Ján Čižmár

Cayleyho-Kleinove metriky

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. III. (Slovak). Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. pp. 32–44.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401593

CAYLEYHO–KLEINOVE METRIKY

JÁN ČIŽMÁR

Úvod

Rozvoj počítačovej geometrie a počítačovej grafiky v posledných dvoch desaťročiach 20. storočia priniesol so sebou renesanciu záujmu o klasickú projektívnu geometriu približne v tej podobe, v akej sa zavŕšila okolo dvadsiatych rokov 20. storočia. Od prvých, rýdzo utilitárnych a pragmatických použití v týchto nových disciplínach, kde sprvu neboli prvoradé exaktné základy takej pomocnej disciplíny, akou bola projektívna geometria, sa zakrátko prišlo k pochopeniu, že seriózne budovanie nových odborov ako častí aplikovanej matematiky vyžaduje ich postavenie na solídny teoretický základ, ktorým sú najmä fundamentálne geometrické disciplíny, akými sú projektívna geometria, diferenciálna geometria, algebrická geometria a deskriptívna geometria, nehovoriac o takých samozrejmých predpokladoch, akými sú syntetická geometria euklidovského priestoru a analytická metóda v tejto oblasti. Autori, ktorí sa podujali splniť túto úlohu – vybudovať v nevyhnutnom rozsahu pevné základy hlavných geometrických disciplín so zreteľom na potreby a možnosti ich uplatnenia v počítačovej geometrii – mali k dispozíciu teóriu týchto základných, vo vzťahu k hlavnému predmetu pomocných oblastí na úrovni podstatne vyššej, než bola v aplikáciách použiteľná a želateľná. Aby sa prípravný predmet nepresýtil teóriou, bola potrebná selekcia a redukcia jeho obsahu a metód z hľadiska aplikačných cieľov, a to aj za cenu narušenia jeho strohej vedecko-logickej štruktúry a zvýraznenie tých jeho pojmov a tém, ktoré majú pre aplikácie fundamentálny význam. Jedným z takýchto kategoriálnych pojmov je pojem *metriky* priestoru, ktorý bude v tejto práci zúžený na metriku projektívnej roviny.

Metrizácia projektívnej roviny, t. j. zavedenie metriky do nej, je základným predpokladom použitia projektívnej roviny v počítačovej geometrii. Obvyklým prostredím spĺňajúcim túto podmienku býva rozšírená reálna euklidovská rovina s obvyklou euklidovskou metrikou vo vlastnej časti tejto roviny. (Pre body nevlastnej priamky metrický pojem vzdialenosti stráca zmysel.) Celý prínos tohto modelu projektívnej roviny spočíva v možnosti využívať výhody homogénnych súradníc, vyhýbať sa zložitejším formuláciám v relácii rovnobežnosti a pod.

Dualita projektívnej roviny zrovnoprávňuje množinu všetkých bodov roviny s množinou všetkých priamok roviny a zjednocuje aritmeticko-algebrickú metódu analytického vyjadrovania týchto objektov. Dvojpomer ako základný číselný invariant projektívnej roviny, charakterizujúci tak štvoricu kolineárnych bodov, ako aj štvoricu priamok toho istého zväzku priamok, je potom veľmi účinným nástrojom definovania a opisu niektorých vlastností, ktoré sa blížia k metrike alebo ju priamo zakladajú. Na základe duality je definícia *vzdialenosti dvoch bodov* (metrika roviny) formulovaná pomocou dvojpomeru ekvivalentná s definíciou *odchýlky (veľkosti uhla) dvoch priamok*, v ktorej je ako prostriedok použitý dvojpomer. Pravda, takto zjednodušene možno situáciu charakterizovať len za určitých upresňujúcich podmienok, ktorými sa obmedzuje trieda projektívnych rovín, v ktorých možno pojem vzdialenosti, resp. pojem odchýlky zaviesť. Problém *miery uhla* je vo všeobecnosti komplikovanejší než problém vzdialenosti, čo je bezprostredne zjavné napr. aj z prevažujúceho spôsobu zavádzania metriky v súčasných vysokoškolských učebniciach geometrie pomocou skalárneho súčinu vektorov: zavedenie operácie skalárneho násobenia vektorov za účelom možnosti definovať vzdialenosť dvoch bodov je zároveň dostačujúcou podmienkou možnosti definovať odchýlku dvoch osnov priamok v afinnom priestore definovanom s použitím vektorového priestoru. Obvykle zostáva z pohľadu didaktického systému nevyjasnená otázka možnosti zavedenia *miery uhla* nezávisle *od* pojmu *vzdialenosti* a v časovej súslednosti *pred* ním. Tento problém len potvrdzuje všeobecne známu skutočnosť, že v trvalo aktuálnom probléme *miery v geometrii* je problém zavedenia uhla a jeho miery jeden z najzložitejších a jeho koncepčné spracovanie patrí k najťažším a najnevďačnejším témam v školskej elementárnej syntetickej geometrii.

