GEODÉZIE A GEOMETRIE

Rozšířená přednáška 6. prosince 1995 k autorovým sedmdesátinám pro geodety a matematiky[1]

Zbyněk Nádeník

Vážené paní, pánové,

všechny vás srdečně vítám a všem děkuji za přítomnost.

* * *

I. Pohledy zpátky

V únoru 1996 bude tomu sto let, kdy rozhodnutím vídeňského ministerstva bylo na pražské technice zavedeno dvouleté samostatné zeměměřické studium. Začalo v zimním semestru školního roku 1896/97. Nejvíce se o ně zasloužil profesor Josef Petřík (1866–1944). Bylo mu tehdy třicet let. Našim nynějším studentům je téměř neznámý.

Letos uplynulo právě 200 let od založení École polytechnique v Paříži. Jejím duchovním otcem byl Gaspard Monge, kterého známe hlavně z deskriptivní geometrie. S ním na škole působili P. S. Laplace a A. M. Legendre, oba dobře známí v geodézii i v matematice. École polytechnique se stala vzorem pro evropské technické školství. Podle ní prosadil na začátku minulého století František Gerstner (1758–1832) i reorganizaci pražské stavovské inženýrské školy. A zase: Kolik našich studentů ví, kdo byl František Gerstner? Vloni se v Petrohradě konalo francouzsko-ruské symposium „Звезды политехнической школы Франции". Podrobnější zprávu o něm jsem četl v časopisu „Геодезия и картография", spolu s dalšími dvěma články o vzniku a profesorech École polytechnique. Výročí této školy stálo za připomenutí ruským geodetům, ale – pokud vím – nikoliv matematikům na ČVUT. Ti měli mít vzor v dlouholetém profesoru deskriptivní geometrie a v roce 1945 rektoru ČVUT Františku Kadeřávkovi (1885–1961), který v roce 1946 nezapomněl na 200. výročí Mongeova narození a významně k němu přispěl. Kdybych slyšel otázku, co já jsem k těmto výročím učinil, dovedl bych odpovědět.

Prosím své kolegy geodety, aby – i v případě, že na stoleté výročí geodetického vysokého školství pamatují – mi dovolili vyslovit přání, aby Josefa Petříka připomněli též studentům. Musíme naši práci poměřovat výkony našich předchůdců. Třicetiletý Petřík je jedním z nich.

---

[1] Přednáška byla poprvé otištěna v periodiku *Přehled informací* 26(1996), č. 1, vydávaném Výzkumným ústavem geodetickým, topografickým a kartografickým, Zdiby.

Učební plán samostatného zeměměřického studia v jeho počátcích před sto lety vypadal takto:[2]

semestr	I.	II.	III.	IV.
matematika	7 + 1	7 + 1	5 + 1	5 +1
deskr. geometrie	5		6	
.				
.				
.				
celkem	22 + 8	21 + 16	24 +4	14 +7

Matematiku v obou ročnících přednášel profesor Eduard Weyr (1852–1903) a deskriptivní geometrii vyučoval profesor Karel Pelc (1845–1908). Kdo se jen trochu seznámil s poměry v pražské matematické obci před sto lety, přizná, že přednášky byly v nejlepších rukou. Matematika měla téměř čtvrtinu, nyní má něco přes osminu z celkové dotace. Úhrnný obsah 24 + 4 hod. byl před sto lety přibližně stejný jako nyní. Dobře si všimněme, že hodiny cvičení byly 1/6 hodin přednášek, zatímco dnes jsou v poměru asi 2 : 2,6 – to znamená zhruba čtyřnásobné zvětšení hodin cvičení, ovšem na úkor přednášky. Je tedy samozřejmé, že v ní nelze probrat tolik, co před sto lety. To je pozoruhodný protějšek k tomu, jak se za posledních sto let rozšířily aplikace matematiky. Přesto by mě tento stav nemrzel, kdyby – kdyby bylo splněno, o čem se vbrzku ještě zmíním. Zatím jen připojím, že neznám studii, která by přesvědčivě dokládala, že cvičení s větším počtem hodin a s podstatně menším počtem studentů – řekněme jako nyní kolem 20 – poskytují úměrně lepší výsledky v matematické přípravě.

* * *

Už v prvních letech našeho století pracovala mezinárodní matematická komise pro vyučování. Někdy kolem roku 1910 podnítila anketu o matematice na vysokých technických školách. Ankety se zúčastnily techniky z Evropy a severní Ameriky. Nejvíce byly zastoupeny německé školy. Čtyři techniky v českých zemích – české a německé v Praze a v Brně – do ankety nezasáhly. Souhrnná rozsáhlá zpráva byla publikována krátce před první světovou válkou. V závěru byla doporučení, z nichž dvě uvedu:

Matematik vyučující na technice má účelně využívat skromného času, který je mu vyměřen. Má se vyvarovat přílišného zdůrazňování jemností své vědy.

S prvním doporučením zcela souhlasím. Je třeba mu rozumět tak, že matematik na technice se má natolik seznámit s inženýrským oborem, aby mohl posoudit, co z matematiky je či není třeba. I s druhým doporučením bych souhlasil – až na jistou výhradu, kterou vyslovím, jakmile předvedu několik „jemností své vědy“.

[2] Viz P. Potužák, J. Pudr: *Organizátor a budovatel novodobého československého zeměměřictví*, Acta Polytechnica, řada VI, 1969, str. 137–152.

Než přejdu k těmto „jemnostem“, tak ještě malou poznámku na závěr úvodní části. O anketě jsem se nejednou zmínil před svými kolegy – matematiky z technik. Žádný mi neřekl, že ji zná (a že se mnou souhlasí či nesouhlasí, když radím seznámit se s ní) a žádný mě nepožádal o její bibliografická data. Jedním z důvodů tohoto nezájmu může být obava, že ve světle dřívějších studií o matematikově práci na technikách by dnešní diskuse o ní rychle vybledly.

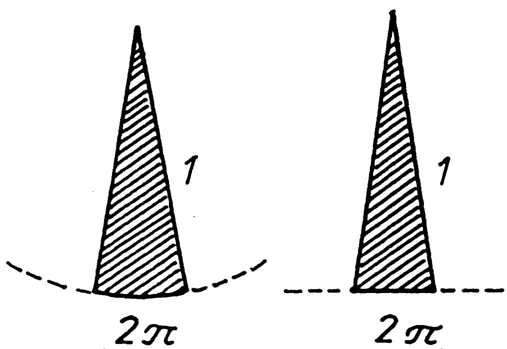
II. Matematické „jemnosti“

Zůstanu samozřejmě jen u „jemností“, které jsou v dosahu našich studentů. Kde je hranice, za níž – zvláště pro jednotlivé studenty – začíná „přílišné zdůrazňování jemností matematiky“? Tuto hranici musí umět odhadnout učitel – matematik, též na základě svých alespoň povšechných poznatků o technickém směru, pro jehož studenty přednáší.

