Štefan Schwabik
O konstrukci kyvadlových hodin

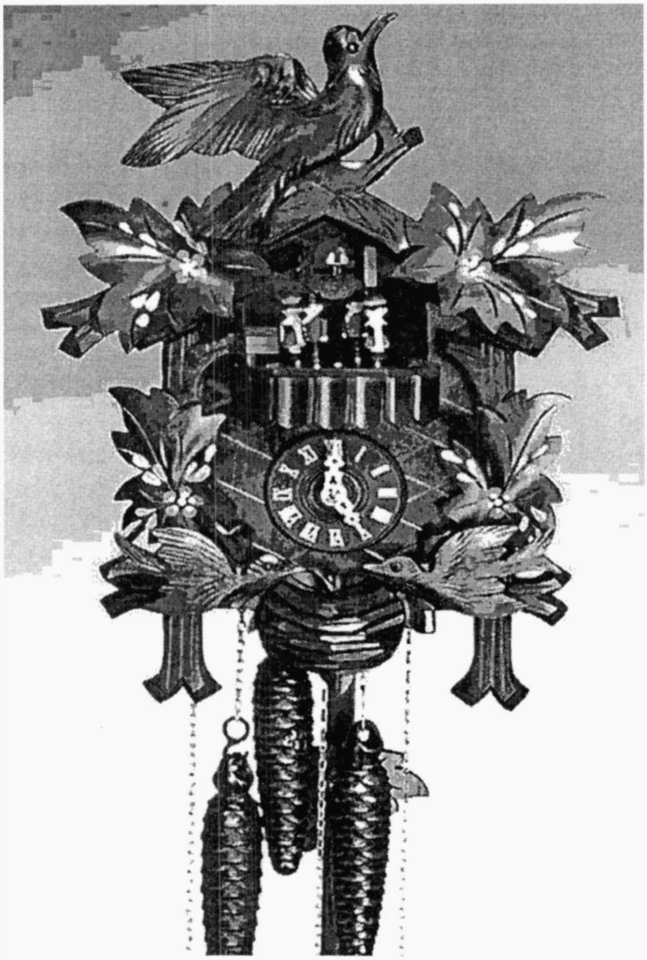
In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. pp. 283–295.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401582

O KONSTRUKCI KYVADLOVÝCH HODIN

Štefan Schwabik

S rozvojem mořeplavby a ovšem také v jiných souvislostech se v době renesance objevil životně důležitý problém určení zeměpisné polohy daného místa. Kam jsme dopluli? Kterým směrem se máme vracet domů? Podobné otázky byly jistě nejenom zajímavé.



Určování zeměpisné šířky nebylo velmi obtížné. V 16. století se to dařilo celkem spolehlivě např. tím, že se určila výška Slunce v pravé poledne lokálního času, tj. v poledne se změřil úhel Slunce nad horizontem. Zbytek pak byl v podstatě matematický výpočet, který vycházel z astronomických znalostí.

Horší to bylo s určením zeměpisné délky. Pro námořní mocnosti to byla kardinální otázka; za metodu určení zeměpisné délky s přijatelnou přesností (např. s přesností půl stupně) byla vypsána vysoká odměna.

Myšlenka, na které podobné měření bylo založeno údajně náleží Hipparchovi (2. století před n. l.). Je při ní užito té skutečnosti, že rozdíl zeměpisných délek ve dvou bodech na zeměkouli je úměrný rozdílu místních časů v těchto bodech. V bodech, kde se délka liší o $15°(=\frac{360°}{24})$, je rozdíl místních časů roven jedné hodině.

K tomu, aby se tohoto celkem jednoduchého principu dalo využít, bylo třeba určit místní čas (např. čas na lodi) kupříkladu tím, že se stanovil „okamžik" kdy na místě, ve kterém se plavidlo nalézá, nastane poledne. To je například moment, v němž je Slunce nad horizontem nejvýše (když je stín nejkratší). Současně však je třeba znát také čas, který v témže okamžiku je na nějakém známém místě (např. v přístavu, odkud loď odplula (Greenwich je dnes místem, odkud se poledníky počítají a čas tam platný je základem pro výpočty)). Místní čas se tedy s jistým úsilím zjistit může, jaký je ale čas v Greenwichi, nebo v místě odkud loď odplula? Problémem je „konzervovat" čas místa odplutí nebo nějakého známého referenčního bodu (např. čas, který je platný v Greenwichi). Tento problém dnes nemáme díky celkem dokonalým hodinám a jiným technickým prostředkům, pomocí kterých čas referenčního bodu bez problémů konzervujeme a nosíme v kapse či na ruce. V 16. století však neexistovaly hodiny, které by si dovedly „zapamatovat" na delší dobu nějaký čas relativně přesně.