Prvý pokus o projektívnu charakterizáciu miery uhla uverejnil Edmond LAGUERRE (1834–1886) v článku *Sur la théorie des foyers* (O teórii ohnísk, 1853). V dnešnom jazyku projektívnej geometrie sa jeho definícia vzťahuje na komplexifikáciu $\overline{A}_o^2(C)$ rozšírenej reálnej ortogonálnej roviny $\overline{A}_o^2(R)$. Prirodzene, Laguerre v tom čase pracoval s rozšírenou reálnou euklidovskou rovinou $\overline{E}^2(R)$, ktorú podľa potreby nesystematicky doplňoval *imaginárnymi elementmi* bez náležitého objasnenia ich existencie a ich začlenenia do sústavy existujúcich objektov s ich reláciami.

Odchýlka (veľkosť uhla) dvoch rôznobežných priamok x, y s vlastným priesečníkom A (obr. 1) sa definuje pomocou *izotropických priamok* i, j incidujúcich s bodom A, čo sú samodružné (invariantné) priamky *pravouhlej involúcie* priamok vo zväzku priamok so stredom A. (V pravouhlej involúcii tvoria dvojicu vzor – obraz priamka a kolmica na ňu incidujúce s bodom A; zo symetrickosti relácie kolmosti vyplýva, že postavenie priamky vo dvojici vzor – obraz je zámenné – involutórne. Samodružné priamky pravouhlej involúcie sú, prirodzene, *imaginárne*, lebo neexistuje reálna priamka rozšírenej euklidovskej roviny, ktorá by bola na seba kolmá.) Odchýlka priamok ($\varphi(x,y)$ priamok x, y (číslo!) je definovaná vzorcom

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2i}\ln(i,j;x,y)$$

kde $(i,j;x,y)$ je dvojpomer štvorice priamok i,j,x,y v uvedenom poradí. Táto formula sa desaťročia traktovala v klasickej (syntetickej) projektívnej geometrii ako tzv. *projektívna definícia odchýlky dvoch priamok.*

Voči tomuto názvu a chápaniu existuje niekoľko vážnych námietok:

- Nejde o konštrukciu vo všeobecnej reálnej projektívnej rovine, ale o konštrukciu v rovine s pevnou vyznačenou priamkou, ktorá je invariantná vzhľadom na príslušnú grupu projektívnych kolineácií: je to rozšírená afinná rovina s podgrupou „afinných“ transformácií vzhľadom na „nevlastnú“ priamku rozšírenej afinnej roviny(

- navyše sa pôvodná reálna rovina rozšírila na komplexnú.

- Odchýlka je invariantná len vzhľadom na tie transformácie afinnej podgrupy, v ktorých sú invariantné *kružnicové body* I, J roviny $\overline{A}_o^2(C)$; to je *podobnostná grupa* roviny $\overline{A}_o^2(C)$, v ktorej je oproti afinnej rovine navyše definovaná kolmosť priamok. To je teda rozšírená afinná rovina s *ortogonalitou*, nazývaná *podobnostnou* alebo *ekviformnou* rovinou, pretože jej charakteristická grupa zachováva podobnosť.

  Stav projektívnej geometrie v čase publikácie Laguerrovho článku bol príliš nerozvinutý na to, aby sa v jeho špeciálnom prípade invariancie dvoch imaginárnych bodov odhalil všeobecnejší fakt, že táto dvojica bodov reprezentuje priamkovú *singulárnu* kužeľosečku.

1. Podobnostné roviny a podobnostné grupy

1.1 Základné pojmy

Koncepcia teórie podobnostných rovín a grúp podobnostných transformácií vychádza z Laguerrovho príkladu a je jeho zovšeobecnením. Východiskovú situáciu pre definíciu týchto objektov charakterizuje splnenie nasledovných predpokladov:

- Je daná komplexifikácia $P^2(C)$ reálnej projektívnej roviny $P^2(R)$ s operačnou grupou $GP(2;R)$ *modelom* $\overline{A}^2(C)$ s nevlastnou priamkou ω a operačnou grupou $GA_\omega(2;R)$.
- Sústava súradníc v $\overline{A}^2(C)$ je vybraná tak, že nevlastnou priamkou ω je súradnicová os o_0 s rovnicou $x_0 = 0$.
- Podmnožina všetkých afinných transformácií grupy $GA_\omega(2;R)$, vzhľadom na ktorú sú invariantné dva pevné body priamky ω, je podgrupou grupy $GA_\omega(2;R)$.