K těmto úkolům se ještě krátce vrátím na konci této II. části, ale nejdříve uvedu několik ilustrací k oné jemnosti.

Příklad 1. [často tradovaný]

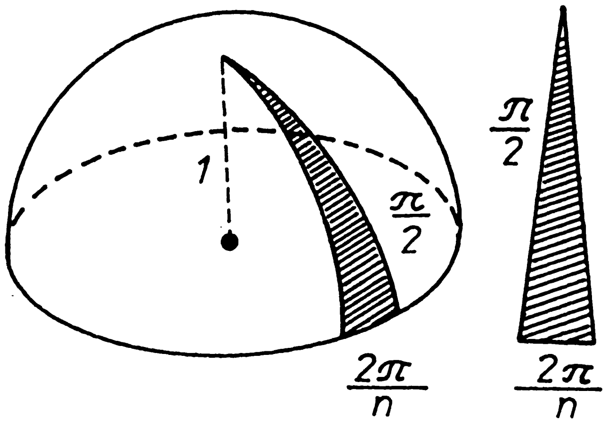
Víme, že délka kružnice o poloměru 1 je 2π. Pokusíme se vypočítat obsah jednotkového kruhu. Rozřežeme jej na větší počet n shodných výsečí; každé přísluší oblouk o délce $2\pi/n$ (viz obr. 1).



Obr. 1

Při výpočtu obsahu výseče se dopustíme zanedbatelné chyby, jestliže výseč nahradíme rovnoramenným trojúhelníkem o základně $2\pi/n$ a rameni 1. Obsah tohoto trojúhelníka vypočítáme jako staří Egypťané při vyměřování polí podél Nilu: poloviční součin délek základny a ramene, tedy $(1/2) \cdot (2\pi/n) \cdot 1 = \pi/n$. Výsečí máme v našem kruhu celkem n, takže jeho obsah je $n \cdot (\pi/n) = \pi$. Můžeme se pochválit, jak dobře jsme postupovali, neboť odjinud víme, že jsme vskutku měli dostat π.

Povzbuzeni tímto úspěchem propočítáme analogicky povrch poloviny kulové plochy o poloměru 1. Zase odjinud víme, že má vyjít 2π (viz obr. 2).



Obr. 2

Mysleme si, že severní polovinu jednotkového globu jsme podél meridiánů zase rozřezali na větší počet sférických trojúhelníků. Každý z nich má základnu délky $2\pi/n$ na rovníku a rameno délky $\pi/2$ v polovině meridiánu. Bude-li základna dostatečně malá – tj. bude-li n dostatečně velké – budeme moci úzký sférický trojúhelník vyrovnat do roviny v rovnoramenný trojúhelník opět se základnou $2\pi/n$ a ramenem $\pi/2$. Podle starých Egypťanů je obsah tohoto trojúhelníka – a tedy i výchozího sférického trojúhelníka – roven $(1/2)\cdot(2\pi/n)\cdot(\pi/2) = \pi^2/2n$. Protože severní polovinu našeho jednotkového globu pokrývá n takových sférických trojúhelníků, tak nám pro její obsah vychází $n\cdot(\pi^2/2n) = \pi^2/2$. To je ovšem nepříjemné překvapení, protože $2\pi \neq \pi^2/2$.

Kde je omyl či chyba? Dokonce už v první úloze se správným výsledkem; postupoval jsem v ní totiž velmi ledabyle. Jen trošku podrobnější rozbor by ukázal úskalí, kterých jsem se nedotkl. Kdybych už v první úloze byl více dbal na „jemnosti své vědy“, byl bych se včas zarazil a odpustil si špatný výsledek v druhé úloze.

Příklad 2. [Н. Н. Воробьев: Теория рядов, Moskva 1986 (5. vyd., str. 282–283)]

Pro geometrickou řadu $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ lze jistě psát

$$1 + x + x^2 + \dots = 1 + x(1 + x + x^2 + \dots)\ ,$$

takže pro $x \neq 1$ vychází

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}\ .$$

Dostáváme pak tyto pozoruhodné výsledky:

pro $x = -1$ je $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$,

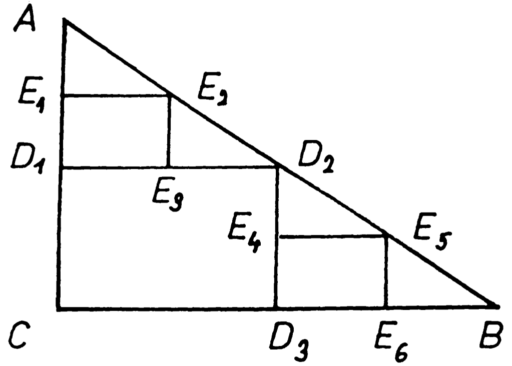
pro $x = 2$ je $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots = -1$.

Nekonečný součet celých čísel nám vychází jako zlomek, v druhém případě dokonce nekonečný součet kladných čísel dává záporný součet.

Vídám práci s nekonečnými řadami, jejichž výtvarné zákony jsou tak komplikované, že i kdyby se znaly, sotva by je bylo možné ovládnout a rozhodnout o konvergenci. Samozřejmě vím, že v aplikacích je často nezbytné nezastavit se před těmito obtížemi, ale přece jen by jistá opatrnost měla být aspoň naznačena.

Příklad 3.

Vezměme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C (viz obr. 3).



Obr. 3

Označme D_1, D_2, D_3 středy stran AC, AB, BC. Lomená čára $AD_1D_2D_3B$ je stejně dlouhá jako lomená čára ACB.
Označme $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ středy úseček AD_1, AD_2, D_1D_2, D_2D_3, D_2B, D_3B. Lomená čára $AE_1E_2E_3D_2E_4E_5E_6B$ je stejně dlouhá jako lomená čára ACB. Konstrukci opakujeme; učiníme-li tak v dostatečném počtu, získáme lomenou čáru délky $|AC| + |BC|$ v libovolně malé blízkosti úsečky AB. Pokračujeme „in infinitum", až naše lomené čáry přejdou v úsečku AB. Tím jsme „napravili" Pythagorovu větu: „Délka přepony je rovna součtu délek odvěsen".

Tento příklad není nikterak vzdálen od reality. Na obrazovce kreslí počítač úsečku AB (nerovnoběžnou s osami) jako jednu z našich lomených čar s dostatečně velkým počtem vrcholů.

Další dva příklady mají jiný charakter. Ukazují, jak je ošemetné z platnosti nějakého výroku, která byla ověřena v mnoha případech, usuzovat na platnost onoho výroku vůbec.

