Zbyněk Nádeník
Geometrie v 16. a 17. století

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. pp. 108–160.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401578

LA PRATICA

DELLA PERSPETTIVA

DI MONSIGNOR

DANIEL BARBARO

ELETTO PATRIARCA D'AQVILEIA,

Opera molto vtile a Pittori, a Scultori, & ad Architetti.

Con due tauole, vna de' capitoli principali, l'altra delle cose piu notabili contenute nella presente opera.

CON PRIVILEGIO.

IN VENETIA,

Appresso Camillo, & Rutilio Borgominieri fratelli, al Segno di S. Giorgio.

M D LXVIIII.

Titulní list Barbarovy knihy *La pratica della perspettiva* (1619)

GEOMETRIE V 16. A 17. STOLETÍ

(Pokus o přehled)

ZBYNĚK NÁDENÍK

Úvod

Nejdříve vysvětlím, jak a podle jakých hledisek jsem přehled sestavil.

Všechny údaje jsem až na nepočetné výjimky převzal; odkazuji na seznam literatury, kterou však na příslušných místech necituji, protože by to přehledný charakter článku zatěžovalo.

V originálních vydáních jsem měl v ruce pouze tyto knihy a traktáty z 16. a 17. století:

- Daniel Barbaro (1513–1570): *La pratica della perspettiva*, Venetia 1569.
- Hans Lencker (1530–1585): *Perspectiva*, Nürnberg 1571, *Perspectiva Literaria*, Nürnberg 1595.
- Johannes Kepler: *Harmoniae Mundi*, Linz 1619.
- Alain Manesson-Mallet (1630–1706): *Les travaux de Mars ou l'art de la guerre I – III*, Amsterdam 1684–1685.

Jako faksimile, přetisk nebo překlad jsem viděl:

- Luca Pacioli (asi 1445–1514): *De Divina Proportione*, Benátky 1509. Původní text s německým překladem *Die Lehre vom goldenen Schnitt*, Vídeň 1859. Vydal, přeložil a komentoval C. Winterberg.
- René Descartes: *Géométrie*, 3. dodatek k *Discours de la Méthode*, Leiden 1637. Faksimile francouzského originálu s anglickým překladem *The Geometry of René Descartes*, New York 1954. Z francouzštiny a latiny přeložili D. Smith a M. Latham. – Německý překlad *Die Geometrie*, Berlín 1894 (2. vyd. Lipsko 1923). Vydal, přeložil a komentoval L. Schlesinger. – Ruský překlad *Rassužděnije o metodě s priloženijami Dioptrika, Meteory, Gemetrija*, Moskva 1953. Redakce, překlad a rozsáhlé komentáře (ke Geometrii asi 50 stran) G. G. Sljusarev – A. P. Juškevič.
- Girard Desargues: *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, Paříž 1639. – Německý překlad *Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene*, Lipsko 1922. Přeložil, opatřil poznámkami a vydal M. Zacharias.[1]

Naopak mi zůstala nepřístupná tato tři díla:

- *Œuvres de Desargues I – II*, Paříž 1864. Shromáždil, analysoval a vydal N. Poudra. (Podnítil ho k tomu M. Chasles, který našel opis, jenž pořídil P. De la Hire, současník G. Desarguesa.)

[1]Populárněji o spisech Desarguesa píše J. Field: *The Invention of Infinity*, Mathematics and Art in the Renaissance, Oxford 1997, str. 192 a násl.

- R. Taton: *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paříž 1951. (Obsahuje přesný text *Brouillon project* ..., jehož tištěný exemplář byl nalezen ve 40. letech.)
- J. Gray – J. Field (ed.): *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Berlín 1987.

Čelné postavení mezi nejvýznamnějšími spisy věnovanými geometrii v 16. a 17. století zaujímají jistě Descartesův dodatek *Géométrie* k jeho *Discours de la méthode* a pojednání G. Desarguesa, zvláště pak *Brouillon project* .... Upustil jsem od samostatných pasáží jim věnovaných. Předně — podrobnější rozbory si lze přečíst v citované literatuře; za druhé — pokud bych se nechtěl omezit jen na výtah z nich, znamenalo by to věnovat analýze příliš mnoho místa a velmi bych se vzdálil od pokusu o alespoň přibližné zachycení celkového přehledu.