Definícia 1. Podgrupa $GS_\omega(2;R)$ afinnej grupy $GA_\omega(2;R)$, vzhľadom na ktorú sú invariantné dva pevné body nevlastnej priamky ω, sa nazýva *podobnostnou grupou* roviny $\overline{A}^2(C)$.

Prvky podobnostnej grupy sa nazývajú *podobnostné transformácie (podobnosti)* roviny $\overline{A}^2(C)$, pevné body $(u),(v)$ priamky ω sa nazývajú *základné body* podobnostnej roviny. (Grupa $GS(2;R)$ by sa exaktne mala označovať $GS_{u,v}(2;R)$. Pri *pevne* vybranej jedinej dvojici (u), (v) príslušnosť grupy k dvojici netreba osobitne vyznačovať.)

Rovina $(\overline{A}^2_\omega(C), GS_{u,v}(2;R))$ sa nazýva podobnostná rovina.

Ak $\{(u),(v)\}$ je dvojica rôznych *reálnych* bodov, rovina sa nazýva *hyperbolickou podobnostnou rovinou, h-podobnostnou rovinou* alebo jednoducho *h-rovinou.*

Ak $\{(u),(v)\}$ je dvojica združených *komplexných* bodov, rovina sa nazýva *eliptickou podobnostnou rovinou, e-podobnostnou rovinou* alebo jednoducho *e-rovinou.*

Každá vlastná priamka incidujúca so základným bodom sa nazýva *minimálna.*

Nech a, resp. b sú rôzne vlastné priamky, ktoré nie sú minimálne, t. j. ani jedna z nich neinciduje so žiadnym z dvojice základných bodov $(u),(v)$. Nech nevlastný bod priamky a, resp. b je (a), resp. (b). Priamky a,b sa nazývajú *korelované*, resp. *nekorelované*, keď dvojpomer $(uvab)$ štvorice bodov $(u),(v),(a),(b)$ je kladný, resp. záporný. V e-rovine sú korelované každé dve reálne priamky.

1.2 Vzdialenosť

Nech $M(m_0, m_1, m_2)$, $N(n_0, n_1, n_2)$ sú dva rôzne reálne vlastné body incidujúce s priamkou a. Priamka a má rovnicu

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Nevlastný bod priamky a má súradnice

$$(a) = \left(0, \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ n_0 & n_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_0 & m_2 \\ n_0 & n_2 \end{vmatrix}\right) .$$

Analogicky, ak priamka $b = PQ$ je určená bodmi $P = (p_0, p_1, p_2)$, $Q = (q_0, q_1, q_2)$, nevlastný bod (b) priamky b má súradnice

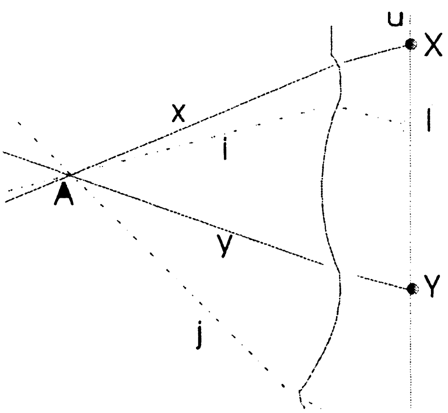
$$(b) = \left(0, \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & n_q \end{vmatrix}\right) .$$

Označme

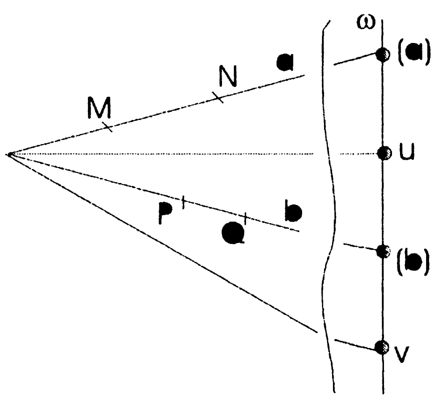
$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} =: [x, y, z] .$$

Potom dvojpomer $(uv(a)(b))$ možno napísať v tvare

$$(uv(a)(b)) = \frac{[umn][vpq]}{[vmn][upq]} \quad \text{(viz obr. 2).}$$



Obr. 1



Obr. 2

Nech $MN \subset a$ je úsečka s vlastnými reálnymi krajnými bodmi na reálnej priamke a, ktorá nie je minimálna. Analogicky, nech $PQ \subset b$ je úsečka s vlastnými reálnymi krajnými bodmi na reálnej priamke b, ktorá nie je minimálna.