Jinou možnost představuje použití astronomických jevů. u nichž je přesně známo, kdy (v lokálním čase) nastanou např. v domovském přístavu, a pak stanovit lokální čas na lodi, v okamžiku, kdy je tentýž jev na lodi pozorován. K obecné lítosti je však takových astronomických jevů málo. Galileo kupř. za takový vhodný jev považoval zatmění Měsíce, to se však vyskytne jen občas a není tedy prakticky příliš k užitku.

Konstrukce přesných a spolehlivých přístrojů k měření času (hodin) tedy představovala cestu k určování zeměpisné délky a také k mnoha jiným užitečným věcem. Mechanické hodiny byly dlouho velmi objemné a nespolehlivé. Bylo přitom využito několika způsobů, jak převést pohyb padajícího závaží na stejnoměrný pohyb ručiček. Nicméně i svou přesností proslulé astronomické hodiny, které používal Tycho Brahe, bylo údajně nutné denně popohánět pomocí kladiva. Nebyl znám žádný mechanický jev, který by se periodicky opakoval za stejný, poměrně krátký čas a byl by použitelný k odměřování toho, jak plyne čas. Takový jev experimentálně objevil Galileo zjištěním, že kmity kyvadla jsou izochronní, tj. že se jejich perioda nemění při postupném utlumování kmitů. Tento jev hodlal využít při konstrukci hodin a do práce na jejich sestrojení se pustil rok před svou smrtí v roce 1641. Měl představu o spojení kyvadla s nějakým čítačem jeho kmitů. I když sestrojení hodin po Galileovi převzal jeho syn Vincenzo, hodiny v této rodině sestrojeny nebyly.

Na konstrukci hodin se však orientoval Christiaan Huygens;[1] počátkem roku

[1]**Kdo byl Christiaan Huygens?** Narodil se 14. dubna 1629 v Haagu a zemřel tamtéž

Christiaan Huygens

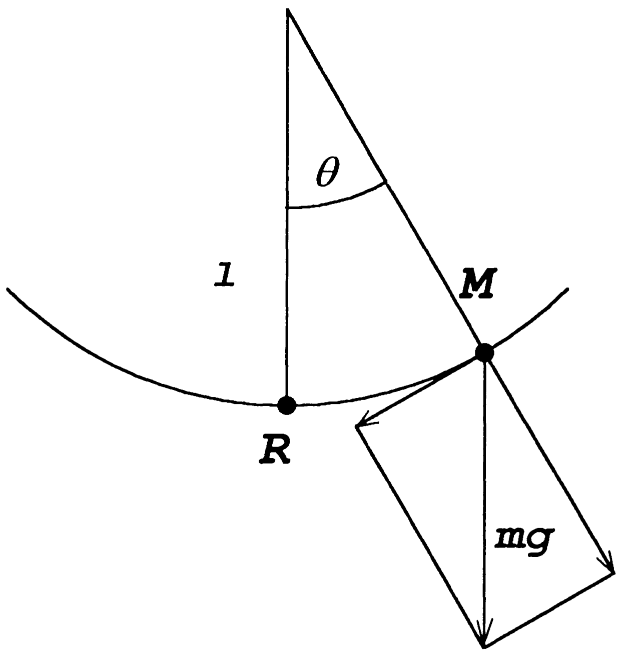
1657 oznámil, že *nalezl novou konstrukci hodin, které určují čas natolik přesně, že je nemalá naděje jejich užití pro určování zeměpisné délky i když se hodiny vyvezou na moře.* První exemplář hodin dle Huygense byl v zápětí vyhotoven v Haagu a v červnu vystavily holandské generální stavy patent, kterým bylo autorství hodin připsáno Ch. Huygensovi. Ten později sepsal spis *Horologium oscillatorium* (1673), v němž svoji konstrukci kyvadlových hodin zevrubně popsal.