Spisy Desarguesa a Descartesa vznikaly rozdílně, zapůsobily rovněž rozdílně a měly i zcela rozdílné osudy. K tomu se ještě později dostanu v tomto úvodu a v oddílech V a VI o projektivní a analytické geometrii.

⋆ ⋆ ⋆

Jinak uvádím názvy knih a pojednání poskrovnu, ale nešetřím časovými údaji. Ke jménům připojuji při první citaci roky narození a úmrtí. U těch matematiků 16. a 17. století, kteří jsou nejvíce v našem povědomí, to učiním souhrnně ihned:

- François Viète (1540–1603)
- Johannes Kepler (1571–1630)
- Girard Desargues (1593–1662)
- René Descartes (1596–1650)
- Pierre de Fermat (1601–1665)
- Blaise Pascal (1623–1662)
- Christiaan Huygens (1629–1695)
- Isaac Newton (1643–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
- Johann Bernoulli (1667–1748)

Vidíme, že převažuje 17. století.

⋆ ⋆ ⋆

Přehled jsem rozdělil na oddíly podle oborů, v nichž dodržuji chronologický postup. Zpravidla jsem na začátku a na konci oddílů připojil několik málo vět o tom, co předcházelo a co následovalo. Oddíly jsou nadepsány takto:

I. Odkaz starořecké geometrie
   A. Eukleidovy *Základy*
   B. Tři úlohy starořecké geometrie
II. Elementární geometrie
   A. Planimetrie
   B. Stereometrie
   C. Přibližné konstrukce

D. Mnohoúhelníky a mnohostěny
E. Kubatury
III. Trigonometrie
IV. Perspektiva a deskriptivní geometrie
A. Perspektiva
B. Deskriptivní geometrie
V. Projektivní geometrie
VI. Analytická geometrie
VII. Speciální křivky
A. Rovinné algebraické čáry stupně 3
B. Rovinné algebraické čáry stupně 4
C. Spirály
D. Další rovinné křivky
E. Odvozené křivky
F. Prostorové křivky
G. Geodetická křivka
VIII. Algebraická geometrie
IX. Diferenciální geometrie
X. Geodetické aplikace geometrie
A. Matematická kartografie
B. Vyšší geodézie (tvar a rozměry Země)
C. Geodézie (vyměřování)

K rozsahu oddílu VII, k němuž by bylo možné přiřadit i oddíl I B, je třeba alespoň krátké poznámky. Studium speciálních křivek představovalo velmi významnou část geometrie v 16. a hlavně v 17. století. Na tomto studiu se formovaly myšlenky, z nichž se vytvořil diferenciální počet; na tomto studiu se rovněž připravovaly a tříbily myšlenky vedoucí k analytické geometrii.

⋆ ⋆ ⋆

Po velkém zájmu o geometrii mezi starověkými učenci následoval nadlouho její téměř úplný útlum. Až v posledních stoletích středověku dochází zvolna k obratu. V největší stručnosti naznačím dva vůči matematice vnější proudy, které působily na oživení geometrie.

První proud — starší — vznikal v gotické architektuře a stavebních hutích,[2] které se nemohly obejít bez jistých geometrických poznatků. Nejstarší dochovaná gotická stavba je chór opatského kostela v pařížském předměstí Saint-Denis z doby těsně před polovinou 12. století. Pak následovaly katedrály v Ile-de-France. Plány pro půdorys kněžiště (v chrámu sv. Víta na Hradčanech je tvořeno polovinou pravidelného 10-úhelníka), pro rosetová okna a klenby nebo pro přitesávání kamene jako základního stavebního prvku se bez elementů

[2]O nich psal František Kadeřávek (1885–1961), dlouholetý profesor deskriptivní geometrie na pražské technice, v knize *Geometrie a umění v dobách minulých*, Praha 1935. Německý překlad *Geometrie und Kunst in früherer Zeit*, Stuttgart–Lipsko 1992. Reedice českého originálu Praha 1994 a 1997, vždy s anonymním dodatkem Dafer: *Poznámky ke knize Fr. Kadeřávka Geometrie a umění v dobách minulých.*

geometrie nemohly obejít. Z konstrukcí takových plánů pro gotické a pozdější stavitelství vznikala — i když velmi pomalu — nauka, které koncem 18. století dal Gaspard Monge (1746–1818) vědecký základ, systém i jméno: *deskriptivní geometrie.*