A. Modul

Definícia 2. *Modulom usporiadanej dvojice úsečiek* (MN, PQ) alebo *modulom úsečky* MN *vzhľadom na úsečku* PQ sa nazýva výraz

$$m^2(MN/PQ) = \frac{[umn][vmn][uvp]^2[uvq]^2}{[upq][vpq][uvm]^2[uvn]^2} =$$

$$= (uv(a)(b)) \left(\frac{[vmn][uvp][uvq]}{[vpq][uvm][uvn]}\right)^2$$

Vlastnosti modulu:

1. Je invariantný vzhľadom na grupu podobnostných transformácií.
2. V e-rovine je vždy kladný, v h-rovine je kladný, resp. záporný, pre korelované, resp nekorelované priamky a, b.
3. Zachováva si hodnotu nahradením bodov M, N, P, Q bodmi M, N, P, Q, pre ktoré platí $m^2(MN/MN) = 1$, $m^2(PQ/PQ) = 1$
4. $m^2(MN/PQ) \cdot m^2(PQ/MN) = 1$

B. Význačná kužeľosečka

Nech sú v rovine $\overline{A}^2(C)$ dané tieto základné objekty:
- vlastná reálna priamka a, ktorá nie je minimálna
  - na nej dva rôzne vlastné reálne body M, N
- vlastná reálna priamka b, ktorá nie je minimálna a je rôzna od priamky a
  - dva rôzne vlastné reálne body P, Q, z ktorých žiaden neinciduje s priamkou a

Veta 1. Množina všetkých bodov X roviny $\overline{A}^2(C)$, pre ktoré platí

$$m^2(MX/PQ) = m^2(MN/PQ)\ ,$$

je regulárna kužeľosečka.

Táto kužeľosečka sa označuje $\mathbf{K}(M, N)$, skrátene $\mathbf{K}$, a nazýva sa *význačnou kužeľosečkou.*

Vlastnosti význačnej kužeľosečky $\mathbf{K}$:

1. Bod M je stredom kužeľosečky $\mathbf{K}$. Kužeľosečka $\mathbf{K}$ obsahuje body N, u, v. To znamená, že priamky Mu a Mv sú asymptoty kužeľosečky $\mathbf{K}$.

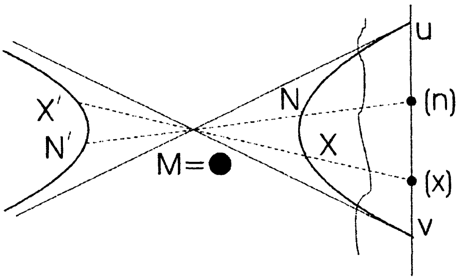
2. Kužeľosečka $\mathbf{K}$ je invariantná vzhľadom na zámenu bodu P bodom P a bodu Q bodom Q, pre ktoré platí

$$m^2(PQ/PQ) = 1\ .$$

3. Všetky priemerové priamky, na ktorých priemery majú reálne krajné body, sú okrem asymptot korelované s priamkou $a = MN$ (obr. 3).

4. Vlastnosti 1 – 3 sú invariantné vzhľadom na grupu podobnostných transformácií.

Jednotkovou úsečkou sa nazýva ľubovoľná pevná orientovaná úsečka aj každá orientovaná úsečka $\overrightarrow{OJ}$, pre ktorú platí
$m^2(OJ/OJ) = 1$, ak priamky OJ, OJ sú korelované a
$m^2(OJ/OJ) = -1$, ak priamky OJ, OJ nie sú korelované.



Obr. 3

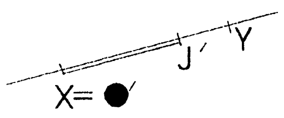
Podobnostná dĺžka úsečky: Nech X, Y sú také dva vlastné body, pre ktoré priamka XY nie je minimálna. *Podobnostnou dĺžkou úsečky* XY meranou *jednotkou* $\overrightarrow{OJ}$ sa nazýva číslo