Podívejme se trochu blíže (dnešními prostředky matematiky) na matematické kyvadlo, jehož délka (představujeme si nehmotnou tyč zavěšenou v nějakém pevném bodě) je l, na konci tyče je bod M, jehož hmotnost je m, g

---

8. července 1695. Jeho otcem byl značně bohatý vysoký státní úředník v Holandsku. Studoval právo a matematiku v Leidenu. V oblasti technologií navrhoval čočky, stavěl teleskopy (dalekohledy) a mikroskopy. Navrhl a podrobně rozpracoval kyvadlové hodiny s cílem přesně měřit zeměpisné délky. V mnohém vylepšil astronomické přístroje k upřesněnému měření (clony v teleskopech, měření astronomických úhlů apod.). Stýkal se s matematiky své doby (Mersenne, Gr. St. Vincent, Wallis, Sluse, Leibniz, Roemer, Pascal, Fermat, Oldenburg aj.). Byl členem Royal Society a francouzské královské Akademie.

je gravitační konstanta a θ je úhel odchylky kyvadla od svislé osy daný v radiánech. Od tření v bodě závěsu kyvadla a od odporu vzduchu odhlížíme — jelikož to je prakticky nemožné, je tato idealizace nazvána matematickým kyvadlem. Na bod M působí jenom gravitace, přesněji její složka ve směru tečny ke kružnici, po které se kyvadlo musí díky pevné tyči pohybovat, síla tedy je dána vztahem $-mg\sin\theta$ (srv. obrázek 1).



1. K matematickému kyvadlu

Protože délka oblouku s od klidové polohy R k bodu M, v němž se závaží kyvadla nalézá, je rovna $l\theta$, dostaneme z Newtonovy pohybové rovnice

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta,$$

neboli

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

a proto

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

což je obvyklá a dobře známá obyčejná diferenciální rovnice matematického kyvadla. Řešením této rovnice je funkce $\theta(t)$, která udává pohyb kyvadla v čase — jinak řečeno popisuje odklon kyvadla od svislé osy v závislosti na čase.

Označme $\omega = \frac{g}{l}$ a věnujme se chvíli rovnici kyvadla ve tvaru

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega \sin \theta.$$

Násobíme-li tuto rovnici $\frac{d\theta}{dt}$, dostaneme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

a když uvážíme, že je $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$, máme z uvedené rovnice novou rovnici

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -2\omega \sin \theta \frac{d\theta}{dt},$$

ze které integrací od t_0 do t obdržíme

$$\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\theta(t_0)}{dt}\right)^2 = -2\omega \int_{t_0}^{t} \sin \theta(s) \frac{d\theta(s)}{dt} ds.$$

Provedeme-li v integrálu na pravé straně této rovnosti substituci

$$\theta(s) = y \quad (\frac{d\theta(s)}{dt} ds = dy),$$

máme

$$(\frac{d\theta(t)}{dt})^2 - (\frac{d\theta(t_0)}{dt})^2 = -2\omega \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \sin y dy = 2\omega(\cos \theta(t) - \cos \theta(t_0)).$$

Buď nyní $t_0 = 0$, $\theta(0) = \alpha$ a $\frac{d\theta(t_0)}{dt} = 0$. Tím je popsána situace, že v čase rovném 0 (počátek experimentu) je kyvadlo vychýleno od svislé osy o úhel α a má v této poloze nulovou rychlost. Rovnice popisující pohyb kyvadla za těchto okolností má podobu

$$\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 = 2\omega(\cos \theta(t) - \cos \alpha),$$

a tedy

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \pm\sqrt{2\omega(\cos \theta(t) - \cos \alpha)}.$$

Představíme-li si, že je $\alpha > 0$ a kyvadlo pustíme, bude $\theta(t)$ z fyzikálních důvodů klesat a bude tedy mít zápornou derivaci. Z tohoto důvodu můžeme uvažovat rovnici

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\sqrt{2\omega(\cos \theta(t) - \cos \alpha)},$$

ze které separací proměnných dospějeme k

$$\int dt = \int \frac{d\theta}{-\sqrt{2\omega(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

nebo přesněji k

$$\int_0^t dt = t = -\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega(\cos\theta - \cos\alpha)}} = \int_{\theta(t)}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