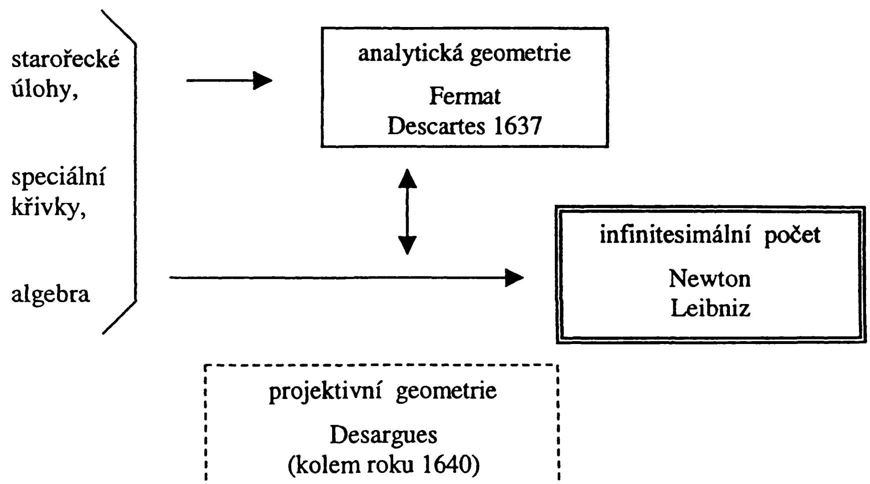
Druhý proud — podstatně mladší — začíná na počátku 15. století v malířství italské renesance. Architekt Filippo Brunelleschi (1377–1446) objevil znovu nejzákladnější principy lineámí perspektivy a malíř Masaccio (1401–1428) je geniálně uplatnil. Zachovala se řada traktátů a knih o perspektivě, většinou od italských umělců — z jiných je daleko nejvýznamnější Albrecht Dürer (1471–1528).[3]

Autorem vskutku významné vědecké práce byl však až stavitel a vojenský inženýr G. Desargues, jehož spisy předznamenaly vznik projektivní geometrie ve dvacátých letech 19. století (viz oddíl V o projektivní geometrii).

⋆ ⋆ ⋆

Zbývá — opět alespoň v nejhrubších rysech pro období 16. a 17. století — jednak nastínit vůči matematice vnitřní proudy, které ovlivnily vývoj geometrie; jednak se zmínit, jak geometrie naopak zapůsobila na matematiku jako celek.

Poslouží k tomu schéma, které zachycuje tři vrcholy matematického vývoje v 16. a 17. století; absolutní vrchol je ovšem infinitesimální počet (šipky znamenají působení):



Studium speciálních křivek, navazující z velké části na starořeckou matematiku, představovalo významnou část geometrie a vůbec matematiky v 16. a hlavně v 17. století. Na tomto studiu se formovaly myšlenky vedoucí jak k diferenciálnímu a integrálnímu počtu, tak k analytické geometrii — když se ještě

[3]O geometrii v dílech renesančních umělců jsem v posledních letech mluvil v několika přednáškách, jejichž námětem byl vztah mezi geometrií a výtvarným uměním. Naposledy v únoru 1999 na pražské pedagogické fakultě v semináři pro učitele základních škol.

připojila algebra. Při tomto vývoji se vzájemně ovlivňovaly i infinitesimální počet a analytická geometrie a byly to ovšem tyto dvě nové disciplíny, které velmi mnoho slibovaly a vázaly tak pozornost matematiků. Naproti tomu spisy Desarguesa neměly takové souvislosti s ostatní matematikou a zcela se vymykaly jejímu stavu před polovinou 17. století. Dočkaly se smutného osudu. Z několika důvodů zůstaly zcela ve stínu, ba nepovšimnuté: předně pro velkou nesrozumitelnost; analytická geometrie a tvořící se infinitesimální počet strhávaly pozornost na sebe; myšlenkově se diferenciální a integrální počet připravoval dlouhá desetiletí, a i když analytická geometrie vznikla rychleji, bylo to též její spojení s algebrou, které jí usnadňovalo rozmach; současně byla analytická geometrie ve svých začátcích velmi vzdálena od schopnosti ovládnout i vztahy charakteristické pro projektivní geometrii. Téměř výlučnou prací s rovnoběžkovými souřadnicemi vyhovovala analytická geometrie nesrovnatelně více infinitesimálnímu počtu.