$$D(XY/OJ) := \sqrt{|m^2(XY/OJ)|}\ .$$

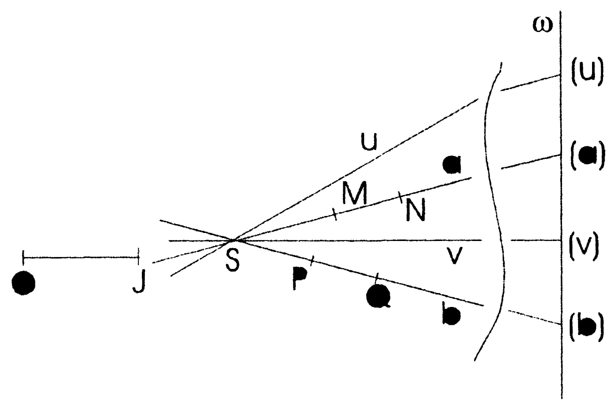
Orientovaná vzdialenosť dvoch bodov: Nech $\overrightarrow{OJ}$ je jednotková úsečka a $\overrightarrow{O'J'}$ jednotková úsečka na priamke XY, kde $O = X$ (obr. 4). *Orientovanou podobnostnou vzdialenosťou bodu Y od bodu X meranou jednotkou* $\overrightarrow{OJ}$ sa nazýva číslo

$$V(XY/OJ) := (\varepsilon \cdot D(XY/OJ)\ ,$$

kde $\varepsilon = 1$, ak body Y, J ležia na tej istej polpriamke so začiatkom O, a $\varepsilon = -1$, ak body Y, J ležia na opačných polpriamkach so začiatkom O.



Obr. 4



Obr. 5

1.3 Odchýlka dvoch priamok (veľkosť orientovaného uhla dvoch priamok)

Nech M, N sú rôzne vlastné body incidujúce s priamkou a, ktorá má nevlastný bod (a). Analogicky, nech P, Q sú rôzne vlastné body incidujúce s priamkou b, ktorá má nevlastný bod (b) (obr. 5). *Odchýlka* $\varphi(a,b)$ *priamok* a, b je definovaná nasledovne:

V h-rovine: $\varphi(a,b) =: |\sphericalangle(a,b)| = \frac{1}{2}\log((u)(v)(a)(b))$,

v e-rovine: $\varphi(a,b) =: |\sphericalangle(a,b)| = \frac{1}{2i}\log((u)(v)(a)(b))$,

kde log označuje hlavnú hodnotu prirodzeného logaritmu.

Pomocou súradníc bodov M, N, P, Q má odchýlka priamok a, b vyjadrenie

$$\varphi(a,b) =: |\sphericalangle(a,b)| = \frac{1}{2t}\log\frac{[umn][vpq]}{[vmn][upq]},$$

kde $t = 1$ pre h-rovinu a $t = i$ pre e-rovinu.

1.4 Rovnice podobnostnej transformácie

Tvar rovníc ľubovoľnej transformácie z grupy $GS(2; R)$ možno dostať ako špecializáciu rovníc transformácie z afinnej grupy $GA_\omega(2; R)$, ktorá je operačnou grupou v (nie na) rozšírenej afinnej rovine $\overline{A}^2(C)$.

Ak $X(x_0, x_1, x_2)$ je vzor a $X(x_0', x_1', x_2')$ jeho obraz v afinnej transformácii z grupy $GA_\omega(2; R)$, platí

$$\begin{aligned} x_0' &= c_{00}x_0 \\ x_1' &= c_{10}x_0 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ x_2' &= c_{20}x_0 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \\ c_{00} &\neq 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ c_{ij} \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{1}$$

Ak sa za základné body zvolia $(u) = (0, 1, t)$, $(v) = (0, 1, -t)$, kde

$$\begin{aligned} t &= 1 && \text{pre } h\text{-rovinu} \\ t &= -1 && \text{pre } e\text{-rovinu}, \end{aligned}$$

podmienka invariantnosti bodov (u), (v) v transformácii (1) dáva rovnice (pre neznáme ρ, σ)

$$\begin{aligned} &\rho = c_{11} + c_{12}t && \sigma = c_{11} - c_{12}t \\ &\rho t = c_{21} + c_{22}t, \rho \neq 0, \text{ pre bod } (u), && -\sigma t = c_{21} - c_{22}t, \sigma \neq 0, \text{ pre bod } (v) \end{aligned}$$

Porovnaním vyjadrenia pre $t (\neq 0)$ z oboch sústav sa dostávajú rovnosti

$$\rho + \sigma = 2c_{11}, \ \rho + \sigma = 2c_{12}, \text{ odkiaľ } c_{11} = c_{22}.$$

Použitím tejto rovnosti na

$$t = \frac{\rho - c_{11}}{c_{12}}, \quad t = \frac{c_{12}}{\rho - c_{22}},$$

sa dostane $c_{21} = t^2 \cdot c_{12}$, ekvivalentne $c_{12} = t^2 \cdot c_{21}$, takže rovnice podobnostnej transformácie majú tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= c_{00}x_0 \\ x_1' &= c_{10}x_0 + c_{11}x_1 + t^2 \cdot c_{21}x_2 \\ x_2' &= c_{20}x_0 + c_{21}x_1 + c_{11}x_2 \ ; \end{aligned} \tag{2}$$

v nehomogénnych súradniciach (po odhomogenizovaní vzhľadom na x_0 a označení $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$\begin{aligned} x &= b_{11}x + t^2 b_{21}y + b_1 \\ y &= b_{21}x + b_{11}y + b_2, \end{aligned} \tag{2'}$$

kde $b_{11}^2 + t^2 b_{21}^2 \neq 0$.