Příklad 4. [L. Euler]

Mysleme si trojčlen

$$n^2 + n + 41\ .$$

Budeme-li za n dosazovat celá nezáporná čísla $0, 1, 2, 3, \dots$, snadno si v tabulkách prvočísel zjistíme, že pro čtyřicet hodnot $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ je výsledek dosazení vždy prvočíslo. Mohu si už myslit, že je tak tomu pro každé další n? Pro $n = 40$ čeká překvapení:

$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(40 + 1) = 41^2.$$

Příklad 5. [J. Lense: *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, Berlin 1953, 3. vyd., str. 15]

Z učebnic diferenciálního počtu víme, že pro každé x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

a řada

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

je konvergentní. Při $x > 0$ tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^n} = \infty$$

a řada

$$1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \cdots + \frac{n!}{x^n} + \ldots$$

je divergentní.

Zvolme $x = 10$. Z tabulek pro faktoriály snadno sestavíme první členy poslední řady:

n	$n!$	$\frac{n!}{10^n}$
0	1	1
1	1	0,1
2	2	0,02
3	6	0,006
4	24	0,002 4
5	120	0,001 2
6	720	0,000 72
7	5 040	0,000 504
8	40 320	0,000 403 2
9	362 880	0,000 362 88
10	3 628 800	0,000 362 88
11	39 916 800	0,000 399 168
12	479 001 600	0,000 479 001 6
13	6 227 020 800	0,000 6.. ...
14	87 178 291 200	0,000 8.. ...
15	1 307 674 368 000	0,001 3.. ...

Vidíme, že první členy nejdříve rychle, pak pomaleji až k $n = 9$ klesají a od $n = 10$ pomalu rostou. Ačkoliv je řada divergentní, pohled na rychle klesající pouhé první čtyři členy by sváděl k tomu, že její součet je přibližně

$$1 + 0,1 + 0,02 + 0,006 = 1,126\ .$$

Snad už je srozumitelnější, proč se někdy dívám se smíšenými pocity na tento zásah do nekonečné řady: Po několika počátečních členech se usekne a – aniž by se diskutoval výtvarný zákon – o zbytku či chybě se soudí podle prvního zanedbatelného členu. Co kdyby některé další členy, třeba s hodně vysokými indexy, začaly nápadně „vyskakovat"? Vím, že je to velice málo pravděpodobné, ba skoro vyloučeno, protože obvykle se jedná o řady, jejichž členy jsou zlomky, v nichž jmenovatelé se vůči čitatelům rychle zvětšují, ale k úplnému zaplašení stínu pochybnosti to nestačí.

Příklad 6.

Tento příklad má opět jinou povahu. Je spojen s malou příhodou, která se mi stala jen jednou za víc než 40 let učitelské činnosti.

Před nějakými šesti, sedmi roky jsem na požádání jednoho svého kolegy – geodeta prohlédl práci, s níž se jistý student přihlásil do soutěže. Studenta jsem upozornil na místo, v němž měl nedopatření. Šlo o tuto věc:

Pokud má funkce f argumentu $x \in J$ na intervalu J derivaci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \neq 0 \tag{*}$$

[tj. f je ryze monotónní], je možno z rovnice $y = f(x)$ naopak vyjádřit $x = F(y)$ s platností na celém intervalu proměnné y, na nějž je funkcí f zobrazen interval J. Ale při zobrazení mezi rovinnými oblastmi je věc složitější a v oné studentské práci byla chybně. Podmínka jednojednoznačnosti zobrazení a podmínka analogická k (*) – nenulovost funkcionálního determinantu transformace, vytvořeného z parciálních derivací – jsou totiž nezávislé. K tomu jsou vymyšleny i jednoduché příklady.

O dva tři měsíce později podal student práci jako diplomovou, a když jsem ho při závěrečné zkoušce na neoprávněné nedopatření opětně upozornil, promptně mi odpověděl, že to nemá vliv na další výsledky. Měl pravdu, protože v kompilaci, kterou práce byla, zůstalo nedopatření bez důsledků. Ale nemohlo zůstat bez důsledků pro studentovo myšlení.

Argument „to nemá vliv na další výsledky" mě nepřekvapil, protože jej znám už dlouhá léta. Překvapilo mě, že jsem jej slyšel od studenta při jeho závěrečné zkoušce a po mém dřívějším upozornění.

* * *

Vracím se nyní k závěru předcházející I. části, k 80 let starému doporučení mezinárodní matematické komise, aby se matematik na technice vyvaroval přílišného zdůrazňování jemností své vědy.

Svůj názor na toto doporučení shrnu takto:

Už dlouhou řadu let se snažím, aby se z každého ročníku (dejme tomu o 100 studentech) vydělila menší skupina (dejme tomu o 10 studentech). Větší skupinu (o 90 studentech) bych „jemnostmi své vědy" neobtěžoval, zbývající menší skupinu však ano – aby se totiž v této menší skupině objevili 2 – 3 studenti, kteří do oněch „jemností“ vniknou, matematice vskutku porozumějí a budou umět s ní prospět svému oboru.

III. Geometrie v novější geodézii

Friedrich Hopfner (1881–1949) se narodil v Trutnově, studoval v Praze na německé universitě a technice, v Praze i promoval. V roce 1936 byl jmenován profesorem vyšší geodézie na vídeňské technice, ale už v roce 1938 byl nucen – v důsledku známých událostí z března onoho roku – z ní odejít. Vrátil se v roce 1945 a v roce 1948 byl zvolen rektorem. Kdyby si jeho knihu *Physikalische Geodäsie*, Leipzig 1933, vzali naši studenti, tak hned v prvních kapitolách – řeknu to mírně – zakopnou o eliptické a Laméovy funkce. Několik málo měsíců před svou tragickou smrtí vydal F. Hopfner knihu *Grundlagen der Geodäsie*, Wien 1949. V předmluvě ji charakterizuje jako pokus přiblížit geodézii matematikům. Když jsem před mnoha lety měl tuto knihu poprvé v ruce, neušla mi následující pasáž z úvodu:

An kritischen Stimmen, die nicht wahr haben wollen, dass eben auch die Geodäsie nur ein kleines Teilgebiet angewandter Mathematik und Physik ist und sie auch unter einem solchen Gesichtspunkt behandelt werden kann, wird es unter den Geodäten vielleicht nicht fehlen. Ihnen antworte ich wie einst Peter Abälard: Si omnes patres sic, at ego non sic.[3]

Pak se F. Hopfner odvolává na knihu C. F. Baeschlina *Einführung in die Kurven- und Flächentheorie auf vektorieller Grundlage*, Zürich 1947 (lze se na ni dívat jako na přípravu k obsáhlé Baeschlinově učebnici *Lehrbuch der Geodäsie*, Zürich 1948), a dodává, že by ji autor jistě nevydal, *wenn er nicht von der Überzeugung durchdrungen wäre, dass die deutschen Geodäten in ihrer Disziplin mehr als bisher ein Anwendungsgebiet der Geometrie erblicken sollen.*[4]

Zhruba 2000 let – od Eratosthena až do minulého století – využívala geodézie pro určení tvaru Země geometrii. (Trochu odbočím. Žáčkům se vtlouká do hlav vztah mezi poloměrem kružnice, středovým úhlem a jemu příslušným obloukem. Nikdy by tuto relaci nezapomněli, kdyby se jim řeklo o geniálním Eratosthenově nápadu. Podobných příkladů na využití elementární geometrie v geodézii je daleko víc, bohužel se o nich málo ví.)

