokud na ně ovšem vůbec dojde řada) rovnu $p$, hráči se sudými pořadovými čísly mají pravděpodobnost výhry ve své hře rovnu $q$; přitom $p + q < 1$, protože jsou možné i hry „nerozhodné“, ve kterých nevyhrává žádný hráč a hra pokračuje. Nyní nahradíme všechny hráče s lichými pořadovými čísly hráčem $A$, všechny hráče se sudými pořadovými čísly hráčem $B$ a dostáváme následující tabulku, ve které jsou pravděpodobnosti výher jednotlivých hráčů v dané posloupnosti her:

[8] V této souvislosti považujeme za zajímavý fakt, že k *Ars conjectandi* je připojeno pojednání o řadách (viz též kap.IV.1.2).

| Číslo hráče | Hráč | Pravděpodobnost výhry |
|---|---|---|
| 1 | $A$ | $p$ |
| 2 | $B$ | $(1-p)q$ |
| 3 | $A$ | $(1-p)(1-q)p$ |
| 4 | $B$ | $(1-p)^2(1-q)q$ |
| 5 | $A$ | $(1-p)^2(1-q)^2p$ |
| 6 | $B$ | $(1-p)^3(1-q)^2q$ |
| 7 | $A$ | $(1-p)^3(1-q)^3p$ |
| 8 | $B$ | $(1-p)^4(1-q)^3q$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Z toho je zřejmé, že pravděpodobnost výhry hráče $A$ v celé sérii her je rovna

$$p + (1-p)(1-q)p + (1-p)^2(1-q)^2p + (1-p)^3(1-q)^3p + \cdots$$

a lze ji tedy vyjádřit jako součet geometrické řady s prvním členem $p$ a kvocientem $(1-p)(1-q)$; analogická úvaha platí i pro pravděpodobnost výhry hráče $B$. Po dosazení $p = 5/36$, $q = 6/36$ dostáváme řešení Huygensova *Propositio XIV*.

Bernoulli zde vlastně využívá metody úplné indukce, za jejíhož objevitele je považován Pascal (viz [3], II, str. 749); protože ale Bernoulli zřejmě Pascalův spis *Traité du triangle arithmétique* neznal (viz kap.I.4.2), lze říci, že metodu úplné indukce objevil znovu nezávisle na Pascalovi.

# 3 Huygensova *Problemata*

## 3.1 *Problema I.*

První úloha, kterou zadal Huygensovi Fermat prostřednictvím Carcavyho, zní takto:

*A a B hrají se dvěma kostkami tak, že A vyhraje, když hodí jako první šest bodů, a B vyhraje, když hodí jako první sedm bodů. A začíná hru jedním hodem, pak hází B dvakrát za sebou, pak má A dva hody a tak dále, dokud jeden z nich nevyhraje. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*
*Odpověď: 10355 : 12276.*

### 3.1.1 Řešení Huygensovou metodou

Huygens sám postup řešení této úlohy nepublikoval, ale z řešení uvedeného v *Propositio XIV* lze jeho postup snadno rekonstruovat (což ostatně udělal už Bernoulli (viz [7])).

Označme
$t$ = očekávaná výhra hráče $A$ před začátkem hry,
$x$ = očekávaná výhra hráče $A$ před prvním hodem hráče $B$,

$y$ = očekávaná výhra hráče $A$ před druhým hodem hráče $B$,
$z$ = očekávaná výhra hráče $A$ po druhém hodu hráče $B$.

Platí (dle *Propositio III*)

$$t = \frac{5.C + 31.x}{36},$$

$$x = \frac{6.0 + 30.y}{36},$$

$$y = \frac{6.0 + 30.z}{36},$$

$$z = \frac{5.C + 31.t}{36}$$

a máme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, z nichž lze vypočítat

$$t = \frac{10355}{22631}C;$$

očekávané výhry hráčů $A$, $B$ jsou v poměru $t : (1 - t)$.