Hodnota $\delta = \sqrt{|b_{11}^2 + t^2 b_{21}^2|}$ sa nazýva *deformácia* podobnostnej transformácie. (V elementárnej geometrii to je *koeficient podobnosti.*)

Podmienkou $\delta = 1$ možno grupu podobnostných transformácií špecializovať na *grupu zhodnostných transformácií*, zachovávajúcich vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2)$ (daných nehomogénnymi súradnicami), vyjadrenú spoločne pre metrickú (zhodnostnú) e-rovinu aj h-rovinu vzťahom

$$d(X_1, X_2) = \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - t^2(y_2 - y_1)^2|} \tag{3}$$

pričom $t = i$ pre e-rovinu a $t = 1$ pre h-rovinu.

Obe tieto metrické roviny sa dostanú ako *typy* v úplnej klasifikácii metrických rovín podľa Cayleyho-Kleinovho princípu.

2. Cayleyho-Kleinove metriky (Cayleyho-Kleinove roviny)

Novú koncepciu zavedenia metriky do projektívnej roviny prezentoval Arthur CAYLEY (1821–1895) v článku *A sixth memoir upon quantics* (Šiesty memoár o kvantikách, 1859). (Kvantikami nazýval Cayley dnešné formy v algebre.)

Základným objektom Cayleyho úvah je reálna projektívna rovina $P^2(R)$, podľa potreby a okolností rozšírená na svoju komplexifikáciu $P^2(C)$. *Reálna kužeľosečka* v tejto komplexifikácii je daná homogénnou kvadratickou rovnicou s reálnymi koeficientami:

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0, \ a_{ij} \in R, \ a_{ij} = a_{ji} \ ;$$

bodmi kužeľosečky sú všetky korene tejto rovnice v rovine $P^2(C)$. Táto kužeľosečka sa nazýva *absolútum* roviny. Je určujúcim objektom metriky roviny nasledovným spôsobom:
Vzdialenosť $\rho(X, X)$ *bodu* $X(x_0, x_1, x_2)$ *od bodu* $X'(x'_0, x'_1, x'_2)$ je daná formulou

$$\cos\rho = \frac{\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x'_j}{\sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j}\sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij} x'_i x'_j}}$$

Ak sa rovnica regulárnej kužeľosečky roviny $P^2(C)$ napíše v kanonickom tvare

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\ , \tag{4}$$

vzorec pre vzdialenosť nadobúda tvar

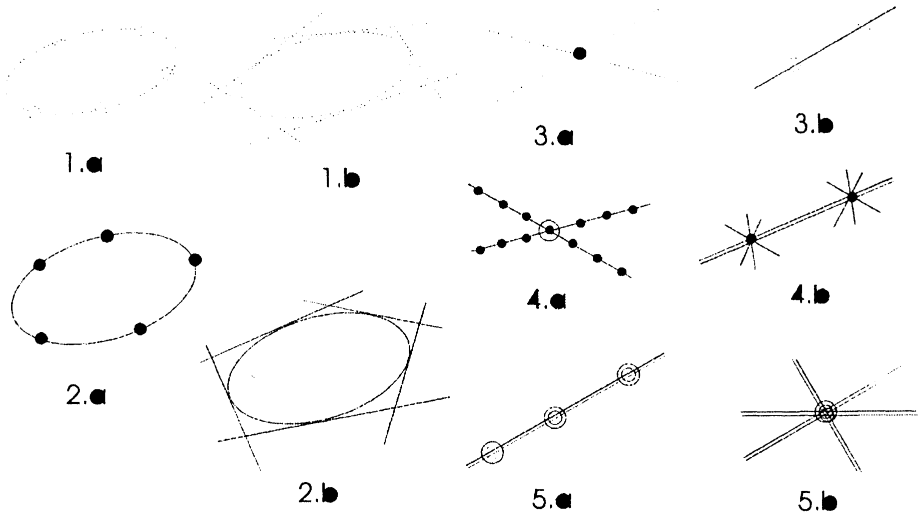
$$\cos\rho = \frac{x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2}{\sqrt{x_0{}^2 + x_1{}^2 + x_2{}^2}\sqrt{x'_0{}^2 + x'_1{}^2 + x'_2{}^2}}$$

Táto formula je formálne zhodná so vzorcom pre odchýlku polohových vektorov $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OX'}$ v E^3. Číselná hodnota vzdialenosti je potom daná ako hodnota funkcie arkus kosínus pre daný výraz.

