Ján Čižmár

Biracionálne transformácie 1860 - 1960

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. I. Sborník. (Slovak). Praha: Prometheus, 1998. pp. 79–98.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/401611`

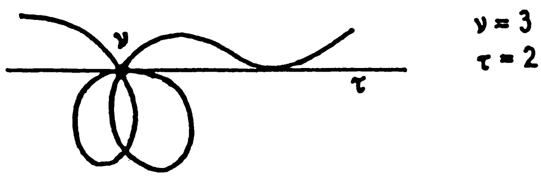
BIRACIONÁLNE TRANSFORMÁCIE 1860 – 1960

Historický prehľad

JÁN ČIŽMÁR

Úvod

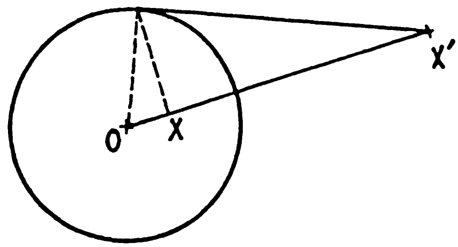
Lineárne transformácie patria v súčasnosti do základnej tematiky vysokoškolskej výučby geometrie v rámci všeobecnej matematickej prípravy v matematických, technických i ekonomických špecializáciách odborného aj učiteľského štúdia. Popri téme metrických transformácií, ktorá spravidla nechýba v žiadnom kurze matematiky, sa ešte často objavujú afinné transformácie, ojedinele ekviformné (konformné) transformácie a výnimočne projektívne transformácie. Systematický výklad grúp geometrických transformácií, vychádzajúci z projektívnej grupy, z ktorej možno stupňovanými špecializáciami získať postupne afinnú, ekviformnú a metrickú grupu, vypadol z programu základného vysokoškolského štúdia a presunul sa do malých skupín niektorých špecializácií postgraduálneho štúdia. Všetky lineárne geometrické transformácie majú spoločné niektoré vlastnosti, ako sú napr. zachovanie incidencie, špeciálne kolineárnosti, invariantnosť dvojpomeru štvorice bodov priamky, invariantnosť stupňa algebraickej čiary, resp. plochy, invariantnosť násobnosti bodu, resp. násobnosti dotyčnice algebrickej čiary, resp. plochy (obr. 1), invariantnosť rodu algebrickej krivky atď.



Obr. 1

Všetky tieto vlastnosti možno považovať za všeobecné vlastnosti projektívnej grupy, ktoré sa prenášajú na jej postupne sa zužujúce špecializácie – afinnú, ekviformnú a metrickú grupu. Každá z týchto špecializácií je charakterizovaná svojím špecifickým invariantom: v afinnej grupe je to (deliaci) pomer (troch bodov na priamke), v ekviformnej grupe veľkosť uhla a v metrickej grupe vzdialenosť dvoch bodov.

Nápadnou vlastnosťou, ktorou sa líšia nelineárne geometrické transformácie od lineárnych, je vo všeobecnosti rôznosť stupňa algebrickej čiary a stupňa jej obrazu v transformácii. Napr. *inverzia vzhľadom na kružnicu* (v rovine) (obr. 2) alebo *inverzia vzhľadom na guľovú plochu* (v priestore) zobrazujú priamku (= algebrická čiara stupňa 1) na priamku alebo kružnicu (= algebrickú čiaru stupňa 2).



Obr. 2

Štúdiom inverzie sa zaoberal už Apollonios (3. st. pr. n. l.) a jeho nasledovníci, v stredoveku arabskí matematici a pod ich vplyvom aj niektorí európski matematici neskoršieho stredoveku. V rozličných aplikáciách sa inverzia znovu objavovala v európskej matematike od 16. – 17. st. a nová vlna oživeného teoretického záujmu o ňu sa objavila v 19. st., najmä v súvislosti s rozvojom projektívnej a neeuklidovskej geometrie (Möbius, Steiner a i.). Tento záujem však až do 60. rokov neprekročil hranice štúdia konkrétnych špeciálnych prípadov nelineárnych transformácií a nedospel k podstatnému zovšeobecneniu. Stalo sa tak až v 60. rokoch v súvislosti s úsilím transformovať algebrické krivky v reálnej (resp. komplexnej) projektívnej rovine tak, aby sa znížila „miera" ich singularity, t. j. aby sa súhrnné „ohodnotenie" singulárnych bodov a dotyčníc krivky transformáciou zmenšilo.

Prvý krok v tomto smere zaznamenal Luigi Cremona prácou *O geometrických transformáciách rovinného útvaru* (*Sulle transformazioni geometriche delle figure piane*, Bologna Mem. (2) 2, 621–630, 1862 (3)). Nelineárne algebrické transformácie, ktoré na transformáciu kriviek použil, sa stali základom budovania teórie *biracionálnych transformácií* (na Cremonovu počesť nazývaných aj Cremonovými), ktoré sa čoskoro z pomocného účelového prostriedku stali samostatným objektom vedeckého výskumu a dali podnet k rozvoju ucelenej oblasti algebrickej geometrie. Najväčšiu zásluhu na jej budovaní v prvých desaťročiach mali príslušníci talianskej klasickej školy algebrickej geometrie a od roku 1870 aj v súvislosti so vznikom a rozvojom teórie priestorových transformácií taktiež nemecká škola algebry a algebrickej geometrie. (Významným predstaviteľom tejto skupiny bol napr. Max Noether.)

I. KLASICKÉ OBDOBIE (cca 1860 – 1925)

1. Klasické obdobie rozvoja teórie biracionálnych transformácií možno približne ohraničiť rokmi 1860 a 1925. V ňom sa okrem výskumu základnej problematiky sústreďovala pozornosť na taxatívne stanovenie všetkých typov biracionálnych transformácií určeného stupňa a na štúdium konkrétnych prípadov biracionálnych korešpondencií medzi geometrickými objektami projektívnych priestorov rozmerov 2 a 3.

Aká je klasická podoba biracionálnej transformácie medzi projektívnymi rovinami?

Základným pojmom je *racionálne zobrazenie* z projektívnej roviny do projektívnej roviny

Nech $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{P}'^2(\mathbb{C})$ (skrátene označované aj $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}'^2$) sú projektívne roviny nad poľom komplexných čísel a nech $(x) = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $(x') = (x'_0, x'_1, x'_2) \in \mathbb{P}'^2(\mathbb{C})$ označujú ľubovoľné body projektívnych rovín s homogénnymi súradnicami x_i, resp. $x'_i \quad (i = 0, 1, 2)$.

Racionálnym zobrazením roviny $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ do roviny $\mathbb{P}'^2(\mathbb{C})$ sa nazýva zobrazenie $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}'^2(\mathbb{C})$, ktoré bodu $(x) = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ priraďuje bod $(x') = (x'_0, x'_1, x'_2) \in \mathbb{P}'^2(\mathbb{C})$ tak, že

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, x_2), \qquad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

kde $f_i(S_0, S_1, S_2) \in \mathbb{C}\,[S_0, S_1, S_2]$, $i = 0, 1, 2$, sú nesúdeliteľné homogénne polynómy toho istého stupňa $n \geq 1$ neurčitých S_0, S_1, S_2 nad poľom komplexných čísel. Ak je zobrazenie f v bode (x) definované, t. j. $(x'_0, x'_1, x'_2) \neq (0, 0, 0)$, nazýva sa bod (x') obrazom bodu (x) v zobrazení f a označuje sa $f(x)$.