V druhé polovině minulého století nastal prudký nástup fyzikálních metod, které poskytovaly výsledky přesnější. (Srv. G. Perrier: *Petite histoire de la géodésie*, Paris 1939; německý překlad 1950.)

[3] *Kritických hlasů, které nechtějí přiznat, že právě také geodézie je malý částečný obor aplikované matematiky a fyziky a také z tohoto hlediska o ní může být pojednáváno, nebude asi mezi geodety chybět. Jim odpovídám jako kdysi Petr Abélard: Jestliže všichni otcové tak, já přece jinak.* [Pierre Abélard (1079–1143), scholastický filosof, v Paříži měl až 5 000 posluchačů na teologických a filosofických přednáškách. Viz Ottův slovník naučný I, str. 48–50.]

[4] *kdyby nebyl proniknut přesvědčením, že němečtí geodeti mají ve své disciplině spatřovat více než dosud aplikační oblast geometrie.*

Ale v poslední době je citelná renesance geometrie v geodézii. To není izolovaný jev. Moderní partie fyziky našly v diferenciální geometrii významný aparát a zdá se, že se tak stalo i v geodézii.

Uvedu chronologicky seřazený seznam knih, které dokládají oživený zájem geodézie o geometrii:

1. M. Hotine (1898-1968): *Mathematical Geodesy*	1969
2. S. Heitz: *Mechanik fester Körper mit Anwendungen in Geodäsie, Geophysik und Astronomie* I, II	1980, 1983
3. A. Marussi (1908-1984): *Intrinsic Geodesy*	1985
4. S. Heitz: *Koordinaten auf geodätischen Bezugsflächen*	1985
Coordinates in Geodesy	1988
5. S. Heitz – E. Stöcker-Meier: *Grundlagen der physikalischen Geodäsie*[5]	1990, 1994
6. M. Hotine: *Differential Geodesy*	1991
7. H. Moritz – B. Hofmann-Wellenhof: *Geometry, Relativity, Geodesy*	1993
8. J. Zund: *Foundations of Differential Geodesy*	1994

Knihu 1 jsem dostal k recensi z referativního časopisu *Zentralblatt für Mathematik.* Ze stejného důvodu jsem dostal knihu 8 z referativního časopisu *Mathematical Reviews.* Knihy 4 a 7 jsem recensoval pro *Studia geophysica et geodaetica.* Knihy 2 a 5 mi daroval autor. Knihy 3 a 7 mi laskavě zapůjčil prof. M. Burša z Astronomického ústavu. Knihu 6 mi se vzácnou ochotou opatřil doc. V. Šobr ze Západočeské university.

Knihy 3 a 6 jsou posmrtně vyšlé sborníky prací Marussiho a Hotineho. Antonio Marussi jako vůbec první aplikoval tensorový počet v geodézii.

Autoři knihy 5 se v úvodu odvolávají na citát z předmluvy k Hopfnerově knize, který jsem uvedl, a rozvíjejí jej. Co napsali prof. Hopfner a 40 let po něm S. Heitz a E. Stöker-Meier, jsou vise, kterým by měli geodeti i geometři-matematici věnovat více pozornosti.

Názvy knih potřebují krátký komentář. Kniha 1 obsahuje první důsledné zavedení tensorového počtu do geodézie. Knihy 2 a 5 využívají tensorového počtu v omezenější míře. Kniha 4 v rozsahu i hloubce aplikací tensorového počtu překonává knihu 1. Kniha 7 je cele protkána tensorovým počtem. Společným znakem knih 1 – 7 jsou tak aplikace tensorového počtu v geodézii. Konečně kniha 8 obsahuje geodetické využití vnějších forem.

Tensorový počet vytvořil Ital G. Ricci-Curbastro (1853–1924) v sérii prací od druhé poloviny 80. let minulého století. Proto se též mluví o Ricciho počtu. Ale Ricci budoval svou teorii velmi formálně a vzdáleně od tehdejšího geometrického myšlení, takže mezi matematiky téměř nenacházel odezvu. Tento nezájem trval až do roku 1916, kdy A. Einstein ve své teorii obecné relativity využil tensorového počtu. Když pak hned v následujícím roce Ricciho žák a spolupracovník T. Levi-Civita (1873–1941) objevil geometrickou interpretaci

[5] 3. vydání 1998

ústřední Ricciho operace, tensorový počet se stal naopak předmětem zájmu mnoha matematiků a fyziků.

Počet vnějších forem vytvořil Francouz E. Cartan (1869–1951) na přelomu století. Proto se též mluví o Cartanově počtu. Zažil podobný osud jako tensorový počet, s tím rozdílem, že nezájem zlomil sám Cartan ve 20. letech, kdy rozřešil jistý problém z projektivní diferenciální geometrie, který vzdoroval jiným metodám. První soustavné pojednání o počtu vnějších forem – nikoliv od E. Cartana samého – napsal Eduard Čech v posledních třech kapitolách knihy G. Fubini (1870–1943) – E. Čech (1893–1960): *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris 1931.

Porovnám nyní citované knihy podle obtížnosti. Sborníky 3 a 6 nechám stranou, stejně tak knihy 2 a 5, v nichž tensorový počet není v popředí. Pro našeho studenta nebo mladého absolventa není kniha 1 žádná lehká či příjemná četba. Ještě ve větší míře to platí o knize 4, která je mnohem sevřenější a která v geometrických aplikacích tensorového počtu jde zřetelně dále. Nejpřístupnější je kniha 7, dokonce s velmi zřetelným odstupem od knih 1 a 4. Takže vzestupné pořadí obtížnosti by bylo 7 – 1 – 4. Kniha 8 s vnějšími formami je v obtížnosti asi na úrovni knihy 4. Pokud by naši studenti bez delší přípravy sáhli po těchto knihách 4 a 8, ztroskotají na nich.

Když jsem na začátku 70. let začal přednášet o knize 1, musil jsem se rozhodnout mezi krajnostmi: Buďto vést výklad úplně po svém a až později se k ní vracet – anebo postupovat úplně podle ní. Rozhodl jsem se tenkrát pro jakýsi kompromis, který byl z části motivován i obavou, aby můj přípravný dlouhý výklad nepřekročil trpělivost posluchačů. Proto jsem postupoval tak, že jsem kombinoval výklad přidržující se knihy 1 s vlastními komentáři či doplněními nebo odbočkami. Při knize 4 jsem musil začít s vlastním výkladem a ve styčných místech jsem přecházel k pasážím v knize. Tato samostatná příprava velmi usnadnila pozdější práci s knihou 7. Nynější zimní semestr jsem věnoval úvodu ke studiu knihy 8. Bude ještě nějakou dobu trvat, než budu moci z této knihy vybrat vhodnou partii a věnovat se jí.