Prienikom absolúta (4) s nevlastnou priamkou ω (rovnica $x_0 = 0$) sú *kružnicové (cyklické) body* $(0, 1, i)$, $(0, 1, -i)$.

Cayleyho ideu metriky rozvinul a teoreticky zovšeobecnil Felix KLEIN (1849–1925) v prácach *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (O tzv. neeuklidovskej geometrii 1871–1872) a *Erlanger Programm* (Erlangenský program, 1872). Podľa Kleina metriky zavedené do reálnej projektívnej roviny tvoria triedy príslušné ku všetkým *typom* kužeľosečiek v tejto rovine. Teda absolútom (základnou kužeľosečkou), invariantným vzhľadom na všetky transformácie príslušnej grupy zhodnostných transformácií, môže byť kužeľosečka ľubovoľného typu v reálnej projektívnej rovine. (V niektorých situáciách je metodicky výhodné chápať tieto kužeľosečky ako objekty komplexnej projektívnej roviny a podľa potreby priberať do úvah aj body, ktoré nie sú bodmi reálnej roviny, ale ich súradnice – ako komplexné čísla – formálne spĺňajú rovnice kužeľosečiek s reálnymi koeficientmi.)

Pre väčšiu prehľadnosť klasifikácie typov metrík reálnej projektívnej roviny je účelná krátka rekapitulácia klasifikácie typov kužeľosečiek v reálnej projektívnej rovine (tabuľka 1). (Kužeľosečky sa chápu ako objekty komplexnej projektívnej roviny.)



Tabuľka 1

Typ bodovej kužeľosečky Kanonický tvar rovnice		Typ dotyčnicovej kužeľosečky Kanonický tvar rovnice (v priamkových súradniciach)	
1.a	imaginárna regulárna bodová kužeľosečka $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	1.b	imaginárna regulárna dotyčnicová (priamková) kužeľosečka $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$
2.a	reálna regulárna bodová kužeľosečka $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	2.b	reálna regulárna dotyčnicová (priamková) kužeľosečka $\xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$
3.a	imaginárna singulárna bodová kužeľosečka (s jediným reálnym singulárnym bodom) $x_1^2 + x_2^2 = 0$	3.b	imaginárna singulárna dotyčnicová (priamková) kužeľosečka (s jedinou reálnou singulárnou priamkou) $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$
4.a	reálna singulárna bodová kužeľosečka (s jediným singulárnym dvojnásobným bodom) $x_1^2 - x_2^2 = 0$	4.b	reálna singulárna dotyčnicová (priamková) kužeľosečka (s jedinou singulárnou dvojnásobnou priamkou) $\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$
5.a	reálna singulárna bodová kužeľosečka priamka dvojnásobných bodov $x_1^2 = 0$	5.b	reálna singulárna dotyčnicová (priamková) kužeľosečka – stred zväzku dvojnásobných priamok $\xi_1^2 = 0$

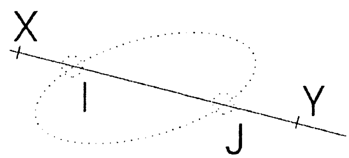
Cayleyho výsledok bol metodologickým východiskom Kleinových úvah. Klein si povšimol, že Cayleyho špeciálna projektívna metrická rovina je metrická e-rovina (a špeciálne je ňou aj rozšírená euklidovská rovina), ktorá má za invariant vzhľadom na grupu metrickýh (= zhodnostných) transformácií dvojicu združených imaginárnych bodov. Táto dvojica je „reálnou" *singulárnou kužeľosečkou* typu 3.b. Kleinov výskum dal aj pozitívnu odpoveď na výskumný problém, či možno metrickú geometriu roviny zaviesť ako geometriu invariantov vzhľadom na podgrupu projektívnej grupy, ktorej transformácie zachovávajú ľubovoľnú pevnú kužeľosečku.