Odtud pak získáme čas τ potřebný k tomu, aby se kyvadlo dostalo do polohy $\theta(\tau) = 0$ (to jest do nejnižší polohy) v podobě

$$\tau = \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

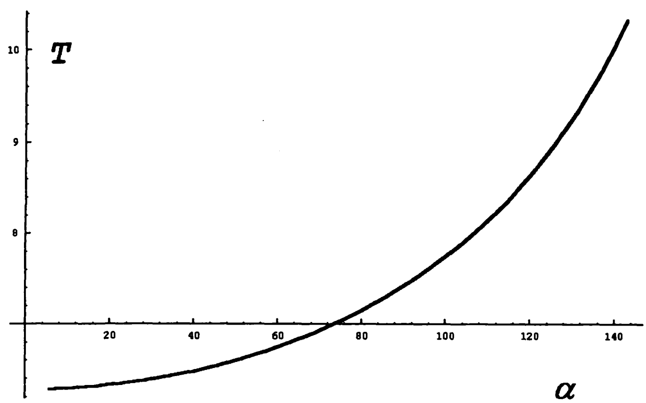
Hodnota τ představuje čtvrtinu času potřebného k tomu, aby se kyvadlo vrátilo zpět do polohy, ze které jsme jej v čase 0 vypustili (musí totiž překmitnout na druhou stranu k výchylce $-\alpha$ a přes nulovou výchylku se vrátit k původní výchylce α. Perioda kmitů kyvadla proto má hodnotu

$$T = 4\tau = 4\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega(\cos\theta - \cos\alpha)}} = \frac{4}{\sqrt{2\omega}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Když uvážíme, že $\omega = \dfrac{g}{l}$, dostaneme pro periodu vztah

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

který ukazuje, že perioda kmitů kyvadla závisí jak na jeho maximální výchylce α, tak i na jeho délce l.

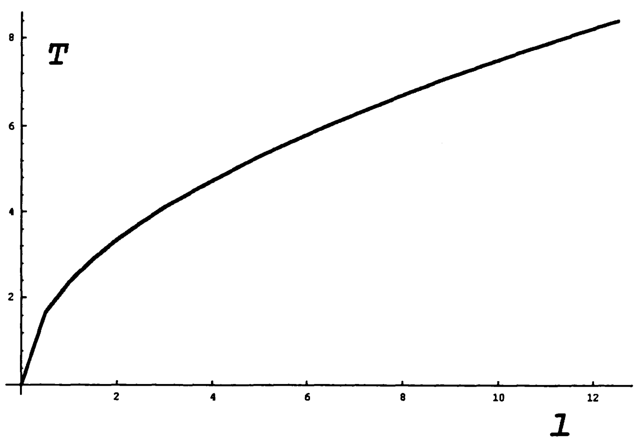


2. Závislost periody na úhlu

K tomu, abychom při pevné délce kyvadla l vypočítali periodu jeho kmitů při dané maximální výchylce α, je nutno vypočítat integrál $\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$; ten však vede k tzv. eliptickému integrálu prvního druhu, o kterém je známo, že jej nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Integrál je to vcelku hodný, tj. konverguje i když je jakási nepříjemnost v integrované funkci v bodě $\theta = \alpha$ a jeho hodnotu lze přibližně numericky určit. Výsledkem takových numerických výpočtů je následující funkce, která ukazuje velikost periody kyvadla (v sekundách) v závislosti na úhlu jeho maximální výchylky (v stupních) — viz obr. 2.

Z tohoto grafu lze vyčíst, že Galileova představa o tom, že kyvadlo je izochronní, nebyla správná. Galileova představa je přibližně správná pro malé maximální výchylky kyvadla. Druhý podstatně nepříjemnější závěr je, že kyvadlové hodiny nemohou být přesné, protože (zejména na kymácející se lodi) je obtížné zajistit stejnou maximální výchylku kyvadla. Navíc se přitom vychází z matematického popisu ideálního systému, který nehledí ani na tření v závěsu kyvadla (a to tam je přítomno vždy), ani na odpor vzduchu, který sice nepůsobí na ideální hmotný bod ale na objemově nezanedbatelné reálné kyvadlo nemůže nepůsobit (ledaže by vše probíhalo ve vakuu).

Obdobně lze znázornit (podle výše uvedeného vztahu pro periodu T) také závislost této periody na délce kyvadla l v případě, že maximální výchylka α je pevně daná. Tato závislost je dána násobkem funkce $\sqrt{l}$.



3. Závislost periody na délce kyvadla

Na samém počátku své práce na konstrukci přesných hodin se Huygens experimentálně přesvědčil o tom, že Galileova teze o izochronnosti kyvadla není správná. Když v první fázi Huygensova aktivita byla spíše konstrukční a experimentální, postupem času se při zdokonalování konstrukce dopracovával k exaktním matematickým a fyzikálním úvahám.