### 3.1.2 Spinozovo řešení

V r. 1687 byla v Haagu vydána anonymní práce obsahující jednak pojednání o duze, jednak pojednání o teorii pravděpodobnosti. V tomto „pravděpodobnostním" pojednání je uvedeno všech pět úloh z Huygensova dodatku a první z nich je řešena. V současné době se považuje za jisté, že autorem této práce byl známý nizozemský filozof Benedikt Spinoza; svědčí to o aktivním Spinozově přístupu k aktuálním problémům matematické teorie pravděpodobnosti oné doby [9]. Z matematického hlediska je Spinozovo řešení variantou řešení Huygensova, svědčí ale o tom, že Spinoza Huygensovu metodu dobře zvládnul.

Základní myšlenkou Spinozova postupu je rozdělení úlohy do dvou částí. Nejprve řeší pomocnou úlohu:

*A a B hrají se dvěma kostkami tak, že A vyhraje, když hodí jako první šest bodů, a B vyhraje, když hodí jako první sedm bodů. Každý z hráčů má dva hody za sebou, B hází jako první. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*

Postup řešení je „huygensovský". Označme
$u$ = očekávaná výhra hráče $A$ před prvním hodem hráče $B$,
$v$ = očekávaná výhra hráče $A$ před prvním vlastním hodem.

Platí (dle *Propositio III*)

$$u = \frac{6.0 + 30.(\frac{6.0+30.v}{36})}{36},$$

$$v = \frac{5.C + 31.(\frac{5.C+31.u}{36})}{36},$$

[9]Podrobnosti lze najít v článku Dutka, J.: *Spinoza and the Theory of Probability.* Scripta mathematica 19 (1953), 1, 24-33.

a řešením této soustavy dostaneme

$$u = \frac{8375}{22631} C.$$

Pak Spinoza přechází k řešení původní Huygensovy úlohy a s využitím výsledku pomocné úlohy zjistí, že očekávaná výhra hráče $A$ při ní je rovna

$$\frac{5.C + 31.(\frac{8375}{22631} C)}{36},$$

z čehož plyne Huygensův výsledek.

### 3.1.3 Bernoulliovo řešení

Jak už bylo řečeno u *Propositio XIV*, Bernoulli přišel s myšlenkou na řešení pravděpodobnostních úloh pomocí součtu geometrické řad a této myšlenky použil i při řešení této úlohy. Jeho postup, rozebraný podrobně u *Propositio XIV*, lze pro řešení této úlohy přeformulovat takto:

Uvažujme nejprve nekonečnou posloupnost hráčů, z nichž postupně každý sehraje jednu hru, přičemž hráči č. 2, 3, 6, 7, 10, 11, atd. mají pravděpodobnost výhry ve své hře rovnou $q$, zbývající hráči (tj. hráči č. 1, 4, 5, 8, 9, atd.) mají pravděpodobnost výhry ve své hře rovnou $p$. Nyní všechny hráče s pravděpodobností výhry rovnou $p$ nahradíme hráčem $A$, všechny hráče s pravděpodobností výhry rovnou $q$ nahradíme hráčem $B$ a dostáváme následující tabulku, v níž jsou pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů v dané posloupnosti her:

| Číslo hráče | Hráč | Pravděpodobnost výhry |
|---|---|---|
| 1 | $A$ | $p$ |
| 2 | $B$ | $(1-p)q$ |
| 3 | $B$ | $(1-p)(1-q)q$ |
| 4 | $A$ | $(1-p)(1-q)^2p$ |
| 5 | $A$ | $(1-p)^2(1-q)^2p$ |
| 6 | $B$ | $(1-p)^3(1-q)^2q$ |
| 7 | $B$ | $(1-p)^3(1-q)^3q$ |
| 8 | $A$ | $(1-p)^3(1-q)^4p$ |
| 9 | $A$ | $(1-p)^4(1-q)^4p$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Z toho je zřejmé, že pravděpodobnost výhry hráče $A$ v celé sérii her je rovna