Jednotlivé typy metrík roviny príslušné ku všetkým typom kužeľosečiek podľa vyššie uvedenej klasifikácie sa nazývajú *Cayleyho-Kleinove metriky* a roviny s týmito metrikami majú názov *Cayleyho-Kleinove roviny* (skrátene C-K-roviny). Špeciálne názvy týchto metrík, resp. rovín, podľa typu základnej kužeľosečky (absolúta) sú:

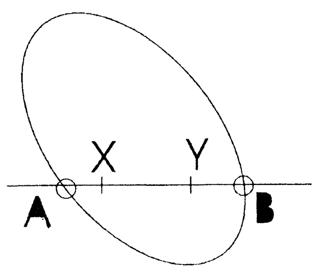
Typ absolúta	Názov roviny	Názov geometrie
1.a (1.b)	eliptická rovina	eliptická geometria
2.a (2.b)	hyperbolická rovina	hyperbolická geometria
3.a (3.b), 4.a (4.b), 5.a (5.b)	parabolické roviny	parabolické geometrie
4.b	Minkowskiho rovina	Minkowskiho geometria
3.b	euklidovská rovina	euklidovská geometria
5.b	semimetrická rovina	semimetrická geometria

V nasledujúcom prehľade sú uvedené konkrétne spôsoby zavedenia metriky do jednorlivých typov C-K-rovín.

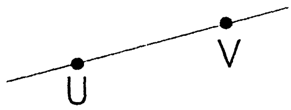
Eliptická rovina
$d(X,Y) = \frac{1}{2}ci \cdot \log(IJXY)$,
$c \neq 0$ – konštanta,
log – hlavná hodnota logaritmu.
Pre $c = -1$ sa dostáva známa obvyklá definícia.



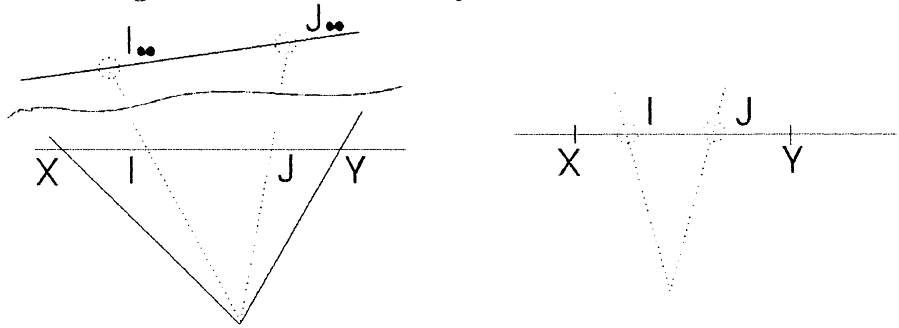
Hyperbolická rovina
$d(X,Y) = \frac{1}{2}c \cdot \log(IJXY)$,
$c \neq 0$ – konštanta.
Pre $c = 1$ sa dostáva obvyklá špecializácia;
$d(x,Y) \geq 0$ práve vtedy, keď X, Y sú vnútorné body základnej kužeľosečky.



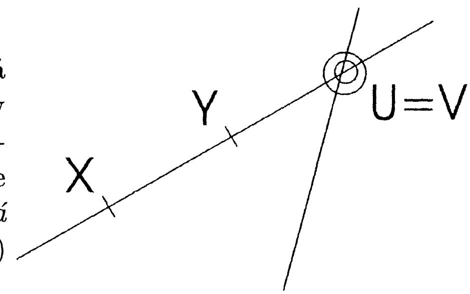
Minkowskiho rovina
Herman MINKOWSKI (1864–1909)
$U(0,1,1), V(0,1,-1)$;
$X(x_0,x_1,x_2), Y(y_0,y_1,y_2)$;
$d(X,Y)=\delta\sqrt{\left|\frac{[x_2y_0]-[x_1y_0]}{x_0{}^2y_0{}^2}\right|}$,
δ - konštanta,
$[x_2y_0]:=\begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}$, $[x_1y_0]:=\begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \end{vmatrix}$.



Euklidovská rovina
Po odhomogenizovaní sa zavedie obvyklá euklidovská metrika



Semimetrická rovina
Vzdialenosť $d(X,Y)$ je definovaná len pre dvojice *vlastných* bodov X,Y, pre ktoré priamka XY inciduje s bodom $U=V$. Na priamke XY je indukovaná *jednorozmerná* parabolická geometria (a metrika) (pozri [2]).



Literatura

[1] Hlavatý, V., *Projektivní geometrie II*, Melantrich, Praha 1945

[2] Hlavatý, V., *Úvod do neeuklidovské geometrie*, JČMF, Praha 1949

[3] Rozenfeľd, B. A., *Istorija nejevklidovoj geometrii*, Nauka, Moskva 1976

[4] Čižmár, J., *Grupy geometrických transformácií*, Alfa,. Bratislava 1984

Ján Čižmár
Katedra matematiky PdF UK Bratislava
e-mail: JAN.CIZMAR@fedu.uniba.sk, JAN.CIZMAR@fmph.uniba.sk