K výsledkům inženýrského druhu patří zejména Huygensova konstrukce kotvy s šikmým ozubením, která zajišťovala, že kyvadlu byla rytmicky dodávána energie formou rázů. Byla to energie potřebná k tomu, aby se nahradily její ztráty pocházející např. z tření kyvadla v jeho závěsu. K tomu se sluší znovu poznamenat, že matematický popis daný pro kyvadlo výše k těmto energetickým ztrátám nepřihlíží.

Ke všem podobným technickým problémům ještě přistoupila veskrze praktická potřeba transportu pendlovek, které v úplném klidu mohly v zásadě mít stejnou a stálou maximální amplitudu, na kymácející se lodi se však z fyzikálních důvodů mohla značně měnit. Pohled na výše uvedené dvě závislosti periody matematického kyvadla může napovědět myšlenku, kterou Huygens hodlal využít. Když se totiž perioda kyvadla zvětší vzhledem k nějakému vnějšímu důvodu zvětšení maximální výchylky, měla by se tato nepříjemnost kompenzovat tím, že se kyvadlo v této situaci automaticky zkrátí. Tato myšlenka vedla Huygense nejprve k experimentálním konstrukcím, při kterých se závěs kyvadla navíjel na zábrany, které tak jeho délku zkracovaly. Empirické pokusy však Huygense neuspokojovaly a tak nejprve použil zařízení, které omezovalo amplitudu (maximální výchylku) kyvadla. Záhy se však v jeho návrzích zábrany korigující délku kyvadla v závislosti na velikosti největšího úhlu odchylky od svislice objevily znovu a Huygens jejich tvar určil výpočtem. Věnujme se nyní chvíli této matematické problematice.

Místo pohybu kyvadla, jehož délka se v závislosti na velikosti největšího úhlu odchylky od svislice zmenšuje, byl vyšetřován pohyb hmotného bodu ve žlábku, který má tvar křivky, po níž se pohybuje konec kyvadla. Pro matematické kyvadlo neopatřené zkracovacími zábranami je touto křivkou kružnice a ta k izochronním kyvům nevede. Bylo tedy potřebné určit takovou křivku žlábku (zvanou *izochronou* nebo někdy také *tautochronou*), aby se hmotný bod (kulička) po ní kotálel do nejnižší polohy za stejný čas, nezávisle na tom, z jaké výšky byl vypouštěn. Huygens objevil, že takovou křivkou je *cykloida* a shodou okolností se jeho snahy najít izochronní kyvadlo objevily současně s vyšetřováním cykloidy z jiných (matematických) důvodů.

Cykloidu opisuje na kružnici daný pevný bod při kotálení kružnice po přímce bez klouzání.

Poznamenejme, že parametrické rovnice cykloidy, která vznikne kotálením kružnice o poloměru r po vodorovné přímce, kterou ztotožníme s osou x mají tvar

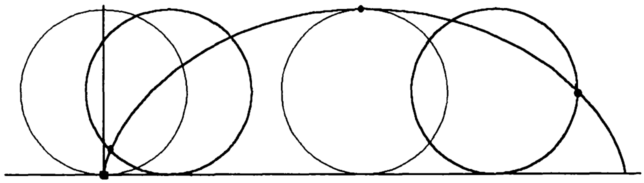
$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t)$$

přičemž parametr t má význam úhlu pootočení kružnice.

Cykloidu objevil Galileo a nezávisle na něm také páter Mersenne (1588 – 1648) z řádu minoritů, který od roku 1620 sídlil v Paříži. Cykloidou se zabýval i B. Pascal; ten se o ní vyjádřil tak, že *je to natolik obyčejná křivka, že kromě přímky a kružnice není častěji se vyskytující čáry — objevuje se tak často, že je div, že nebyla vyšetřována už dávno ...* .

V matematice sedmnáctého století se vytvářely obecné metody pro vyšetřování křivek a cykloida skýtala proto skvělý „experimentální materiál“. Na cykloidě se zkoušel každý nový poznatek hlavně proto, že nebyla podobná (svým popisem) žádné z obvyklých algebraických křivek.