V posledních řádcích jsou skryty velmi vážné metodické otázky. Jsou protějškem k tomu, co vidím ve své bezprostřední blízkosti: Předmět deskriptivní geometrie je zdoben metodickými přívěsky – publikovanými články, přednáškami na konferencích aj. Přitom dnešní výukový rozsah tohoto předmětu je zlomkem toho, co jsem kdysi slyšel na prostějovské reálce. Měli jsme deskriptivní geometrii již od 4. třídy včetně, srovnejte to s jejím dnešním rozsahem na geodetickém oboru. Moji profesoři na reálce podobné metodické rolničky nepotřebovali. Dokázali naučit i bez nich.

* * *

Neměli bychom přehlédnout, že v názvu knihy 7 je mezi geometrií a geodézií relativita. Objevila se – pokud je mi známo – už v řadě geodetických prací. To nemůže překvapit. Gravitace je pro geodézii velice významný fyzikální jev a čím více bude geodézie přecházet do planetárního prostoru, tím více bude musit přihlížet k vysvětlení gravitačních efektů – ve smyslu teorie relativity –

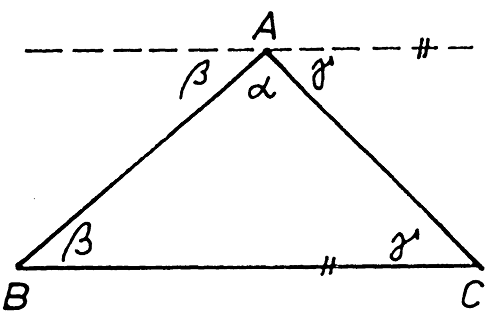
jako projevů zakřivení prostoru. Ale studovat tyto prostory znamená předně oprostit se od tradičních pohledů na geometrii, v níž platí jedině, co stvořil Euklid. Studovat zakřivené prostory znamená seznámit se s aparátem, který to studium vůbec umožňuje; a ovšem připustit, že se bude setkávat s úkazy, které budou vůči euklidovské geometrii vypadat absurdní.

K práci se zakřivenými prostory má geodézie výhodnou výchozí pozici. Jakmile v terénu pracuje s trojúhelníky o stranách dlouhých několik desítek kilometrů, dostává se do geometrie, v níž součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180°. Ale pak není vzdálená otázka, zda existuje geometrie, v níž součet úhlů trojúhelníka je menší než 180°. Je příznačné, že na C. F. Gausse, který ve studiu této jen zdánlivě absurdní geometrie hodně pokročil, naléhali dva geodeti-astronomové, aby pokračoval a uveřejnil je. Byli to H. Ch. Schumacher (1780–1850), od roku 1815 ředitel astronomické observatoře při universitě v Kodani, a F. W. Bessel.

* * *

Když se se svými studenty trochu více poznám, obvykle si neodpustím otázku: Měříte-li v terénu úhly trojúhelníka o stranách nikoliv delších než několik kilometrů – takže trojúhelník považujete za rovinný – zpravidla vám součet úhlů nedá 180°. Z jakého důvodu tento součet vyrovnáváte na 180° a nikoliv na 181° nebo 179°? Samozřejmě je to trochu nebezpečná otázka, neboť by mohla znamenat, že patřím jinam než k tabuli.

Nikdy jsem nedostal vyhovující odpověď. Většinou zůstalo u údivu. Dokonce se nepamatuji, že bych někdy slyšel aspoň tuto konstrukci: Vrcholem A trojúhelníka ABC vedu rovnoběžku s protější stranou BC. Přímý úhel při vrcholu A, určený touto rovnoběžkou se skládá z úhlu trojúhelníka při vrcholu A a z úhlů střídavých k úhlům trojúhelníka při vrcholech B a C (viz obr. 4). Věc je ovšem hlubší. Čím mám zaručeno, že bodem A jde právě jedna přímka, která – ať jakkoliv daleko protažená, nemá s jakkoliv daleko protaženou spojnicí BC žádný bod společný?



Obr. 4

Anebo jinak: Nakreslím-li pomocí pravítek „kus“ oné přímky, které se říká rovnoběžka bodem A ke spojnici BC, a budu-li pak tento „kus“ prodlužovat na metr, 10 metrů, 100 metrů, ... , vskutku se nikdy nesetká s podobně prodlužovanou stranou BC?

Protože geodeti pracují s geometrií, měli by dobře rozlišovat mezi geometrií jako souborem poznatků odvozených dedukcí z jistého malého počtu tvrzení přijatých bez důkazu jako správných a mezi geometrií z našeho reálného světa. Frapantní příklad: U Euklida „bod je to, co dílu nemá“, ale když rýsuji, vyznačím „bod“ jako to, co je společné dvěma čarám jisté síly a co tedy jistě „má nějaký díl“.

Dnešní studenti budou pracovat do třetiny příštího věku. Zkusme si prosím promítnout, k jak velkým změnám došlo v geodézii za poslední čtyři desetiletí od prvních umělých družic Země a co tyto změny znamenaly pro aplikace matematiky v geodézii. Když pozoruji, jak se stále více rozevírá mezera, která dělí naše nynější studenty od knih 1 – 8, nevidím budoucnost v pěkných barvách.

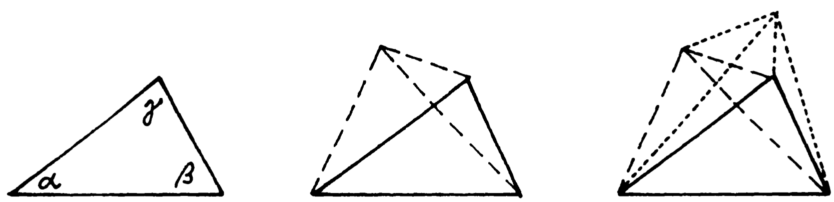
IV. Dvě geodeticko-geometrické úlohy

Přejdu nyní ke dvěma geodeticko-geometrickým úlohám, jejichž význam pro geodézii už dávno vybledl, ale pro geometrii zůstávají obě živé.

A) Úloha o sférickém simplexu.

V rovině (v dvojrozměrném prostoru) si mysleme trojúhelník (s plně vytaženými stranami), viz obr. 5. Budeme mu též říkat 2-simplex. Pro jeho úhly α, β, γ platí

$$(*) \qquad \alpha + \beta + \gamma = \pi .$$



Obr. 5

V trojrozměrném prostoru si mysleme čtyřstěn, budeme mu též říkat 3-simplex. Vznikne tak, že mimo dvojrozměrný prostor plně vytaženého 2-simplexu zvolíme bod a čárkovanými úsečkami jej spojíme s vrcholy 2-simplexu. V 3-simplexu jsou už dva druhy úhlů: úhly při čtyřech vrcholech a úhly při šesti hranách. Pro jistý algebraický součet těchto celkem deseti úhlů, vhodně definovaných a normovaných, nalezl dánský matematik Jürgen Gram v roce 1874 relaci, která je prostorovým protějškem k (*).