$$p + (1-p)(1-q)^2p + (1-p)^2(1-q)^2p + (1-p)^3(1-q)^4p + (1-p)^4(1-q)^4p + \cdots$$

a lze ji tedy vyjádřit jako součet dvou geometrických řad (sčítáme „ob jeden člen“), přičemž obě tyto řady mají stejný kvocient rovný $(1-p)^2(1-q)^2$; analogická úvaha platí i pro pravděpodobnost výhry hráče $B$. Po dosazení $p = 5/36$, $q = 6/36$ dostáváme řešení Huygensovy úlohy.

### 3.1.4 Bernoulliovo zobecnění úlohy

Aby ukázal sílu své metody, uvádí Bernoulli čtyři zobecnění Huygensovy úlohy, jejichž řešení pomocí řad nevede ke sčítání geometrické řady, ale alternující řady. Zadání těchto zobecnění je následující:

Dva hráčů $A$, $B$ házejí dvěma kostkami a vyhrává ten, který jako první hodí 7 bodů; jako první hází hráč $A$. Počty hodů jednotlivých hráčů ale nejsou konstantní; všechny čtyři varianty úlohy lze popsat následující tabulkou, ve které je uvedeno, kolikrát za sebou hází každý hráč v každé sérii hodů:

| Číslo | Var.1 | | Var.2 | | Var.3 | | Var.4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| série | A | B | A | B | A | B | A | B |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 6 |
| 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 7 | 8 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Stejně jako při řešení Huygensovy úlohy vyjádří Bernoulli pravděpodobnost výhry hráče $A$ (resp. $B$) pomocí nekonečné řady; označíme-li symbolem $q$ pravděpodobnost, že házející hráč nevyhraje [10], pak například pro 1. variantu dostává Bernoulli pro pravděpodobnosti výhry hráčů $A$, $B$ řady

$$P(A) = 1 - q + q^2 - q^4 + q^5 - q^8 + q^9 - q^{13} + q^{14} - q^{19} + \cdots \quad ,$$

$$P(B) = 1 - P(A) = q - q^2 + \cdots \quad .$$

Po vypsání deseti prvních členů všech osmi řad pro pravděpodobnosti výher hráčů $A$, $B$ ve všech čtyřech variantách Bernoulli konstatuje, že tyto řady nelze sečíst, ale snadno lze vypočítat přibližné hodnoty součtů s libovolnou požadovanou přesností a uvádí pravděpodobnosti výhry hráče $A$ ve všech čtyřech variantách s přesností $\pm 10^{-5}$:

Var.1: 0,71931; Var.2: 0,40058; Var.3: 0,59679; Var.4: 0,52392.

Z vlastností alternujících řad plyne, že k dosažení požadované přesnosti musíme sečíst všechny členy naší řady až do $q^k$, kde $k$ je určeno podmínkou $q^k < 10^{-5}$. Uvážíme-li, že v našem případu je $q = 5/6$, dostáváme $k = 64$ a sečítat všechny členy daných řad až do 64. mocniny se nám nejeví jako snadný výpočet; Bernoulli bohužel neříká ani slovo o tom, jak ke svým numerickým výsledkům dospěl.

## 3.2 *Problema II.*

Formulace úlohy je následující:

*Tři hráči A, B a C mají dvanáct kamenů, z nichž čtyři jsou bílé a osm je černých, a hrají spolu tak, že zvítězí ten z nich, který jako první naslepo*

[10] V našem příkladu je tedy $q = 30/36$, protože je právě 6 možností, jak na dvou kostkách může padnout 7 bodů.