Pri odhomogenizovaní súradníc v rovine $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vzhľadom na súradnicu x_0 má bod (x_0, x_1, x_2) nehomogénne súradnice $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$ definované na množine $\mathbb{A}_0^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \backslash \omega_0$, kde ω_0 je súradnicová os určená rovnicou $x_0 = 0$. Analogicky $x' = \frac{x'_1}{x'_0}, y' = \frac{x'_2}{x'_0}$ sú nehomogénne súradnice bodu (x'_0, x'_1, x'_2) na množine $\mathbb{A}'^2_0 = \mathbb{P}'^2(\mathbb{C}) \backslash \omega'_0$, kde ω'_0 je súradnicová os určená rovnicou $x'_0 = 0$.

Po zavedení označenia $\bar{f}_i(x, y) = \frac{1}{x_0^n} f_i(x_0, x_1, x_2)$, $i = 0, 1, 2$, je zúženie zobrazenia f na množinu $\mathbb{A}'^2_0$ zobrazením $\bar{f} : \mathbb{A}_0^2 \to \mathbb{A}'^2_0$, ktoré bodu (x,y) priraďuje bod (x', y') so súradnicami

$$x' = \frac{\bar{f}_1(x, y)}{\bar{f}_0(x, y)}, \qquad y' = \frac{\bar{f}_2(x, y)}{\bar{f}_0(x, y)} \qquad \text{(za predpokladu} \quad \bar{f}_0(x, y) \neq 0) \; .$$

Teda súradnice obrazu (x', y') (ak existuje) bodu (x, y) sú *racionálne funkcie* súradníc x, y. Odtiaľ pochádza názov racionálne zobrazenie.

Príklad. Kvadratická transformácia

Kanonický tvar v homogénnych súradniciach:

$$x'_0 = x_1 x_2 \; , \quad x'_1 = x_0 x_2 \; , \quad x'_2 = x_0 x_1 \; .$$

Kanonický tvar v nehomogénnych súradniciach:

$$x' = \tfrac{1}{x} \; , \quad y' = \tfrac{1}{y} \; .$$

Usporiadaná trojica homogénnych polynómov $h_i(S_0, S_1, S_2) \in \mathbb{C}[S_0, S_1, S_2]$, $i = 0, 1, 2$, toho istého stupňa $t \geq 1$ definuje racionálne zobrazenie (1) práve vtedy, keď $f_i h_j - f_j h_i$ sa anuluje na $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ pre každú dvojicu (i, j); $i, j = 0, 1, 2$.

2. Biracionálne zobrazenie

Ak existuje k racionálnemu zobrazeniu $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P'}^2$ *inverzné* racionálne zobrazenie $g : \mathbb{P'}^2 \to \mathbb{P}^2$, nazýva sa f *biracionálnym zobrazením.* Teda skutočnosť, že f je biracionálne zobrazenie, znamená existenciu racionálneho zobrazenia g, daného usporiadanou trojicou homogénnych polynómov $g_i(S_0, S_1, S_2) \in \mathbb{C}[S_0, S_1, S_2]$, $i = 0, 1, 2$, toho istého stupňa $m \geq 1$, pre ktorú platí: ak $f(x) = f(x_0, x_1, x_2) = (x'_0, x'_1, x'_2) = (x') \in \mathbb{P'}^2$ je obraz bodu $(x) \in \mathbb{P}^2$ v zobrazení f a obraz $g(x')$ je definovaný, je $g(x') = (x')$, t. j. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x)$.

Na druhej strane ak pre bod $(x') \in \mathbb{P'}^2$ existuje obraz $g(x') = (x)$ a pre bod (x) existuje obraz $f(x) = (x'')$, platí $g(x'') = (g \circ f)(x) = (x)$. Z injektívnosti zobrazenia g – ako zobrazenia inverzného k zobrazeniu f – a z rovnosti $g(x') = g(x'')$ vyplýva $(x') = (x'')$, t. j. $(f \circ g)(x') = (x')$.

Teda platí: $g \circ f = 1_{\mathbb{P}^2}, f \circ g = 1_{\mathbb{P'}^2}$.

($1_{\mathbb{P}^2}$, resp. $1_{\mathbb{P'}^2}$ označuje identické zobrazenie v $\mathbb{P}^2$, resp. $\mathbb{P'}^2$, chápané ako racionálne zobrazenia, t. j. definované v tých bodoch $(x) \in \mathbb{P}^2$, resp. $(x') \in \mathbb{P'}^2$, pre ktoré $f(x)$ a $g(f(x))$, resp. $g(x')$ a $f(g(x'))$ existujú.)

To znamená, že biracionálne zobrazenie predstavuje vlastne dvojicu (f, g) navzájom inverzných racionálnych zobrazení medzi projektívnymi rovinami $\mathbb{P}^2, \mathbb{P'}^2$. V prípade $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P'}^2$ sa hovorí o biracionálnej *transformácii* v rovine $\mathbb{P}^2$. Podľa novšieho úzu sa termín biracionálna transformácia používa aj na označenie akéhokoľvek biracionálneho zobrazenia.

V striktnom chápaní by sa namiesto názvu biracionálne zobrazenie roviny $\mathbb{P}^2$ do roviny $\mathbb{P'}^2$ mal používať termín *biracionálna relácia* alebo – v klasickom geometrickom úze – *biracionálna korešpondencia* medzi rovinami $\mathbb{P}^2, \mathbb{P'}^2$ (resp. v rovine $\mathbb{P}^2$ v prípade $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P'}^2$). Ako sa totiž čoskoro ukáže, racionálne zobrazenie f, resp. g, nie je definované vo všetkých bodoch roviny $\mathbb{P}^2$, resp. $\mathbb{P'}^2$ (pri $n, m \geq 2$).

3. Vlastnosti biracionálneho zobrazenia

1. Nech $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P'}^2$ je biracionálne zobrazenie určené vzťahmi (1) a nech k nemu inverzné zobrazenie $g : \mathbb{P'}^2 \to \mathbb{P}^2$ je dané vzťahmi

$$x_i = g_i(x'_0, x'_1, x'_2), \qquad i = 0, 1, 2 \tag{2}$$

kde $(x') = (x'_0, x'_1, x'_2) \in \mathbb{P'}^2$ a $g_i(S_O, S_1, S_2) \in \mathbb{C}[S_0, S_1, S_2]$ $(i = 0, 1, 2)$ sú homogénne polynómy stupňa $m \geq 1$.

Dvojparametrickému systému (sieti) všetkých priamok roviny $\mathbb{P'}^2$, ktorý je daný vyjadrením

$$\left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x'_i = 0 \mid (a) \neq (0); a_i \in \mathbb{C} \right\}, \tag{3}$$

zodpovedá zobrazením $g = f^-1$ dvojparametrický systém (sieť) kriviek stupňa n v rovine $\mathbb{P}^2$, daný vyjadrením

$$\left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i f_i(x) = 0 \mid (a) \neq (0) \right\}. \tag{3'}$$

Obrátene sieti priamok v $\mathbb{P}^2$, danej vyjadrením

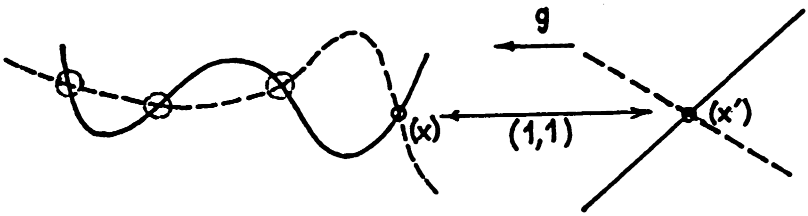
$$\left\{\sum_{i=0}^{2} b_i x_i = 0 \mid (b) \neq (0); b_i \in \mathbb{C}\right\}, \tag{4}$$

zodpovedá v zobrazení $f = g^{-1}$ sieť kriviek stupňa m v $\mathbb{P}'^2$, určená vyjadrením

$$\left\{\sum_{i=0}^{2} b_i g_i(x') = 0 \mid (b) \neq (0)\right\}. \tag{4'}$$

Sieť kriviek (3′), resp. (4′) sa nazýva *prvá*, resp. ***druhá homaloidná sústava*** (homaloidná sústava v $\mathbb{P}^2$, resp. $\mathbb{P}'^2$). Jednotlivé krivky sietí sa nazývajú *homaloidné krivky* alebo *homaloidy.*

Každý bod $(x') \in \mathbb{P}'^2$, pre ktorý existuje obraz $g(x') = (x)$, možno považovať za priesečník dvoch rôznych priamok p, r roviny $\mathbb{P}'^2$. Obraz $g(x')$ je jediný voľný (pohyblivý) priesečník dvoch homaloidov prvej sústavy, ktoré zodpovedajú v biracionálnom zobrazení priamkam p, r (obr. 3).