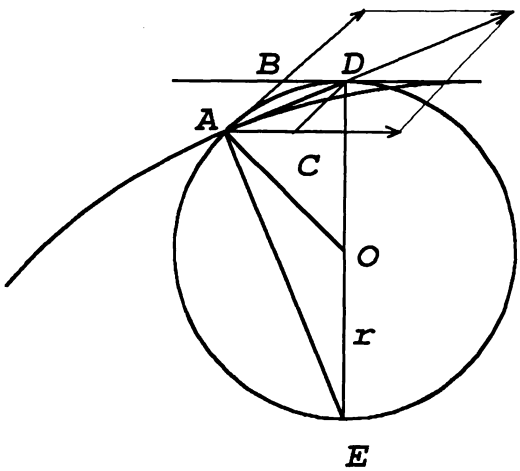
Základní průzkum cykloidy se zpočátku týkal vlastností tečny k ní. Tečnu k cykloidě lze sestrojit zvážením toho, že vzniká složením dvou pohybů —



4. Cykloida

pohybu po přímce ve směru přímky, po které se kružnice kotálí a otáčivého pohybu kotálející se kružnice.

Tečna v bodě A na cykloidě se tedy skládá z horizontálního vektoru (ten je horizontální jen kvůli představě, jinak je samozřejmě rovnoběžný s přímkou, po které se kotálí kružnice, která cykloidu vytváří) a z vektoru tečny ke kotálející se kružnici v bodě A, který můžeme považovat právě za ten bod, jehož pohybem se cykloida vytvořila. Velikosti obou vektorů jsou stejné, tím se vyjádří ta okolnost, že se kružnice po přímce kotálí bez klouzání. Směr tečny tedy určíme konstrukcí kosočtverce s vrcholem v bodě A, s jednou stranou rovnoběžnou s přímkou, po které se kružnice kotálí, a s druhou stranou danou tečnou ke kružnici v bodě A. Sestrojme rovnoběžník $ABCD$ tak, že AC a AD mají dané směry a že vrchol D leží na „vrcholu“ kružnice. Když bude O středem kružnice, potom jsou pravoúhlé trojúhelníky ABO a BDO stejné a stejné jsou proto i úsečky AB a BD a to znamená, že $ABCD$ je kosočtverec.



5. Tečna k cykloidě

Výsledkem této úvahy je, že v každém bodě A na cykloidě je dán směr tečny k ní v tomto bodě jako přímka spojující tento bod s „vrcholem" D kotálející se kružnice. Poznamenejme ješte, že přímka AE spojující bod A na cykloidě se „spodním" bodem kotálející se kružnice je kolmá k tečně, tj. je to normála k cykloidě v bodě A. Tímto způsobem tedy je celkem snadno určena jak tečna tak i normála k cykloidě.

Po této celkem jednoduché úvaze o tečně cykloidy uvažujme nyní „převrácenou" cykloidu a sledujme, jak se po ní kotálí hmotný bod. Buď r poloměr kruhu, který se po přímce kotálí a předpokládejme, že se bod po cykloidě kotálí z výšky $H \leq 2r$. Jestliže označíme $h(t)$ výšku kotálejícího se bodu v okamžiku t, pak je výše vysloveno, že je $h(0) = H$. Rychlost pohybu je dána zákonem o zachování energie (kinetická energie = potenciální energie), který v tomto případě zapíšeme ve tvaru

$$\frac{1}{2}mv^2(t) = mg(H - h(t)),$$

m je hmotnost hmotného bodu, g pak gravitační konstanta. Pro absolutní hodnotu rychlosti proto platí

$$|v(t)| = \sqrt{2g(H - h(t))}$$

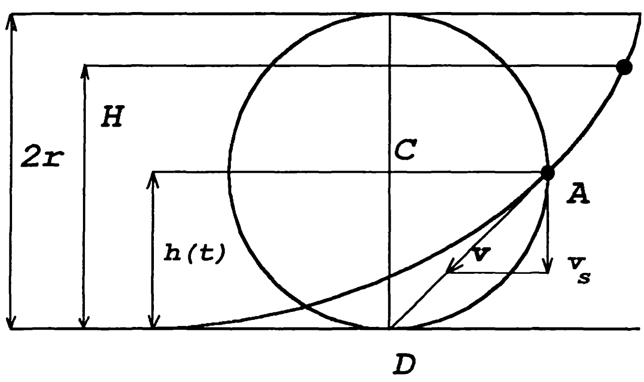
a tato rychlost má směr tečny k cykloidě v bodě A, kde se po ní se pohybující bod právě nalézá, tj. podle výše uvedené úvahy směr přímky AD, kde D je nyní „spodní" bod kotálející se kružnic. Nechť C je průmět bodu A na svislý průmer kružnice, potom $|CD| = h(t)$ a svislá složka rychlosti v_s v bodě A je dána vztahem

$$v_s(t) = |v(t)| \cdot \cos(\sphericalangle ADC).$$

Dále je $h(t) = |AD| \cdot \cos(\sphericalangle ADC)$ a přitom $|AD| = 2r \cdot \cos(\sphericalangle ADC)$, tj.