*vytáhne bílý kámen; jako první táhne A, pak B, poté C, pak zase A a tak dále. Jaký je poměr očekávaných výher všech tří hráčů?*

U této úlohy Huygens neuvedl výsledek. Jakob Bernoulli [7] upozornil na to, že zadání úlohy není jednoznačné; není jasné, zda každý hráč má svých dvanáct kamenů nebo zda všichni tři hráči tahají z jedné hromady, a není ani jasné, zda se vytažený kámen vrací nebo nevrací zpět. Z Huygensovy korespondence s van Huddem [11] uskutečněné v r. 1665 (viz [6]) plyne, že Huygens měl na mysli variantu s vracením; pak nezáleží na tom, kolik hromádek kamenů je a úlohu lze poměrně snadno řešit „huygensovsky" (výsledek je 9 : 6 : 4); Van Hudde řešil úlohu bez vracení při společné hromádce kamenů (pak je výsledek 77 : 53 : 35). Bernoulli podal řešení všech tří variant, přičemž první dvě varianty řešil jednak „klasicky", jednak pomocí řad; úlohu bez vracení při individuálních hromádkách kamenů řešil pouze „klasicky" a našel výsledek 6476548 : 4231370 : 2768457. Uveďme zde postupně základní myšlenky všech tří Bernoulliových „klasických" řešení.

a/ Varianta s vracením.

Označme
$x$ = pravděpodobnost výhry hráče $A$ před vlastním tahem;
$y$ = pravděpodobnost výhry hráče $B$ před tahem hráče $A$;
$z$ = pravděpodobnost výhry hráče $C$ před tahem hráče $A$.

Hráč $A$ hru začíná; buď vyhraje (s pravděpodobností 1/3) nebo prohraje (s pravděpodobností 2/3) a prohrou klesne na poslední místo ve frontě na tahání, takže bude mít stejnou pravděpodobnost výhry jako hráč $C$ na začátku; platí tedy

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot z \quad .$$

Jestliže hráč $A$ vyhraje, tak hráč $B$ prohrál. Jestliže hráč $A$ prohraje, postoupí hráč $B$ na první místo ve frontě na tahání a bude tedy mít stejnou pravděpodobnost výhry jako hráč $A$ na začátku; z toho plyne

$$y = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot x \quad .$$

Jestliže hráč $A$ vyhraje, tak hráč $C$ prohrál. Jestliže hráč $A$ prohraje, postoupí hráč $C$ na druhé místo ve frontě na tahání a bude tedy mít stejnou pravděpodobnost výhry jako hráč $B$ na začátku; z toho plyne

$$z = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot y \quad .$$

Jedná se tedy o typicky „huygensovský" přístup; řešením soustavy uvedených tří rovnic získáme již uvedený výsledek $x : y : z = 9 : 6 : 4$.

[11] Johan van Waweren Hudde (některé prameny uvádějí jméno ve tvaru Hudden) (1628 - 1704) byl 30 let starostou Amsterodamu; zabýval se matematikou (viz [3], II, str. 801, 919), výpočty rent (viz [3], III, str. 48) a dalšími problémy.

b/ Varianta bez vracení při společné hromadě kamenů.

Bernoulli řeší úlohu rekurentním postupem, jehož základní myšlenku lze obecně formulovat takto:

Označme $P_H(L,n)$ pravděpodobnost výhry hráče $H$, je-li na tahu hráč $L$ (proměnné $H$, $L$ mohou nabývat hodnot $A$, $B$, $C$) a v hromadě je $n$ černých kamenů (navíc tam jsou pochopitelně všechny čtyři bílé kameny, jinak by se nehrálo). Hledané pravděpodobnosti lze popsat rekurentními rovnicemi

$$P_A(A,8) = \frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot P_A(B,7) \quad ,$$

$$P_B(A,8) = \frac{8}{12} \cdot P_B(B,7) \quad ,$$

$$P_C(A,8) = \frac{8}{12} \cdot P_C(B,7) \quad ,$$

k jejichž řešení bychom v dalším kroku potřebovali pravděpodobnosti $P_H(C,6)$, v dalším kroku $P_H(A,5)$, atd., až bychom zjistili (stejně jako Bernoulli), že úlohu musíme začít řešit výpočtem pravděpodobností $P_H(B,1)$. Celý Bernoulliův výpočet lze zapsat do následující tabulky:

| Počet černých | Hráč na tahu | Pravděpodobnost výhry hráče A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | B | 0 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 2 | A | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |
| 3 | C | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 4 | B | $\frac{1}{7}$ | $\frac{39}{70}$ | $\frac{3}{10}$ |
| 5 | A | $\frac{11}{21}$ | $\frac{13}{42}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | C | $\frac{11}{35}$ | $\frac{13}{70}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 7 | B | $\frac{1}{5}$ | $\frac{53}{110}$ | $\frac{7}{22}$ |
| 8 | A | $\frac{7}{15}$ | $\frac{53}{165}$ | $\frac{7}{33}$ |

Z posledního řádku tabulky plyne poměr očekávaných výher hráčů 77 : 53 : 35.

c/ Varianta bez vracení při individuálních hromadách kamenů

Bernoulli řeší úlohu opět rekurentně. Předpokládejme, že každý hráč má ve své hromadě $m$ bílých kamenů a $n$ černých kamenů a všichni tři hráči vytáhnou po jednom kameni. Vzniklé situace lze popsat následující tabulkou, ve které $b$ znamená vytažení bílého kamene, $c$ znamená vytažení černého kamene, $N = m + n$.

| Tah hráče | | | Vyhrává | Pravděpodobnost |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | hráč | situace |
| b | b | b | A | $\frac{m^3}{N^3}$ |
| b | b | c | A | $\frac{m^2.n}{N^3}$ |
| b | c | b | A | $\frac{m^2.n}{N^3}$ |
| b | c | c | A | $\frac{m.n^2}{N^3}$ |
| c | b | b | B | $\frac{m^2.n}{N^3}$ |
| c | b | c | B | $\frac{m.n^2}{N^3}$ |
| c | c | b | C | $\frac{m.n^2}{N^3}$ |
| c | c | c | ** | $\frac{n^3}{N^3}$ |

Symbol ** v posledním řádku tabulky znamená, že v tomto případu nevyhrává žádný hráč, ale hra pokračuje, přičemž každý z hráčů má ve své hromadě už jen $n - 1$ černých kamenů.

Označme $P_H(n)$ pravděpodobnost výhry hráče $H$, má-li každý z hráčů ve své hromadě $n$ černých kamenů. Z uvedené tabulky plyne, že

$$P_A(n) = \frac{m^3 + 2.m^2.n + m.n^2 + n^3.P_A(n-1)}{N^3} \quad ,$$

$$P_B(n) = \frac{m^2.n + m.n^2 + n^3.P_B(n-1)}{N^3} \quad ,$$

$$P_C(n) = \frac{m.n^2 + n^3.P_C(n-1)}{N^3} \quad .$$

Protože $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = P_C(0) = 0$, může být proveden postupný výpočet pro dané $m = 4$ od $n = 0$ až do hledaného $n = 8$. Protože nám nejde o pravděpodobnosti, ale pouze o poměr pravděpodobností, lze výpočet poněkud zjednodušit (stačí počítat čitatele zlomků), ale i pak je poměrně zdlouhavý. V následující tabulce je shrnut Bernoulliův výpočet.

| n | $P_A(n)$ : $P_B(n)$ : $P_C(n)$ |
|---|---|
| 0 | 1 : 0 : 0 |
| 1 | 101 : 20 : 4 |
| 2 | 2351 : 770 : 254 |
| 3 | 26851 : 11270 : 4754 |
| 4 | 198351 : 97020 : 47629 |
| 5 | 120823 : 65660 : 35781 |
| 6 | 532423 : 312620 : 183957 |
| 7 | 1984423 : 1236620 : 771957 |
| 8 | 6476548 : 4231370 : 2768457 |

## 3.3 *Problemata III - IV*

Z dnešního hlediska se jedná o jednoduché kombinatorické úlohy. Bernoulli řeší v první části svého spisu třetí úlohu opět rekurentně, u čtvrté pouze odkazuje na třetí část svého spisu, kde třetí i čtvrtou úlohu řeší kombinatoricky.