Obr. 3

To znamená, že všetky homaloidy prvej sústavy majú konečný počet pevných spoločných bodov tak, že pre každé dva homoloidy zostáva jediný priesečník mimo tejto množiny pevných bodov. Keďže podľa Bézoutovej vety majú každé dva homaloidy prvej sústavy ako krivky stupňa n pri započítaní násobnosti prieseku spoločných práve n^2 bodov, zaberajú spoločné body všetkých homaloidov prvej sústavy z tohto počtu práve $n^2 - 1$.

Analogicky zastupujú spoločné body všetkých homoloidov druhej sústavy $m^2 - 1$ spoločných bodov (včítane násobnosti prieseku) každých dvoch homaloidov, takže pre každé dva homaloidy druhej sústavy zostáva jediný voľný (pohyblivý) priesečník.

2. *Homaloid a priamka*

Nech F je homaloid prvej homaloidnej sústavy a nech p je priamka roviny $\mathbb{P}'^2$. Pri započítaní násobnosti prieseku priamky p s homaloidom F vo všetkých ich spoločných bodoch má priamka p s homaloidom F práve n spoločných bodov. (Homaloid F je čiara stupňa n.) Priesečníkom priamky p s homaloidom F zodpovedajú v biracionálnom zobrazení priesečníky obrazov priamky p a homaloidu F. Obrazom priamky p je homaloid P' stupňa m v druhej homaloidnej sústave a obrazom homaloidu F je priamka f' roviny $\mathbb{P}'^2$. Počet bodov prieniku $f' \cap P'$ so započítaním násobnosti prieseku je m. (P' je krivka stupňa m.) Na druhej strane sú tieto body obrazmi spoločných bodov priamky p a krivky F, ich počet (vrátane násobnosti) je n^2. Teda platí: $n = m$. To znamená: *Biracionálne zobrazenie roviny a zobrazenie k nemu inverzné sú vyjadrené homogénnymi polynómami toho istého stupňa.*

Stupeň týchto polynómov sa nazýva *stupňom* biracionálneho zobrazenia (biracionálnej transformácie).

Transformácia stupňa n sa niekedy označuje T_{n-n} alebo $T_{n,n}$. (Prvý index označuje stupeň priameho, druhý index stupeň inverzného zobrazenia. Pri rovinných transformáciách sa oba stupne navzájom rovnajú.)

3. *Báza homaloidnej sústavy*

Všetky spoločné body všetkých homaloidov roviny $\mathbb{P}^2$ ležia na troch bázových homaloidoch definovaných rovnicami

$$f_i(x_0, x_1, x_2) = 0, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{5}$$

Množina týchto bodov sa nazýva *báza homaloidnej sústavy*. Je to množina práve tých bodov, pre ktoré v zobrązení f nejestvujú obrazy. (Podľa novšej terminológie zobrazenie f v týchto bodoch *nie je regulárne*, t. j. nie je definované.) Táto množina sa nazýva *fundamentálna množina* zobrazenia f v rovine $\mathbb{P}^2$ alebo *prvá* fundamentálna množina (*prvá fundamentálna varieta*). Jej prvky sa nazývajú *fundamentálne body* biracionálneho zobrazenia roviny $\mathbb{P}^2$.

Analogicky sa definuje báza homaloidnej sústavy v rovine $\mathbb{P}'^2$ rovnicami

$$g_i(x_0, x_1, x_2) = 0, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Nazýva sa *druhou fundamentálnou množinou (druhou fundamentálnou varietou)* biracionálneho zobrazenia. Jej prvky sa nazývajú *fundamentálnymi bodmi* v rovine $\mathbb{P}'^2$.

4. Fundamentálnou varietou sú stanovené isté podmienky pre určenie homaloidov, prienik každých dvoch homaloidov a rod každého homaloidu.

(a) Každý homaloid ako krivka stupňa n je jednoznačne určený $\frac{n(n+3)}{2}$ nezávislými jednoduchými podmienkami. Fundamentálna varieta zastupuje všetky tieto podmienky *okrem dvoch*, ktoré zodpovedajú určujúcim podmienkam priamky ako vzoru homaloidu. Počet jednoduchých podmienok pre homaloid, reprezentovaných fundamentálnou varietou, sa nazýva *postulačné číslo (postulácia)* fundamentálnej variety; označuje sa písmenom P. Jeho hodnota je
$$P = \frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3\,.$$

(b) Prienik každých dvoch homaloidov ako kriviek stupňa n bez spoločnej súčasti pozostáva podľa Bézoutovej vety – pri započítaní násobnosti priesečníkov –

práve z n^2 bodov. Z tohto počtu pohlcuje fundamentálna varieta všetky priesečníky *okrem jedného*, ktorý zodpovedá priesečníku dvoch priamok ako vzorov homaloidov. Počet priesečníkov každých dvoch homaloidov, reprezentovaných fundamentálnou varietou, sa nazýva *ekvivalenčným číslom (ekvivalenciou)* fundamentálnej variety, označuje sa písmenom E. Jeho hodnota sa rovná

$$E = n^2 - 1\,.$$

(c) Množina všetkých bodov každého homaloidu je s výnimkou konečného počtu bodov ekvivalentná s množinou bodov priamky, ktorá je vzorom homaloidu. Preto je homaloid *racionálna krivka*, t. j. má rod 0. Redukciu rodu z najväčšej možnej hodnoty $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ spôsobujú fundamentálne body. Zmenšenie rodu o toto číslo následkom existencie fundamentálnych bodov sa nazýva *redukčné číslo rodu* (stručne *redukcia rodu*); označuje sa R. Jeho hodnota je

$$R = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,.$$

Násobnosti jednotlivých fundamentálnych bodov na všetkých homaloidoch ovplyvňujú čísla P, E, R nasledovným spôsobom.

(a) Každý i–násobný bod ($i = 1, 2, \dots$) rovinnej algebrickej krivky predstavuje pre určenie krivky $\frac{i(i+1)}{2}$ nezávislých jednoduchých podmienok.
Ak sa počet i–násobných fundamentálnych bodov ($i = 1, 2, \dots$) na každom homaloide rovná s_i, platí

$$P = \sum_i s_i \cdot \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,. \tag{7}$$

(b) Ak je fundamentálny bod i–násobný na každom homaloide, rovná sa násobnosť prieseku dvoch homaloidov v tomto bode číslu i^2. Ak sa počet i–násobných fundamentálnych bodov rovná číslu s_i, je

$$E = \sum_i s_i \cdot i^2 = n^2 - 1\,. \tag{8}$$

(c) Každý i–násobný bod zmenšuje rod homaloidu o číslo $\frac{i(i-1)}{2}$.
Ak sa počet i–násobných fundamentálnych bodov rovná číslu s_i, je

$$R = \sum_i s_i \cdot \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,. \tag{9}$$

Rovnosti (7) – (9) sú tzv. *rovnice podmienok.* Odčítaním rovnosti (9) od rovnosti (7) sa dostane vzťah

$$\sum_i s_i \cdot i = 3n - 3\,,$$

ktorým je stanovená horná hranica počtu fundamentálnych bodov biracionálneho zobrazenia stupňa n v jednej fundamentálnej variete.