$$h(t) = 2r \cdot \cos^2(\sphericalangle ADC)$$

a odtud pak



6. K izochronnosti cykloidy

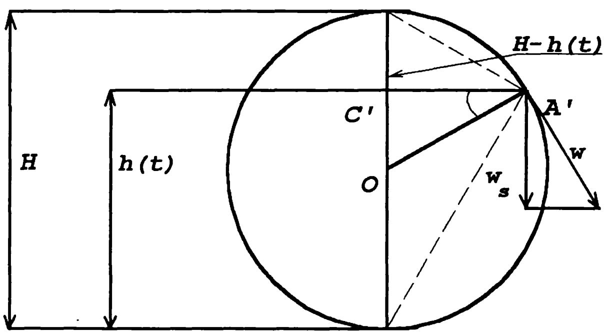
$$\cos(\sphericalangle ADC) = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}$$

a

$$v_s(t) = \sqrt{2g(H - h(t))}\sqrt{\frac{h(t)}{2r}} = \sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Tím je popsána svislá složka rychlosti pohybu $v_s(t)$ a ta umožňuje sledovat svislý pohyb hmotného bodu popsaný jeho okamžitou výškou $h(t)$ za podmínky $h(0) = H$ a zjišťovat čas τ, pro který je $h(\tau) = 0$, tj. určit čas, ve kterém se bod dokotálí do nejnižšího bodu cykloidy.

Rutinní postupy dnešní doby zřetelně napovídají, že jde o diferenciální rovnici. Huygens ale použil jiný postup. Vyšetřoval v dané situaci jistý pomocný pohyb.



7. Pomocná konstrukce

Buď dána kružnice o průměru H a nechť se po ní *rovnoměrně* pohybuje bod rychlostí w počínaje ve „vrchním" bodě kružnice. Nechť se tento bod v okamžiku t nalézá ve výšce $h(t)$ na kružnici v bodě A' a nechť O je střed kružnice. Buď C' vodorovný průmět bodu A' na svislý průměr kružnice.

Potom svislá složka rychlosti w_s v tomto bodě je

$$w_s = |w| \cdot \cos(\sphericalangle C'A'O),$$

přičemž

$$\cos(\sphericalangle C'A'O) = \frac{|C'A'|}{|OA'|} = \frac{|C'A'|}{\frac{H}{2}} = \frac{2|C'A'|}{H} = \frac{2}{H}\sqrt{h(t)(H - h(t))}$$

a proto pro svislou složku rychlosti tohoto rovnoměrného pohybu máme

$$w_s = |w|\frac{2}{H}\sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Když v této situaci bude $|w|\dfrac{2}{H} = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$, tj. $|w| = \dfrac{H}{2}\sqrt{\dfrac{g}{r}}$, pak bude $v_s(t) = w_s(t)$ a v „dolním" bodě se body pobybující se po pomocné kružnici a po cykloidě za těchto okolností octnou současně.

Bod, který se pohybuje po kružnici o průměru H rovnoměrně uvedenou rychlostí w vykoná pohyb po polokružnici (z nejvyššího do nejnižšího bodu) za čas $\tau = \dfrac{\pi H}{2|w|} = \pi\sqrt{\dfrac{g}{r}}$. Ve výrazu pro tento čas τ se nevyskytuje výška H, ze které bod byl vypuštěn a proto tedy čas $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{g}{r}}$, který je potřebný k tomu, aby se bod kotálející se po cykloidě dostal do jejího nejnižšího bodu, nezávisí na výšce H, je stejný ať je startovací výška jakákoliv. Pohyb po cykloidě je proto izochronní.

Pro využití toho, že cykloida je izochronní křivka, je ovšem ještě nutno v kyvadlových hodinách zajistit, aby se koncový bod kyvadla pohyboval právě po cykloidě. Klasické kyvadlo je kruhové.