PROBLEMA III. *A vyhraje nad B, když ze čtyřiceti hracích karet, z nichž vždy deset má stejnou barvu, vytáhne čtyři karty různých barev, jinak vyhrává B. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*
*Odpověď: 1000 : 8139.*

Stejně jako úlohu první, i tuto zadal Huygensovi Fermat prostřednictvím Carcavyho. Kombinatorické řešení je elementární; všech možných čtveřic vytažených karet je $\binom{40}{4}$, všech různobarevných čtveřic je $10^4$, takže poměr očekávaných výher obou hráčů je

$$10^4 : \left(\binom{40}{4} - 10^4\right) = 10^4 : 81390 \quad .$$

PROBLEMA IV. *Hráči A a B mají opět dvanáct kamenů, čtyři bílé a osm černých, a hráč A vyhraje nad B, když naslepo vytáhne sedm kamenů, mezi nimiž se budou nalézat tři bílé; jinak vyhrává B. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*

Huygens u této úlohy neuvedl odpověď, ale řešil ji v již zmíněné korespondenci s van Huddem (výsledek je 35 : 64); van Hudde řešil i variantu této úlohy, při které $A$ vyhraje, vytáhne-li nejméně tři bílé; pak je výsledek 14 : 19.

Jedná se opět o jednoduchou kombinatorickou úlohu. Všech možných sedmic vytažených kamenů je $\binom{12}{7}$ a všech případů příznivých hráči $A$ v původní Huygensově úloze (kde je formulace míněna jako ... *(právě) tři bílé*...) je $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3}$, při variantě van Huddeho je počet všech případů příznivých hráči $A$ roven $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3} + \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{4}$; z toho plynou uvedené výsledky.

## 3.4 *Problema V*

PROBLEMA V. *A a B mají po dvanácti mincích a hrají spolu třemi kostkami tak, že padne-li jedenáct bodů, pak A dá B jednu minci, padne-li ale čtrnáct bodů, obdrží A od B jednu minci. Hru vyhrává ten hráč, který jako první získá všechny mince. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*
*Odpověď: 244 140 625 : 282 429 536 481.*

Úlohu zadal Huygensovi Pascal prostřednictvím Carcavyho; jako tzv. úloha o ruinování hráče se objevuje v různých variantách v učebnicích i dnes [12] a proto se jejím historickým aspektům budeme věnovat poněkud podrobněji.

Bernoulli navrhuje řešit tuto úlohu indukcí podle počtu mincí, neukázal ale, jak si provedení indukce představuje. V [7], str. 71 a násl. řeší úlohu v případech, kdy hráči mají na začátku po jedné, dvou a třech mincích; tyto úlohy řeší obecně: písmenem $b$ označuje počet případů příznivých hráči $A$ (tj. v řešeném problému V počet způsobů, jimiž může při házení třemi kostkami padnout 14 bodů (takže $b = 15$)), písmenem $c$ označuje počet případů příznivých hráči $B$ (tj. v řešeném problému V počet způsobů, jimiž může při házení třemi kostkami padnout 11 bodů (takže $c = 27$)). Po vyřešení těchto tří případů uzavírá obecný rozbor úlohy slovy ([7], str. 74):

*„Protože jsme nyní nalezli, že naděje A a B se k sobě mají jako čísla b a c, má-li každý hráč jednu minci, jako čtverce těchto čísel, má-li každý hráč dvě mince, a jako třetí mocniny, má-li každý hráč tři mince, pak zjišťujeme pomocí indukce, že při libovolně mnoha mincích jsou naděje vždy v poměru mocnin čísel b a c, jejichž exponenty jsou rovny počtu mincí, které má každý hráč na začátku.“*

Bernoulli bohužel neukazuje, jak tuto indukci provést, a z jeho výpočtů pro jednu, dvě a tři mince to není jasné; zdá se proto, že Bernoulli se zde nechal vést intuicí (ostatně správnou) a důkaz indukcí už neprováděl. Poznamenejme ještě, že na závěr této úlohy Bernoulli podal (bez důkazu) i její řešení v případu, že hráči nemají na začátku stejný počet mincí.