5. *Charakteristiky*

Čísla n (stupeň transformácie), i (násobnosť fundamentálneho bodu) a s_i (počet i–násobných bodov vo fundamentálnej variete) charakterizujú danú biracionálnu transformáciu. Možno ich zachytiť napr. zápisom

$$n;\, s_{i_1}^{i_1} \dots s_{i_\alpha}^{i_\alpha} \dots s_{i_\beta}^{i_\beta}\,,$$

$$i_1 > \dots > i_\alpha > \dots > i_\beta\,, \tag{10}$$

v ktorom symbol $s_{i_k}^{i_k}$ označuje skutočnosť, že počet i_k–násobných fundamentálnych bodov sa rovná číslu s_{i_k}. V inom spôsobe zápisu

$$n;\, i_1, i_2, \dots, i_t\,,$$

$$i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_t \tag{11}$$

sa zaznamenáva len násobnosť ***každého*** fundamentálneho bodu; tu sa môže tá istá násobnosť vyskytovať niekoľkokrát.

Celkový počet rôznych fundamentálnych bodov sa rovná číslu

$$s = \sum_{k=1}^{r} s_{i_k}\,.$$

Konečná číselná postupnosť (10) alebo (11) vyjadruje tzv. ***charakteristiku biracionálnej transformácie.***

Charakteristiky reálne existujúcich biracionálnych transformácií sa nazývajú *geometrické*. Aritmetické partície $(\dots, s_{i_k}, \dots)$ čísla P redukovaného vzhľadom na násobnosť fundamentálnych bodov (rovnosť (7)) predstavujú tzv. ***aritmetické*** charakteristiky biracionálnej transformácie stupňa n. Vyjadrujú len nevyhnutné podmienky pre transformáciu; jej existencia musí byť potvrdená konštrukčne.

Transformácia s danou charakteristikou, ktorá má s fundamentálnych bodov, závisí od $2s + 8$ parametrov, a to:

$2s$ pomerov súradníc pre s fundamentálnych bodov,

9 homogénnych parametrov pre tri nezávislé homaloidy (t. j. koeficienty $a_i, i = 0, 1, 2$, v rovniciach $\sum_{i=0}^{2} a_i f_i(x) = 0$ týchto homaloidov).

Počty s, resp. s' fundamentálnych bodov transformácií f, resp. f^{-1} sa navzájom rovnajú, charakteristiky transformácie však môžu byť rôzne. Charakteristiky transformácií f, f^{-1} sa nazývajú (navzájom) ***združené.*** Ak sa tieto charakteristiky zhodujú, charakteristika sa nazýva ***samozdruženou.***

Keď majú všetky fundamentálne body tú istú násobnosť, transformácia sa nazýva *symetrickou*; označuje sa T_{sym}.

De Jonquièrovými transformáciami stupňa n sa nazývajú transformácie s charakteristikou $n;\ 1^{n-1}(2n-2)^1$; označujú sa T_J.

6. *Noetherova nerovnosť*

Každá biracionálna transformácia stupňa $n \geq 2$ má aspoň tri fundamentálne body. Ak by totiž počet fundamentálnych bodov bol nanajvýš dva, platila by pre ich násobnosti i_1, i_2 a stupeň transformácie n nerovnosť $i_1 + 1_2 \leq n$. (Táto nerovnosť platí všeobecne, lebo v prípade $i_1 + i_2 > n$ by spojnica fundamentálnych bodov bola komponentom každého homaloidu, čo protirečí predpokladu, že polynómy f_0, f_1, f_2 nemajú spoločného deliteľa.)

Z rovnosti (10) by vyplynulo $3n - 3 = i_1 + i_2 \leq n$, z toho ďalej $2n \leq 3$, čo má za následok $n = 1$.

Teda pre $n \geq 2$ je $s \geq 3$. Odtiaľ vyplýva pre násobnosti i_1, i_2, i_3 fundamentálnych bodov biracionálnej transformácie s tromi fundamentálnymi bodmi nerovnosť

$$i_1 + i_2 + i_3 \geq n + 1 \,. \qquad \text{(Noetherova nerovnosť)}$$

Noetherova nerovnosť v uvedenom tvare platí iste pre transfomáciu stupňa $n \geq 2$ s tromi fundamentálnymi bodmi. Ak by totiž platilo $i_1 + i_2 + i_3 \leq n$, dávalo by to spolu so všeobecným vzťahom $i_1 + i_2 + i_3 = 3n - 3$ nerovnosť $3n - 3 \leq n$ a znovu by platilo $n = 1$.

Pre transformáciu stupňa $n \geq 3$ s počtom fundamentálnych bodov aspoň 4 Noetherova nerovnosť nemusí platiť. Napr. pre $n = 3$ de Jonquièrova transformácia má jeden dvojnásobný fundamentálny bod a 4 jednoduché fundamentálne body. Pre násobnosti 1 ľubovoľných troch jednoduchých fundamentálnych bodov platí: $1 + 1 + 1 = 3 < 3 + 1 = 4$.

7. *Iregulárne variety (hlavné variety, hlavný systém)*

V dnešnej terminológii *iregulárna varieta* biracionálneho zobrazenia $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}'^2$ v rovine $\mathbb{P}^2$ je vzor fundamentálnej variety $F' \subset \mathbb{P}'^2$ v zobrazení f. Označuje sa H; teda $H = f^{-1}(F')$. Analogicky iregulárna varieta zobrazenia f v rovine $\mathbb{P}'^2$ je $H' = g^{-1}(F)$ (kde g je zobrazenie inverzné k zobrazeniu f). (V staršej terminológii sa iregulárne variety nazývajú *hlavné*.)

Každý fundamentálny bod inciduje s každým homaloidom, preto musí každý vzor fundamentálneho bodu incidovať s každou priamkou ako vzorom niektorého homaloidu zo systému homaloidov. Takúto vlastnosť má však v rovine len čiara. Teda vzorom fundamentálneho bodu je čiara (priamka alebo krivka).

Každému i–násobnému fundamentálnemu bodu zodpovedá čiara, ktorá pretína priamku ako vzor homaloidu i–krát (vrátane násobnosti). Ide teda o krivku stupňa i. Súhrnný stupeň všetkých iregulárnych kriviek je $\sum i = 3n - 3$.