V čtyřrozměrném prostoru si mysleme 4-simplex. Vznikne tak, že mimo trojrozměrný prostor našeho 3-simplexu s plně a čárkovaně vytaženými hranami zvolíme bod a tečkovanými úsečkami jej spojíme s vrcholy 3-simplexu. Nyní budeme mít už trojí úhly: Při vrcholech, při hranách tvořených úsečkami, při „hranách“ tvořených trojúhelníky. A zase. Pro jistý algebraický součet těchto úhlů, vhodně definovaných a normovaných, platí Gramova relace, tj. 4-dimensionální analogie k (*).

Nyní se vraťme k rovinnému trojúhelníku (2-simplexu) a jako jeho protějšek vezměme sférický trojúhelník (sférický 2-simplex) na kulové ploše (sférickém 2-prostoru) o poloměru 1. Víme, že součet úhlů sférického trojúhelníka je větší než π; oč je větší, je tzv. exces, v našem případě s touto vlastností:

$$(**) \qquad \alpha + \beta + \gamma - \pi = \text{obsah sfér. trojúhelníka.}$$

Podobně ke čtyřstěnu (3-simplexu) z rovného trojrozměrného prostoru vezmeme jako jeho protějšek sférický 3-simplex ve sférickém 3-prostoru. A podobně ke 4-simplexu z rovného čtyřrozměrného prostoru vezmeme jako protějšek sférický 4-simplex.

Mezi úhly sférického 3- i 4-simplexu platí opět jisté relace, které jsou jednak

a) analogiemi ke Gramovým relacím pro úhly 3- nebo 4-simplexu z rovného troj- nebo čtyřrozměrného prostoru, jednak
b) analogiemi k relaci (**).

Ale je zde důležitý rozdíl. U sférického 2-simplexu (sférického trojúhelníka na jednotkové kouli) lze pomocí jeho úhlů vyjádřit relací (**) jeho obsah. Podobně u sférického 4-simplexu lze pomocí jeho úhlů vyjádřit relací analogickou k (**) jeho objem.

Všimněme si, že jsem přeskočil sférický 3-simplex. U něj je tomu jinak. Pamatujme si to na chvíli.

Pro řešení sférického trojúhelníka platí věta, která měla dříve v geodézii značný význam; objevil ji zhruba před 200 lety A. M. Legendre. Věta říká, že dostatečně malý sférický trojúhelník lze řešit jako rovinný se všemi úhly zmenšenými o třetinu excesu.

Teprve nyní přijde otázka: Má Legendreův teorém pro sférický 2-simplex analogii pro sférický 3-simplex a sférický 4-simplex? S jistotou lze říci: Užší analogie k Legendrově větě může být až u sférického 4-simplexu, nikoliv u sférického 3-simplexu.

* * *

Legendreův teorém je vůbec nejzajímavější věta z celé trigonometrie. Jeho geniální jednoduchost velmi usnadnila výpočty triangulací, a tím i rozsáhlá geodetická měření v minulém století. Přesto se v knihách o geometrii téměř nenajde. V geodetické literatuře jsou o ní desítky prací, některé ji zpochybňující. Pokud vím, jsou až na jednu všechny založeny na nekonečných řadách. Onou jedinou výjimkou je finitní Gaussův důkaz z roku 1841. Vychází ze vzorců, které vyjadřují kosinus a sinus poloviční strany sférického trojúhelníka jeho úhly. Nedostala se mi do rukou geodetická učebnice, v níž by byl tento Gaussův důkaz reprodukován.

Před lety jsem zjistil, že Legendreův teorém je velmi speciálním případem jisté věty o sférickém trojúhelníku, v níž je zahrnuta i sinová věta a Grunertova věta o čtvrcení excesu vůči tětivovému trojúhelníku.

Hořejší řádky naznačují, kolik otevřených geometrických otázek lze odvinout z Legendreova teorému směrovaného původně do geodézie.

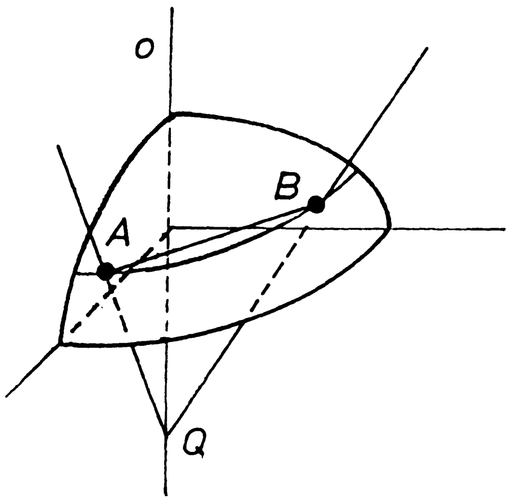
B) Úloha o protějších normálních řezech.

Zvolme na hladké ploše dva body A, B a mysleme si v nich normály. Ta z rovin proložených normálou v bodě A, která jde bodem B, protíná plochu v řezu, který označíme $n(\underline{A}, B)$. Ta z rovin proložených normálou v bodě B, která jde bodem A, protíná plochu v řezu, který označíme $n(\underline{B}, A)$. Čarám $n(\underline{A}, B)$ a $n(\underline{B}, A)$ se v geodézii říká protější normální řezy.

Pro rotační elipsoid se v geodézii traduje, že nejkratší spojnice bodů A, B na něm probíhá mezi protějšími normálními řezy $n(\underline{A}, B)$ a $n(\underline{B}, A)$ a třetí jejich úhly v bodech A, B. Mlčky se předpokládá, že vůči rozměrům referenčního elipsoidu jsou body A, B blízké.

Obě tvrzení jsou – mírně řečeno – polopravdami.

Začneme s prvním. Zvolme na rotačním elipsoidu body A a B na rovnoběžce, která není rovníkem (viz obr. 6).



Obr. 6

Normály v těchto bodech se protínají v bodě Q na ose elipsoidu. Proto ta normální rovina v bodě A, která jde bodem B, splývá s tou normální rovinou v bodě B, která jde bodem A. To znamená, že protější normální řezy $n(\underline{A}, B)$ a $n(\underline{B}, A)$ jsou totožné a jsou tvořeny eliptickým obloukem v rovině (ABQ) normál v bodech A, B. Pokud by první v geodézii tradované tvrzení bylo správné, musila by čára $n(\underline{A}, B) \equiv n(\underline{B}, A)$ být i nejkratší spojnicí bodů A a B. Ale – jak známo – geodetická čára rotačního elipsoidu není, až na výjimečné situace, rovinná.