Tyto skutečnosti nás inspirovaly ke snaze pokusit se zrekonstruovat Huygensův postup řešení této úlohy; vycházíme přitom z postupů řešení úloh uvedených v *Propositiones I. - XIV.*, ale terminologii používáme dnešní. Toto „quasihuygensovské“ řešení tedy mohlo dle našeho názoru vypadat takto:

Označme

$p_i$, $i = 0, 1, \ldots, 24$ pravděpodobnost výhry hráče $A$, má-li v daném okamžiku $i$ mincí;

$q_i$, $i = 0, 1, \ldots, 24$ pravděpodobnost výhry hráče $B$, má-li v daném okamžiku $i$ mincí;

$P$ pravděpodobnost výhry hráče $A$ v jednotlivé hře;

$Q$ pravděpodobnost výhry hráče $B$ v jednotlivé hře.

Pro tyto pravděpodobnosti platí soustavy rovnic (z nichž se při řešení pro-

[12] Viz např. FELLER, W.: *Vvedenije v teoriju verojatnostej i jejo priloženija.* (Překlad z angličtiny). Mir, Moskva 1967, str. 336 a násl.

blému ruinování hráče vychází i dnes:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 = 0, \\ p_i &= P.p_{i+1} + Q.p_{i-1} \quad \text{pro } i = 1, \ldots, 23, \\ q_i &= Q.q_{i+1} + P.q_{i-1} \quad \text{pro } i = 1, \ldots, 23, \\ p_{24} &= q_{24} = 1. \end{aligned}$$

Jak už bylo ukázáno, Huygens takovýchto rovnic pro řešení pravděpodobnostních problémů používal a není důvod domnívat se, že by jich nepoužil i zde. Jeho cílem ovšem nebylo řešit uvedené soustavy, ale najít poměr $p_{12}/q_{12}$. Lze proto předpokládat, že si při zkoumání poměrů $p_i/q_i$ povšimnul toho, že platí

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$$

pro $i = 2, \ldots, 24$. K tomuto poznatku lze dojít postupným výpočtem poměru $p_i/q_i$ pro $i = 2, \ldots, 24$ a viděli jsme už, že právě takovýmito postupnými výpočty Huygens řešil úlohu o rozdělení sázky; obecně lze tento tento vztah dokázat indukcí podle $i$. Z uvedeného vztahu pak plyne

$$\frac{p_i}{q_i} = \left(\frac{Q}{P}\right)^{i-1} \frac{p_1}{q_1};$$

protože $p_{24} = q_{24} = 1$, je podle předešlého

$$\frac{p_1}{q_1} = \left(\frac{P}{Q}\right)^{23}$$

a z toho plyne pro hledaný poměr

$$\frac{p_{12}}{q_{12}} = \left(\frac{P}{Q}\right)^{12},$$

což je obecný výsledek Bernoulliův a po dosazení hodnot z problému V dostáváme Huygensův výsledek.

I když pochopitelně nemůžeme dokázat, že Huygens řešil danou úlohu právě takto, domníváme se, že předložený postup je plně v souladu se způsobem, kterým Huygens řešil jiné úlohy; navíc je určitě jednodušší než způsob navržený Bernoullim. Považovali jsme proto za vhodné zde tento pokus o rekonstrukci Huygensova řešení uvést.