Pomerne jednoduchými úvahami sa dospeje k výsledku, že iregulárne variety sú určené anulovaním Jacobiho determinantov foriem definujúcich biracionálne zobrazenie:

$$H : J(f_0, f_1, f_2) \equiv \left| \frac{\partial f_i}{\partial S_j(x)} \right| = 0 \,,$$

$$H' : J(g_0, g_1, g_2) \equiv \left| \frac{\partial g_i}{\partial S_j(x')} \right| = 0 \, .$$

Základná klasická problematika konkrétnej biracionálnej transformácie predstavuje:

1. Stanovenie rovníc (obvykle kanonických) priamej transformácie f a inverznej transformácie $g = f^{-1}$.
2. Zistenie fundamentálnej variety $F \subset \mathbb{P}^2$ a $F' \subset \mathbb{P}'^2$. Výpočet postulácie P, ekvivalencie E a redukcie R.
3. Zostavenie tabuľky charakteristík

$$n; s_{i_1}^{i_1} \dots s_{i_k}^{i_k} \dots s_{i_r}^{i_r} \, .$$

4. Zistenie iregulárnej (hlavnej) variety $H \subset \mathbb{P}^2$, resp. $H' \subset \mathbb{P}'^2$.

Príklad. Fundamentálna a iregulárna varieta kvadratickej transformácie Nech $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}'^2$ je daná priradením $(x) \mapsto (x')$, kde

$$x'_0 = x_1 x_2, \qquad x'_1 = x_0 x_2, \qquad x'_2 = x_0 x_1$$

a $g = f^{-1} : \mathbb{P}'^2 \to \mathbb{P}^2$ priradením $(x') \mapsto (x)$, kde

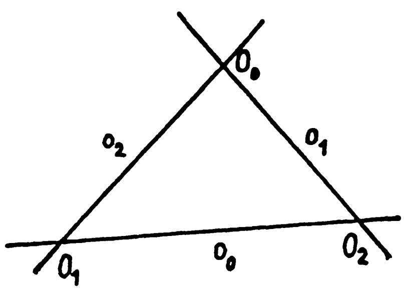
$$x_0 = x'_1 x'_2, \qquad x_1 = x'_0 x'_2, \qquad x_2 = x'_0 x'_1 \, ,$$

$$F : \begin{aligned} x_1 x_2 &= 0 \\ x_0 x_2 &= 0 \, , \\ x_0 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$F = \{O_0, O_1, O_2\} \, ,$$

$$H : \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 x_0 x_1 x_2 = 0 \, ,$$

$$H = o_0 \cup o_1 \cup o_2 \qquad \text{(obr. 4)} \, .$$



Obr. 4

8. *Clebschova veta*

Nech $i_1, \ldots, i_r$ sú násobnosti fundamentálnych bodov v $\mathbb{P}^2$, $i'_1, \ldots, i'_s$ násobnosti fundamentálnych bodov v $\mathbb{P}'^2$.

Clebschova veta: $r = s$ a $\{i_1, \ldots, i'_s\} = \{i'_1, \ldots, i'_s\}$

9. *Noetherova veta*

Každú biracionálnu transformáciu možno vyjadriť ako ***súčin*** (zloženie) konečného počtu ***kvadratických*** biracionálnych transformácií.

Pre biracionálnu transformáciu T_{n-n} stupňa n je ohraničenie počtu h činiteľov rozkladu na súčin kvadratických biracionálnych transformácií dané vzťahom

$$h \leq \sum_{(t)} (4t - 4) \leq 4n - 4 ;$$

$4t$ je počet de Jonquièrových transformácií stupňa t, ktoré redukujú stupeň transformácie T_{n-n}.

4. Priestorové biracionálne transformácie

1. *Definícia*

Racionálne zobrazenie $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}'^3$ je pre vzor $(x) \in \mathbb{P}^3$ a jeho obraz $(x') \in \mathbb{P}'^3$ zadané vzťahmi

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad i = 0, 1, 2, 3 , \tag{13}$$

kde $f_i(S_0, S_1, S_2, S_3)$, $i = 0, 1, 2, 3$, sú homogénne polynómy toho istého stupňa $n \geq 1$. Iné vyjadrenie

$$x'_i = h_i(x), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{14}$$

reprezentuje to isté racionálne zobrazenie, ak

$$f_i h_j - f_j h_i = 0$$

na $\mathbb{P}^3$ pre každú dvojicu (i, j); $i, j = 0, 1, 2, 3$. Rovnice (13) a (14) sa nazývajú aj ekvivalentnými vyjadreniami toho istého racionálneho zobrazenia.

Ak k racionálnemu zobrazeniu $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}'^3$ s vyjadrením (13) existuje inverzné racionálne zobrazenie $g : \mathbb{P}'^3 \to \mathbb{P}^3$ s vyjadrením

$$x_i = g_i(x) , \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

s homogénnymi polynómami $g_i(S_0, S_1, S_2, S_3)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ toho istého stupňa $m \geq 1$, t. j. zobrazenie g, pre ktoré platí $g \circ f = I_{\mathbb{P}^3}$ a $f \circ g = I_{\mathbb{P}'^3}$ ($I_{\mathbb{P}^3}$, resp. $I_{\mathbb{P}'^3}$ je identické zobrazenie v $\mathbb{P}^3$, resp. $\mathbb{P}'^3$), hovoríme o ***biracionálnej*** *transformácii* priestoru $\mathbb{P}^3$ do priestoru $\mathbb{P}'^3$ alebo o biracionálnej transformácii medzi priestormi $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}'^3$.

Pre každý vzor $(x) \in \mathbb{P}^3$ bodu $(x') = (f_0(x), \dots, f_3(x))$ platia rovnice

$$\begin{aligned} x'_0 f_1(x) - x'_1 f_0(x) &= 0 \, , \\ x'_0 f_2(x) - x'_2 f_0(x) &= 0 \, , \\ x'_0 f_3(x) - x'_3 f_0(x) &= 0 \end{aligned} \tag{15a}$$

(nezávislé rovnice) a

$$\begin{aligned} x'_1 f_2(x) - x'_2 f_1(x) &= 0 \, , \\ x'_1 f_3(x) - x'_3 f_1(x) &= 0 \, , \\ x'_2 f_3(x) - x'_3 f_2(x) &= 0 \, . \end{aligned} \tag{15b}$$

(navzájom nezávislé rovnice, od sústavy (15a) závislé rovnice).

Rovnice (15a) definujú tri plochy stupňa n, ktoré majú „vo všeobecnosti" len jeden *voľný* spoločný bod, odpovedajúci v inverznej transformácii bodu $(x') \in \mathbb{P}'^3$. („Vo všeobecnosti" majú tri plochy stupňa n spoločných n^3 bodov: dve plochy sa pretínajú v priestorovej krivke stupňa n^2 a táto krivka pretína tretiu plochu stupňa n v n^3 bodoch.)

2. Biracionálna transformácia je bijektívna temer vo všetkých bodoch priestoru $\mathbb{P}^3$ a priestoru $\mathbb{P}'^3$. Každý bod priestoru $\mathbb{P}'^3$ možno považovať za jediný spoločný bod troch lineárne nezávislých rovín s rovnicami

$$\sum_{i=0}^{3} a_i x'_i = 0 \, , \qquad \sum_{i=0}^{3} b_i x'_i = 0 \, , \qquad \sum_{i=0}^{3} c_i x'_i = 0 \tag{16}$$

s koeficientmi

$$(a_0, \dots, a_3) \neq (0, \dots, 0) \, , \ (b_0, \dots, b_3) \neq (0, \dots, 0) \, , \ (c_0, \dots, c_3) \neq (0, \dots, 0) \, .$$

V inverznom zobrazení g zodpovedajú v $\mathbb{P}^3$ týmto rovinám *homaloidy*

$$\sum_{i=0}^{3} a_i f_i(x) = 0 \, , \qquad \sum_{i=0}^{3} b_i f_i(x) = 0 \, , \qquad \sum_{i=0}^{3} c_i f_i(x) = 0 \, . \tag{16'}$$

Jeden zo spoločných bodov týchto homaloidov je vzorom spoločného bodu rovín (16) v zobrazení f. Pretože zobrazenie f je bijektívne temer vo všetkých bodoch priestorov $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}'^3$, znamená to, že plochy (16') majú *temer vždy* jediný voľný spoločný bod a ostatné spoločné body sú zviazané špeciálnymi podmienkami.