Kdybych bodem B dostatečně mírně pohnul (z rovnoběžky jdoucí bodem A), normální řezy $n(\underline{A}, B)$ a $n(\underline{B}, A)$ by se rozlišily, ale nejkratší spojnice bodů A a B by se ještě mezi normální řezy nedostala. O třetění úhlů nemůže být řeč.

Veďme z bodu A nikoliv v hlavním směru geodetickou čáru g. Zvolme na ní bod B a sestrojme protější normální řezy $n(\underline{A}, B)$ a $n(\underline{B}, A)$. Označme α, resp. β úhel, který v bodě A svírá geodetika g s normálním řezem $n(\underline{A}, B)$, resp. $n(\underline{B}, A)$. Pak $\lim \alpha/\beta = 1/2$ při $B \to A$ po geodetice g. O třetění lze tedy mluvit až v limitě.

Nedávno jsem se pokusil vyšetřit, jak jsou na trojosém elipsoidu rozloženy body, v nichž normály se protínají. Zvolme na elipsoidu bod P, který neleží v některé osové rovině. Body elipsoidu, v nichž normály protínají normálu v bodě P, leží na křivce Γ, která je 4. stupně, která má v bodě P dvojný bod a která se do každé z osových rovin kolmo promítá v kvartiku s trojným bodem v průmětu bodu P. Taková kvartika je racionální, počítačovou grafikou ji lze vykreslit, takže pro čáru Γ na elipsoidu dostáváme tři ortogonální průměty v jeho osových rovinách. Přejde-li elipsoid v rotační, degeneruje tato čára v meridián a rovnoběžku jdoucí bodem P.

Pokud vím, protější normální řezy a geodetika byly v geodézii studovány vždy pomocí nekonečných řad. Důvody jsou zřejmé: Vyšetřovanou situaci aproximují jednoduššími konstrukcemi. Současně v sobě taková aproximace má jistou nevýhodu: Začnu-li pracovat s řadami, ukládám si předem omezení na jistou dostatečně malou oblast a vyšetřování je lokální. Pro globální studium protějších řezů by bylo třeba volit jiné metody.

Trojosý elipsoid je velmi speciální případ vejčité plochy (tj. dostatečně hladké, uzavřené, konvexní). Geometrická literatura o protějších normálních řezech na takové ploše je až neuvěřitelně skromná. Geometricky zvláště zajímavý případ by nastal, kdyby uvažovaná plocha byla konstantní šířky (tj. její rovnoběžné tečné roviny měly pevnou vzdálenost; velmi speciálním případem je kulová plocha). Při této ploše je každá její normála normálou ve dvou bodech (tzv. protějších); úsek normály mezi nimi má konstantní délku.

V. Poznámky ke studiu

Difficile est saturam non scribere.

Iuvenalis

Je pro mě nesnadné nemluvit satiricky o poměrech, které vidím kolem sebe. Ale vzhledem k charakteru přednášky tento úkol podstoupím a – až na malé výjimky – i splním.

Na pozvánce jsem připsal, že přednášku doplním vzpomínkami na své studium a poznámkami k nynějšímu. I tento příslib o současném studiu splním, ale implicitně. Splním jej s vaší pomocí, jestliže vyhovíte mé prosbě, abyste si při mých poznámkách o mém studiu před padesáti lety vybavili vždycky dnešní protějšek.

Nejsem zahleděn do minulosti, nikdy bych netvrdil, že za mých studijních let bylo vše nejlepší. Ale dnešní studium je v sevření byrokratického krunýře, který jsem jako student nepoznal.

* * *

České vysoké školy byly od listopadu 1939 přes pět roků uzavřeny, a tak v roce 1945 na nich začalo jen v prvním semestru studovat 6 až 7 populačních ročníků. Nemluvím o těch, kteří navázali na předválečné studium.

Předběžné přednášky a přijímací zkoušky nebyly. Ke vstupu na vysokou školu opravňovalo maturitní vysvědčení, které mělo tenkrát větší vážnost než nyní.

V září 1945 jsem se při zápisu na přírodovědecké fakultě v Brně setkal pouze s pedelem – podle slovníku cizích slov „školníkem na vysokých školách". Vydával indexy a později formuláře vysvědčení. Zapsat jsem si ze seznamu přednášek mohl, co jsem chtěl. Byly ovšem předměty, které jsem pro učitelství na gymnasiích zapsat musil – čeština, československý dějepis a zeměpis, obecná pedagogika, filosofie – ale přednášející jsem poprvé viděl až při zkoušce, to je všechno dnes běžné, že ano. [Na první přednášce profesora Bláhy o filosofii jsem byl, protože jsem četl některé jeho sociologické studie a věděl jsem, že byl Masarykovým žákem. Obsah jeho přednášky mi unikal, ale protože krásně intonoval, tak jsem zavřel oči a poslouchal „hudbu jeho řeči". Bláhova jediná přednáška byla vůbec všechno, co jsem do druhé státní zkoušky z filosofie vyslechl. Ale to neznamená, že jsem nic nečetl.] Využíval jsem možnosti zapsané přednášky škrtat a zapisovat jiné. Ještě v nižších semestrech jsem poslouchal některé přednášky určené až pro vyšší semestry. V Praze jsem jeden semestr na přednášky nechodil.

Kdo studoval matematiku pro učitelství na gymnasiích (třeba v kombinaci s fyzikou nebo chemií), musil mít zkoušku za 2 semestry deskriptivní geometrie. Proto se nás v Brně při cvičeních jak z matematiky, tak z deskriptivní geometrie tísnilo v posluchárně hodně, hodně přes sto. Samozřejmě s jediným učitelem, který sám počítal nebo rýsoval příklady. A kdo si troufne tvrdit a přesvědčivě doložit, že to byla horší příprava než v nynějších skupinách po 15 – 20 studentech?

K přestupu z university v Brně na universitu v Praze jsem potřeboval jedině index a potvrzení rektora brněnské university, že jsem se v akademickém smyslu řádně choval.

Ke státním zkouškám – k první v Brně a k druhé v Praze – jsem si examinátory mohl volit. Ale z jiné strany: Jak v Brně, tak v Praze zkoušeli při nich tehdy výlučně profesoři.

Oč „lépe" je o studenty postaráno dnes: Vše je pro ně předem pečlivě promyšleno, pečlivě naplánováno, pečlivě určeno, hlavně však kdejaká semestrální zkouška mnohokrát pečlivě zaznamenána. Ale rozhodování sama za sebe se nějak vytrácí. Častěji jsem svým studentům řekl: Jsem rád, že jsem vystudoval, než byly vysoké školy zachváceny „reformami".