Uveďme několik jednoduchých geometrických pojmů. Nechť je v rovině dána překážka vymezená křivkou L a nechť v bodě O této křivky je upevněna nit délky l. Nataženou nit namotávejme na překážku a sledujme křivku M, kterou opíše její konec. Křivka M se nazývá *evolventa* křivky L a L je *evoluta* křivky M. Hledejme evolutu převrácené cykloidy, kterou jsme výše identifikovali jako izochronní křivku. Jinými slovy se ptáme, jaká je křivka L, na kterou se má nit dané délky namotávat, aby se její konec pohyboval po křivce M, která je v tomto případě cykloidou.

Křivka M sestává z bodů B takových, že součet délky úsečky BA, která leží na tečně k L vedené k ní z bodu B a A je bodem dotyku, a délky oblouku OA křivky L se rovná délce nitě l.

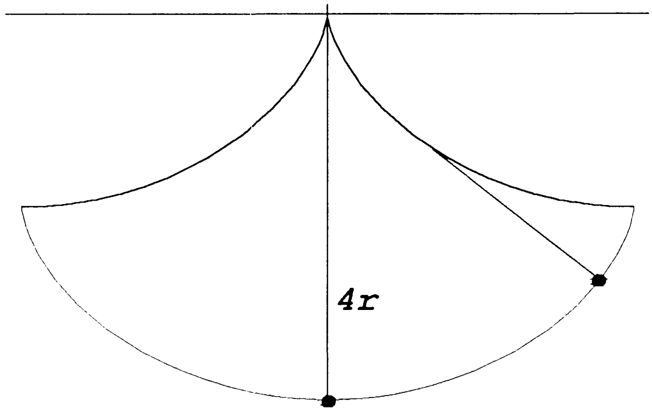
Huygensova pozorování v souvislosti s těmito pojmy jsou:

1) tečna k M v bodě B je kolmá k úsečce AB, tj. tečna AB ke křivce L je současně normála ke křivce M v bodě B a
2) v „příznivé situaci" existuje ke křivce jenom jedna evoluta.

V případě převrácené cykloidy nastane „příznivá situace" a její evolutu lze jednoznačně určit jako křivku, jejíž tečnami budou normály k této cykloidě. Huygens ukázal, že touto křivkou je stejná cykloida, posunutá směrem nahoru o $2r$ (podotkněme, že r je poloměr kružnice, jejímž kotálením po přímce l byla cykloida získána) a posunutá o půlperiodu, kdy její vrcholy jsou tam, kde jsou špičky původní cykloidy.

Aniž bychom v tomto okamžiku zacházeli do elementárních geometrických úvah, můžeme učinit spolu s Huygensem závěr, že překážka, na kterou se má závěs kyvadla „namotávat", má tvar cykloidy a kyvadlo je zavěšeno v jeho špičce; přitom délka kyvadla má být $l = 4r$.

Tím byl vyřešen jeden z dílčích problémů konstrukce přesných hodin. Experimenty s kyvadlovými hodinami (pendlovkami) na otevřeném moři však byly spíše neúspěšné a v roce 1679 se i sám Huygens přiklonil k tomu, že na moři použitelné hodiny by měly být pružinové a řízené tzv. *nepokojem*, který je v tomto případě náhradou za Huygensovu kotvu, která u kyvadlových hodin



8. Cykloidální kyvadlo

řídila dodávku energie kyvadlu; ta pocházela z potenciální energie zavěšených závaží. Sklad energie u pružinových hodin byl v nataženém peru. Takové hodiny však byly sestrojeny až v roce 1735.

Pendlovky našich babiček, nebo spíše prababiček vykonaly mimořádně dobré služby, Huygens se přičinil, že byly velmi přesné, nebyly však do nepohody, putování se jim nelíbilo, i když izochronnost kyvadla Huygens teoreticky i prakticky beze zbytku zajistil. V praktických pendlovkách však ani cykloidální kyvadlo nebylo použito, pro praktické užití zcela stačilo užít omezovače amplitudy a toho faktu, že kruhové kyvadlo se pro malé výchylky od přesného cykloidálního kyvadla liší nepatrně do té míry, že rozdíly jsou při běžném užívání hodin nerozeznatelné. Matematické a fyzikální výsledky, které při snaze vyrobit přesné pendlovky postupně vycházely najevo, však navždy zůstávají v analýze, geometrii, mechanice a jsou velmi významné.