Trojparametrickej sústave rovín priestoru $\mathbb{P}'^3$

$$\left\{ \sum_{i=0}^{3} a_i x'_i = 0 \mid (a) \neq (0) \right\} \tag{17}$$

zodpovedá v biracionálnej transformácii ***homaloidný systém plôch*** v $\mathbb{P}'^3$

$$\left\{\sum_{i=0}^{3} a_i f_i(x) = 0 \mid (a) \neq (0)\right\}, \tag{17'}$$

ktorý má tieto vlastnosti:

1. Je lineárny a trojparametrický.
2. Tri lineárne nezávislé plochy systému majú „vo všeobecnosti“ jediný voľný priesečník.
3. Všetky prvky systému sú racionálne, t. j. okrem konečného počtu výnimiek (čiar a bodov) sú ekvivalentné s rovinou.

3. *Postulácia a ekvivalencia*

Variety (čiary a body) spoločné všetkým homaloidom tvoria ***bázu*** homaloidného systému. Tento systém je lineárny a trojparametrický, preto v ňom existujú tri lineárne nezávislé prvky. Jednotlivé prvky systému ako plochy stupňa n sú zadané

$$N = \binom{n+3}{3} - 1$$

jednoduchými nezávislými určovacími podmienkami. Báza z tohto počtu odčerpáva

$$P = N - 3 = \binom{n+3}{3} - 4$$

jednoduchých nezávislých podmienok. Toto číslo sa nazýva ***postulačné číslo*** alebo ***postulácia*** transformácie f.

Počet spoločných bodov (so započítaním násobnosti) troch ľubovoľných homaloidov je

$$E = n^3 - 1\ .$$

Toto číslo sa nazýva ***ekvivalenčné číslo*** alebo ***ekvivalencia*** transformácie.

K redukcii rodu kriviek pri rovinných biracionálnych transformácií niet pri priestorových transformáciách analógie.

4. *Fundamentálne a iregulárne variety*

Spoločné čiary a body všetkých homaloidov tvoria fundamentálne variety. Sú určené najväčším spoločným deliteľom všetkých foriem

$$f = \sum_{i=0}^{3} c_i f_i, \qquad (c_0, \dots, c_3) \neq (0, \dots, 0)\ .$$

Iregulárne variety sú vzorom fundamentálnych variet. Sú určené rovnicami

$$J \equiv \left|\frac{\partial f_i}{\partial S_j}(x)\right| = 0\ , \qquad \text{resp.} \qquad J' \equiv \left|\frac{\partial g_i}{\partial S_j}(x')\right| = 0\ .$$

5. *Podstatné rozdiely medzi rovinnými a priestorovými biracionálnymi transformáciami*

1. Stupeň priamej priestorovej transformácie môže byť rôzny od stupňa inverznej transformácie.
2. Pre priestorové transformácie nejestvuje analógia Noetherovej vety o rozklade transformácie.

V klasickom období sa nedospelo k vytvoreniu ucelenej teórie biracionálnych transformácií v n–rozmerných priestoroch (pre $n > 3$). Ojedinelé a neúplné pokusy viedli síce k opisu niektorých typov, všeobecná teória však nevznikla.

II. OBDOBIE „MODERNEJ" ALGEBRY (cca 1925 – 1960)

1. *„Medziobdobie"*

Algebrická geometria zaznamenala pozoruhodný pokrok na báze geometrizácie algebrických výsledkov nemeckej algebrickej školy, ktorej vedúcou osobnosťou bola Emmy Noetherová (1882–1935). Podstatnou mierou sa o to zaslúžil v druhej polovici dvadsiatych rokov a v tridsiatych rokoch Bartel Leenert van der Waerden (nar. 1903) .

V procese prebudovávania základov algebrickej geometrie na báze súdobej modernej algebry sa objavili nové pojmy:

- *všeobecný bod* ireducibilnej algebrickej variety
- *súradnicový okruh* algebrickej variety (okruh regulárnych funkcií na variete)
- *pole racionálnych funkcií* na ireducibilnej algebrickej variete (funkčné pole).

Tieto pojmy – okrem ďalších prvkov nového algebrického aparátu – umožnili všeobecnejšie chápanie biracionálnych transformácií a ich rozšírenie z projektívnych priestorov na ľubovoľné ireducibilné algebrické variety. Úroveň všeobecnosti a štrukturálnu priehľadnosť zvyšovalo neskôr aj zapojenie prostriedkov topológie do opisu variet a transformácií.

Na báze nových výsledkov a pojmov v týchto disciplínach je biracionálna transformácia definovaná nasledovne:

Nech X, Y sú ireducibilné algebrické variety. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva racionálne, ak množina $f(X)$ je hustá v Y (t. j. uzáver $f(X)$ sa rovná Y) a indukované zobrazenie $f^* : k(Y) \to k(X)$ je izomorfizmus. Biracionálne zobrazenie je charakterizované izomorfizmom $k(Y) \to k(X)$ polí racionálnych funkcií.

Klasická biracionálna transformácia medzi dvoma projektívnymi rovinami má v pojmoch komutatívnej algebry nasledovnú podobu (B. L. van der Waerden):

Ak $(1, \xi_1, \xi_2)$ je všeobecný bod roviny $\mathbb{P}^2$, pole racionálnych funkcií (nad základnym poľom k) na rovine $\mathbb{P}^2$ má tvar

$$k(\mathbb{P}^2) = k(1, \xi_1, \xi_2) \xrightarrow{\sim} k(\tau_0, 1, \tau_2) \xrightarrow{\sim} k(\sigma_0, \sigma_1, 1) \ ,$$

kde ξ_1, ξ_2, resp. τ_0, τ_2, resp. σ_0, σ_1 sú nezávislé neurčité.

Analogicky pre všeobecný bod $(1, \eta_1', \eta_2')$ roviny $\mathbb{P}'^2$ má pole racionálnych funkcií na rovine $\mathbb{P}'^2$ tvar

$$k(\mathbb{P}'^2) = k(1, \eta_1', \eta_2') .$$

Rovnice priamej transformácie $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}'^2$ sú

$$\eta_1' = R_1(\xi_1, \xi_2) , \qquad \eta_2' = R_2(\xi_1, \xi_2) ,$$

kde R_1, R_2 sú racionálne funkcie.

Z toho vyplýva

$$k(1, \eta_1', \eta_2') \subset k(1, \xi_1, \xi_2) .$$

Rovnice inverznej transformácie $\mathbb{P}'^2 \to \mathbb{P}^2$ sú

$$\xi_1 = S_1(\eta_1', \eta_2') , \qquad \xi_2 = S_2(\eta_1', \eta_2') ,$$

kde S_1, S_2 sú racionálne funkcie.

Z toho vyplýva

$$k(1, \xi_1, \xi_2) \subset k(1, \eta_1', \eta_2') ,$$

čo v spojení s predchádzajúcou inklúziou dáva

$$k(1, \xi_1, \xi_2) = k(1, \eta_1', \eta_2') .$$

Toto je prvá a priehľadná charakterizácia biracionálnej transformácie klasických objektov.

Pri rovinách (takisto aj pri priestoroch) je použitie polí racionálnych funkcií bezproblémové, lebo roviny (priestory) sú prirodzeným spôsobom ireducibilné.

Úplné riešenie otázok a problémov súvisiacich s biracionálnymi transformáciami priniesla až neskôr teória kvaziprojektívnych variet. Ale už v uvedenej etape boli k dispozícii všetky prostriedky na rozšírenie teórie biracionálnych zobrazení nielen na projektívne priestory rozmeru n, ale aj na ich ľubovoľné *ireducibilné* variety.