# 4 Závěrečná poznámka: Huygens a Caramuel

Jakob Bernoulli nebyl prvním matematikem, který přetiskl a komentoval Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ*. Již v r. 1670 vyšel mohutný spis (cca 1800 stránek formátu (zhruba) A4) Jana Caramuela z Lobkovic *Mathesis biceps, Vetus et Nova*, ve kterém je Huygensův spis rovněž otištěn a stručně komentován [13]. O této pravděpodobnostní části Caramuelova spisu je pojednáno např. v [1], str. 44 - 45 a nebudeme se jí zde zabývat, upozorníme pouze na dva zajímavé fakty.

První spočívá v tom, že Caramuel uvádí jako autora citovaného spisu nikoli Huygense, ale dánského astronoma Christiana Severina Longomontana [14]; není jasné, jak k tomuto Caramuelovu omylu mohlo dojít, protože musel mít k dispozici celou Huygensovu práci (jinak by ji nemohl otisknout).

Druhý zajímavý fakt souvisí s pronikáním ideí počtu pravděpodobnosti do českých zemí. Jeden exemplář uvedeného Caramuelova spisu je uložen v Národní knihovně České republiky v Praze pod signaturou 49 A 42; tento exemplář má zajímavou provenienci. Podle rukopisné poznámky na zadní straně titulního listu patřil do knihovny hraběte Ignáce Karla Šternberka, podle rukopisné poznámky na další straně patřil do knihovny hybernského [15] kláštera u sv. Ambrože v Praze. Domníváme se proto, že se tato kniha nalézala v Praze už před smrtí hraběte Šternberka, tj. před rokem 1700 a je to (pokud je nám v tuto chvíli známo) asi nejstarší výskyt Huygensova pravděpodobnostního pojednání (i když v poněkud zamaskované podobě) v českých zemích. Do hybernské knihovny přešel tento spis nejspíš po smrti hraběte Šternberka [16].

Není jasné, zda si Huygensova pojednání (zabírajícího v Caramuelově knize necelých 10 stránek z již zmíněného celkového počtu cca 1800 stránek) vůbec někdo v Praze všiml; stejně tak není známá žádná práce vzniklá v českých zemích, která by reagovala na Bernoulliův spis *Ars conjectandi*, nalézající se v knihovně pražského Klementina už od r. 1721 [17]. Zdá se, že počet pravděpodobnosti matematiky působící v českých zemích nijak nezaujal a začal se u nás nesměle rozvíjet až koncem 19. století.

♠ ♡ ♣ ♢

---

[13] Základní informace o Janu Caramuelovi z Lobkovic (1606 - 1682) lze nalézt například v knize SOUSEDÍK, S.: *Filosofie v českých zemích mezi středověkem a osvícenstvím.* Vyšehrad, Praha 1997. Není to ovšem pojednání o Caramuelovi jako matematikovi; zdá se, že o Caramuelovu matematickém dílu u nás vyšla pouze práce SMOLÍK, J.: *Jan Caramuel z Lobkovic a jeho dílo: „Mathesis biceps, vetus et nova“.* Šestá (sedmá) výroční zpráva o obecním gymnasium reálním v Praze, podaná koncem školního roku 1872 (1873).

[14] Podle [1], str. 45 žil v letech 1562 - 1647; stručná informace o něm je např. v [3], II, str. 712.

[15] Hyberni (podle Ottova slovníku naučného: *hiberňáci*) byli irští františkáni, kteří byli koncem XVI. století vyhnáni z Irska královnou Alžbětou a okolo r. 1630 se usadili v Praze v bývalém františkánském klášteře na Novém Městě v ulici, která později byla podle nich nazvána Hybernskou. V době josefinských reforem byl tento klášter zrušen a v jeho budově byla později umístěna hlavní celnice, podle které se budově začalo říkat Nový Ungelt.

[16] Z tohoto hlediska je ovšem třeba upozornit na údaj v knize WURZBACH, K.: *Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich.* B.38, Wien 1879, kde se uvádí, že po smrti hraběte přešla knihovna do karolinského kolegia.

[17] Jedná se o exemplář uložený v Národní knihovně ČR pod signaturou 14 F 43.