* * *

V prosinci 1949 jsem si vyžádal téma k disertační práci pro doktorát. Mohl jsem se obrátit na kteréhokoliv z profesorů, ale jen z profesorů. Bývalo by podivné, kdybych si nebyl vybral svého tehdejšího šéfa Eduarda Čecha (1893–1960), ředitele Badatelského ústavu matematického (při tehdejší České akademii věd a umění), v němž jsem byl stipendistou. V červnu 1993 vzpomínala česká matematická obec sté výročí Čechova narození. Při této vzpomínkové oslavě jsem mluvil o jedné části Čechovy vědecké práce a končil jsem krátkou osobní vzpomínkou, kterou nyní zopakuji a rozšířím.

Asi měsíc jsem se s Čechovým námětem potýkal. Vskutku mě nenapadlo, jít za E. Čechem na konsultaci; kdo ví, jak by byl reagoval. Až jednou v lednu jsem se večer vracel z Universitní knihovny a v tramvaji v oblouku Chotkovy silnice, z něhož je vidět na Prahu, mě něco napadlo. Bydlel jsem ve Vokovicích v podkrovní světničce a o množství uhlí, které jsem tehdy měl, bych s mírnou nadsázkou mohl říci, že bylo menší než „libovolně malé positivní ε“. Tak v zimníku a v rukavicích jsem sedl ke stolu a dal se do práce. Nad ránem jsem věděl, že mám vyhráno, i když mě to bude stát ještě hodně úsilí.

K hlavnímu i vedlejšímu rigorosu jsem si opět mohl vybrat examinátory, k hlavnímu tři (ovšem mezi nimi autora námětu disertace) a k vedlejšímu dva. Pro ně jsem požádal o vyzkoušení profesora Bohumila Bydžovského (1880–1969). Několik málo dní před zkouškou v prosinci 1950 jsem dostal z děkanátu oznámení o jeho výměně – ač byl dvakrát rektorem university. Byl to zřetelný závan nových poměrů i na vysokých školách.

Protože si pamatuji, jak vypadaly doktoráty kdysi, nemlčel jsem ke způsobu, kterým začala organizace doktorandského studia před několika lety na geodetickém oboru. Iuvenalisův verš je pro tento způsob jen slabým povzdechnutím.

* * *

V roce 1954 jsem začal pracovat na tehdejší zeměměřické fakultě. Odhlédnuli od kateder matematiky a fyziky, setkal jsem se tehdy na ní se šesti profesory. Ani jeden už není mezi námi. Byli to:

Josef Böhm	*1907	Josef Klobouček	*1909
Emil Buchar	*1901	Pavel Potužák	*1895
František Fiala	*1883	Josef Ryšavý	*1884

Uvedu ještě jedno jméno. Chci vzpomenout všech kolegů, kteří musili ze zeměměřického směru odejít. Za ně za všechny připomenu jediného:

doc. Ing. Dr. Jan Kašpar, CSc. (1912–1985)

Dobře jsem se s ním poznal, a tak vím, jak vřelý poměr měl ke škole a ke studentům a jak vážně chápal vědeckou práci. Jeho vynucený odchod ukazoval nízkost zájmů, které tehdy zachvátily naše vysoké školy.

Ale zpátky k uvedené šestici. Profesor Fiala se v roce 1954 stal emeritus. Akademik Ryšavý ještě v polovině 50. let přednášel, a tak se na něho víc pamatuji. Ze zbývajících čtyř byli dva mladší než 60 a dva mladší než 50 let. Profesoru Kloboučkovi jako nejmladšímu bylo 45 roků.

Tuto situaci na zeměměřické fakultě v roce 1954 srovnám s nynějším stavem na katedře matematiky a na geodetickém oboru. Obě pracoviště jsou – co do počtu učitelů – přibližně stejně velká.

Na geodetickém oboru jsou nyní jen dva profesoři, oba starší než 65 let. Na katedře matematiky jsou rovněž jen dva profesoři, oba starší než 70 let.

Ani za této situace na katedře matematiky mě nikdo úředně nevyzval, abych vysvětlil svůj díl odpovědnosti. Takovou výzvu bych přivítal. Měl bych příležitost ukázat, že na personální věci katedry jsem upozorňoval už v roce 1968. Od svých kolegů-matematiků na technických universitách nejblíže sousedních zemí – z Rakouska a Německa – vím, jak jsou obsazovány profesury na jejich pracovištích. O tom se v mém okolí nechce vědět, natož si z toho vzít vzor.

Z uvedené šestice nejvíce vzpomínám na profesora Emila Buchara. Byl první, kdo v druhé polovině 50. let z údajů o sovětských umělých družicích Země vypočítal její zploštění. Nedávno vydali profesor Milan Burša a docent Jan Kostelecký knihu *Kosmická geodézie a kosmická geodynamika*, Praha 1994. Věnovali ji Bucharově památce.

Jednou mi profesor Buchar vykládal, jak se ze Zeměměřického úřadu dostal k působení na fakultě. Brzy po znovuotevření českých vysokých škol v roce 1945 ho navštívili profesoři Fiala a Ryšavý a navrhli mu, aby přešel na fakultu. Co tento Fialův a Ryšavého podnět znamenal, musí vědět každý, kdo s geodetickým oborem přišel nějak do styku. Profesor Buchar založil v polovině 60. let geodeticko-astronomickou specializaci, která – za nepříliš mnoho let své existence – znamenala naprosto zřetelný vrchol geodetického studia v Praze za posledních mně známých 40 let. Rád vzpomínám, jak jednoduchá byla dohoda s profesorem Bucharem o obsahu mých přednášek z matematiky v jeho specializaci. Pro ni důležité kulové funkce jsem znal ze zcela jiné strany, totiž jako významný aparát při studiu konvexních ploch. Jen pro ilustraci: Kulové funkce umožňují krátký důkaz Christoffelova teorému z roku 1865 o určenosti plochy součtem poloměrů jejích hlavních křivostí jakožto funkcí normály; na geodetickou interpretaci tohoto teorému upozornil v nedávné době jeden z předních geodetů profesor E. Grafarend.

Vrátím se ještě k podnětu profesorů Fialy a Ryšavého, který přivedl na fakultu profesora Buchara. Nevím a třeba nemohu vědět, zda někdy později dva profesoři z geodetického oboru učinili něco podobného. Ale s jistotou vím, že na katedře matematiky se jediní dva profesoři nikdy nesešli, aby se poradili a následovali Fialova a Ryšavého příkladu.

Nemohu na tomto místě nevzpomenout svého dávného šéfa profesora Františka Vyčichla. Zemřel v roce 1959 a ještě dobrých 30 let po jeho smrti žila katedra matematiky stavební fakulty z toho, jak ji zajistil.

* * *

Vážené paní, pánové, budu končit.

Všem, kdo mi jakkoliv v mých snahách pomohli, velmi děkuji.

Svým emeritovaným kolegům přeji, aby co nejlépe užívali zasloužené pohody. Ostatním přítomným – a těch je zde většina – přeji co nejvíce úspěchů v práci.

Opakuji své poděkování za účast.