2. *Oscar Zariski*

Originálny pokus zjednotiť na spoločnom základe všetky rozptýlené čiastkové výsledky o biracionálnych transformáciách v n–rozmernom projektívnom priestore podnikol v štyridsiatych rokoch nášho storočia Oscar Zariski (1899–1986). Jeho koncepcia napriek nesporným úspechom, vysokej efektivite a hlbokosiahlym zovšeobecňujúcim výsledkom nenašla toľko nasledovateľov, ako by sa to podľa jej účinnosti a modernosti dalo očakávať. Jednou z príčin je možno aj skutočnosť, že vrcholné zovšeobecnenie ako aj riešenie niektorých kardinálnych problémov, po desaťročia tvrdošijne odolávajúcich úsiliu popredných pracovníkov, urobil sám Zariski. Hlavnou Zariského metódou bola aplikácia *teórie ohodnotenia* na algebrické variety a ich biracionálne zobrazenia.

Ohodnotením poľa Σ do usporiadanej aditívnej grupy Γ sa nazýva zobrazenie $v : \Sigma \to \Gamma$, ktoré má nasledovné vlastnosti:

1. $v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta)$ pre každé $\xi, \eta \in \Sigma$
2. $v(\xi + \eta) \geq min[v(\xi), v(\eta)]$ pre každé $\xi, \eta \in \Sigma$
3. Ak je Σ určitým K–rozšírením, platí

$$v(a) = 0 \text{ pre každý prvok } a \in K \ , a \neq 0 \ .$$

Množina $R = \{\xi \in \Sigma \mid v(\xi) \geq 0\}$ je okruh, ktorý sa nazýva *okruh ohodnotenia.*

Množina $p = \{\xi \in \Sigma \mid v(\xi) > 0\}$ je maximálny ideál v okruhu R. Tento ideál sa nazýva *ideál ohodnotenia.* (V prípade diskrétneho ohodnotenia je to hlavný ideál.)

V poliach racionálnych funkcií majú ohodnotenia ďalšie špeciálne vlastnosti.

Nech je $\Sigma = k(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ pole racionálnych funkcií (nad základným poľom k) a nech v je ohodnotenie poľa Σ, v ktorom platí $v(\eta_k) \leq v(\eta_i)$ pre určité pevné i a všetky $k \neq i$.

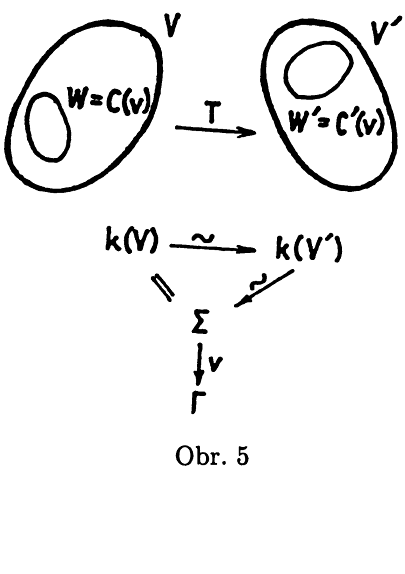
Množina $p = \{f \in k[\eta_0, \ldots, \eta_n]$, stupeň $f = m \mid v[f(\eta)] > mv(\eta_k)\}$ je prvoideál. Varieta $V(p)$ koreňov tohto ideálu sa nazýva *centrum ohodnotenia.* Je to ireducibilná varieta.

Rozmerom ohodnotenia sa nazýva $\dim_k R/p$–rozmer faktorového okruhu R/p nad poľom k. Pre každé netriviálne ohodnotenie je $\dim_k R/p < \dim_k \Sigma$.

Obrátene platí: Ku každej ireducibilnej podvariete existuje také ohodnotenie, že jeho centrum je táto podvarieta.

Nech V a V' sú ireducibilné variety, ktoré majú navzájom izomorfné polia racionálnych funkcií: $k(V) \xrightarrow{\sim} k(V') \xrightarrow{\sim} \Sigma$. *Biracionálna korešpondencia* medzi varietami V, V' je definovaná takto (Zariski):

Podvariety $W \subset V$ a $W' \subset V$ si zodpovedajú v biracionálnej korešpondencii T, ak existuje také ohodnotenie poľa Σ, že jeho centrum na variete V je podvarieta W a jeho centrum na variete V' je podvarieta W' (obr. 5).



Obr. 5

Korešpondencia podvariet W, W' sa zapisuje označením

$$T(W) = W', \qquad T^{-1}(W') = W .$$

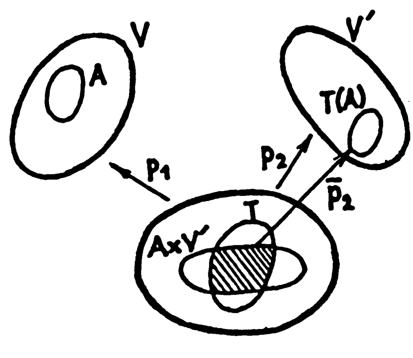
V prípade, keď $V = V'$, namiesto izomorfizmu nastupuje automorfizmus $\tau : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma$ a ide o biracionálnu transformáciu na variete V.

V Zariského koncepcii namiesto korešpondencie medzi bodmi nastupuje korešpondencia medzi podvarietami ľubovoľného možného rozmeru. Korešpondujúce podvariety môžu mať rôzne rozmery.

Možnosť ďalšieho zovšeobecnenia priniesli metódy teórie kategórií. Pomocou súčinu variet a jeho projekcií na faktory je korešpondencia medzi varietami V, V' definovaná ako podvarieta T súčinu variet $V \times V'$, pre ktorý projekcia $p_1 : V \times V' \to V$ je epimorfizmus. Pre ľubovoľnú uzavretú podmnožinu $A \subset V$ je jej obraz definovaný ako podvarieta

$$T(A) := p_2((A \times V') \cap T) ,$$

kde $p_2 : V \times V' \to V'$ je projekcia súčinu variet $V \times V'$ na druhý faktor V' (obr. 6). (Toto priradenie vo všeobecnosti nie je bodovým zobrazením, čo vnáša do korešpodencie nový podstatný aspekt.)



Obr. 6

Korešpondencia $T \subset V \times V'$ je biracionálnym zobrazením, ak

1. $p_1(T) = V$,
2. $p_2(T) = V'$,
3. pre všeobecný bod (x, y) korešpondencie T je (x) všeobecným bodom variety V a (y) všeobecným bodom variety V'.

Nech $T : V \to V'$ je biracionálna korešpondencia, pričom V a V' sú lokálne normálne, t. j. sú normálne na každej podvariete $W \subset V, W' \subset V'$; to znamená, že lokálne okruhy $Q(W)$, resp. $Q(W')$ sú celistvo uzavreté vo svojich podielových poliach.

Podvarieta $W \subset V$ je

<table>
<tr><td>regulárna —</td><td rowspan="3">podvarieta v korešpondencii T, ak existuje taká podvarieta $W' \subset V'$, že $T(W) = W'$ a</td><td>— $Q(W) = Q(W')$</td></tr>
<tr><td>iregulárna —</td><td>— $Q(W) \subset Q(W')$</td></tr>
<tr><td>fundamentálna —</td><td>— $Q(W) \not\supseteq Q(W')$</td></tr>
</table>

Vlastnosti biracionálnych korešpondencií:

1. Rozmer fundamentálnej variety $\leq \dim V \; - 2$.
2. Fundamentálnej podvariete zodpovedá nekonečne mnoho podvariet.
3. *Zariského hlavná veta*: Nech $T : V \dashrightarrow V'$ je biracionálna korešpondencia, ktorá na V' nemá fundamentálnu podvarietu a má takú fundamentálnu podvarietu W, že V je lokálne normálna na W. Pre totálny obraz $T[W]$ podvariety W platí: $\dim T[W] > \dim W$.

Použitím topologických metód sa vzťahy variet v biracionálnej korešpondencii stali ešte priehľadnejšie. Majú nasledovnú podobu: Nech X, Y sú kváziprojektívne variety. Zobrazenie $f : X \dashrightarrow Y$ je biracionálnym zobrazením (= biracionálnym izomorfizmom), ak existujú také podmnožiny $U \subset X, V \;\subset Y$, že U je otvorená a hustá v X, V otvorená a hustá v Y, a U, V sú navzájom izomorfné (t. j. pre okruhy regulárnych funkcií na U a V platí $k[U] \overset{\sim}{\dashrightarrow} k[V]$).

Biracionálne zobrazenie f môže mať rôzne vyjadrenia $\varphi(f)$. Ku každému vyjadreniu φ existuje definičná oblasť $D(\varphi(f))$, ktorá je neprázdnou otvorenou podmnožinou variety X. Zjednotenie

$$Def(f) = \cup_{\varphi(f)} D(\varphi(f))$$

je úplnou definičnou oblasťou zobrazenia f. Je zjednotením regulárnych a iregulárnych podvariet variety V. Jej doplnok $X \setminus Def(f)$ je fundamentálna podvarieta zobrazenia f na X.

Nech $f : X \dashrightarrow Y$ je biracionálne zobrazenie a $\varphi : U \;\dashrightarrow Y$ niektoré jeho vyjadrenie. Nech $\Gamma_\varphi = \Gamma_0$ je graf tohto vyjadrenia; nazvime $\Gamma = \bar{\Gamma}_0$ grafom Γ_f zobrazenia f. Nech p_1, resp. p_2 je projekcia variety Γ_f na X, resp. Y. Pre ľubovoľnú uzavretú podmnožinu $Z \subseteq X$ je totálnym obrazom varieta

$$T[Z] := p_2(p_1^{-1}(Z)) \; .$$

Zariského hlavná veta má po úprave tvar:
Nech $T : X \dashrightarrow Y$ je biracionálna transformácia a nech X je normálna. Pre fundamentálny bod P transformácie je jeho totálny obraz súvislý a má rozmer ≥ 1.

III. BIRACIONÁLNE TRANSFORMÁCIE SCHÉM

Nech X, Y sú ireducibilné schémy (t. j. príslušné topologické priestory sú ireducibilné).

Nech $U \subset X$ je podmnožina, ktorá je v X otvorená a hustá, a nech $f : U \to Y$ je morfizmus. Takisto nech podmnožina $V \subset X$ je v X otvorená a hustá a nech $g : V \to Y$ je morfizmus. Hovorí sa, že morfizmus f je ekvivalentný s morfizmom g (na prieniku $U \cap V$), ak platí $f \mid U \cap V = g \mid U \cap V$. Trieda ekvivalencie morfizmov sa nazýva *racionálny morfizmus* schémy X do schémy Y.

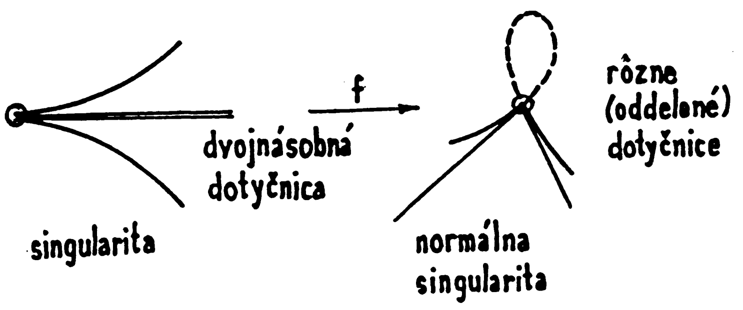
Táto formálne jednoduchá definícia *racionálneho* morfizmu odráža fakt, že *každý* morfizmus je svojou podstatou reprezentantom racionálneho morfizmu.

Ďalší postup k biracionálnemu morfizmu je zrejmý: v jazyku teórie kategórií kopíruje klasickú cestu.

IV. POUŽITIE BIRACIONÁLNYCH TRANSFORMÁCIÍ

1. *Klasická aplikácia*: Redukcia singularít rovinných algebrických kriviek.

Cieľom postupu je dospieť konečnou sériou biracionálnych zobrazení od danej krivky ku krivke, ktorá má len tzv. *normálové singularity* , t. j. má len také viacnásobné body, v ktorých sú len jednoduché dotyčnice (obr. 7).



Obr. 7

2. *„Nafúknutie“* (blowing up, σ–proces, „nadutie“)

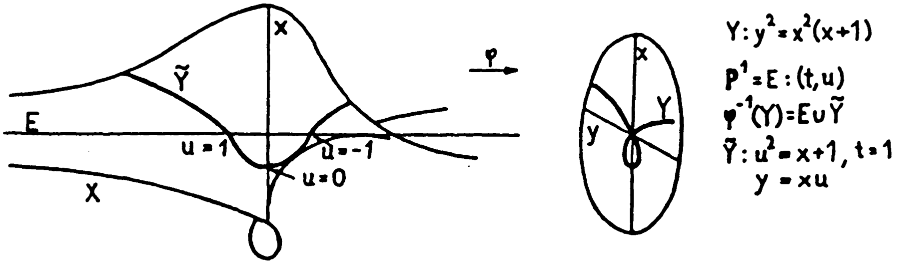
„Nafúknutie“ n–rozmerného afinného priestoru A^n v bode $O = (0, \ldots, 0)$ sa konštruuje nasledovne:

1. Utvorí sa súčin $A^n \times P^{n-1}$: ku každému bodu $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ a každému bodu $(y_1, \ldots, y_n) \in P^{n-1}$ (netypické číslovanie súradníc) sa utvorí bod $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ homogénny v súradniciach $y_1, \ldots, y_n$.
2. Nafúknutím priestoru A^n v bode $O = (0, \ldots, 0)$ sa nazýva uzavretá množina $X \subset A^n \times P^{n-1}$, ktorá je definovaná nasledovne:

$$X : x_i y_j - x_j y_i = 0; i, j = 1, \ldots, n \; .$$

Pre súčin $A^n \times P^{n-1}$ sú definované projekcie $p_1 : A^n \times P^{n-1} \to A^n$ a $p_2 : A^n \times P^{n-1} \to P^{n-1}$. Zúženie projekcie p_1 na X označme φ; teda $\varphi := p_1 \mid X$.

Potom platí
$\varphi^{-}1(P) = P' \in X$ pre $P \neq 0$
$\varphi^{-}1(0) = P^{n-1}$
Príklad nafúknutia pre A^2 a P^1 je znázornený na obr. 8.



Obr. 8

Proces nafúknutia možno zovšeobecniť z bodu na ľubovoľnú podvarietu. Tak je v práci [5] vyšetrované „nafúknutie pozdĺž variety".

LITERATURA

[1] Hudson, H. P., *Cremona Transformations*, Cambridge, 1927.
[2] Waerden, B. van der, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939.
[3] Zariski, O, *Foundations of the General Theory of Algebraic Correspondences*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 490.
[4] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.
[5] Hironaka, H., *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero*, Ann. of Math. **79** (1964), I, 169–203, II, 205–326.