Myšlenky Desarguesa zastihly matematiky zcela nepřipravené. Markantním případem je Desarguesovo nekonečno s nevlastními elementy. Až na dvě výjimky Desargues neměl následovníky. Jeho dílo tak na dlouho zapadlo. (Podrobněji viz oddíl V Projektivní geometrie).

⋆ ⋆ ⋆

V 16. století a v první polovině 17. století byly jen dva prostředky vědecké komunikace: knihy anebo — když autor nechtěl anebo nemohl volit tuto formu — dopisování. Navíc autoři často nespěchali s uveřejněním svých výsledků; docházelo k němu až po mnoha letech nebo posmrtně (např. I. Newton s klasifikací rovinných čar 3. stupně — viz oddíl VIII, nebo P. de Fermat s analytickou geometrií — viz oddíl VI). Tyto okolnosti ztěžovaly rozhodnutí o prioritě a vedly i ke sporům; dodnes v řadě případů zatemňují určitější datování.

Situace se začala měnit až se zakládáním vědeckých akademií, k jejichž povinnostem patřilo vydávat zprávy o vědeckých zasedáních. Vůbec první takovou akademií — *Accademie del Cimento*[4] — založil Leopoldo de Medici (1617–1675) ve Florencii; trvala však jen 10 let. – V Londýně se po 12 letech tajných zasedání v Oxfordu konstituovala roku 1660 *Royal Society*; potvrzení od krále Karla II. se jí dostalo roku 1662. – V Paříži byla roku 1666 založena *Académie des Sciences*, která však svou pravidelnou činnost zahájila až v roce 1699. Také počátky této společnosti jsou nezřetelné. Ví se, že oficiálnímu založení předcházely soukromé schůze, jichž se z matematiků zúčastňovali René Descartes, Marin Mersenne (1588–1648), Blaise Pascal a jeho otec Etienne Pascal (1588–1651), Giles de Roberval (1602–1675).

Ve druhé polovině 17. století vznikají i vědecké časopisy. Nejstarším je francouzský *Journal des savants*, jehož první číslo vyšlo roku 1665 díky podpoře, kterou mu věnoval Jean B. Colbert (1616–1683), ministr krále Ludvíka XIV. Moritz Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III*, 2. vyd. 1901, str. 7–8) popisuje vznik časopisu takto: člen pařížského senátního dvora

[4] V současné italštině *cimento* = zkouška drahých kovů, nebezpečí, pokušení.

Denis de Sallo (1626–1669) byl horlivým sběratelem nejrůznějších vědeckých novinek a mohl si dovolit vydržovat několik písařů, kteří mu podle jeho pokynů a s jeho poznámkami připravovali excerpce z knih. Časem tak vytvořil ohromnou sbírku výpisků, která mu umožňovala rychle se orientovat ve stále narůstajícím množství vědeckých poznatků. A napadlo ho pravidelně uveřejňovat, co takto nashromáždil. Na začátku 18. století převzal vydávání přímo stát. Za francouzské revoluce časopis zanikl, obnoven byl až s příchodem druhé restaurace.

Nedá mi, abych trochu neodbočil. Jan Amos Komenský (1592–1670) při otevření školy v Blatném Potoku (Sárospatak) roku 1650 pronesl řeč *De primario ingenia colendi instrumento, sollerter versando, libris*, v níž popsal, *jak dovedně užívat knih, hlavního nástroje vzdělávání.*[5] Podrobně vysvětlil, proč a jak si mají žáci tvořit sbírku výpisků a jak ji mají využívat. Radil k tomu, co daleko od něho dělal D. de Sallo.

I. Odkaz starořecké geometrie

A. Eukleidovy Základy

Když Turci dobyli roku 1453 Cařihrad a došlo k rozvrácení zbytku východořímské říše, uchýlilo se mnoho byzantských učenců do Itálie, v níž přispěli k rozšíření starořeckých studií v renesančním prostředí. Zvláště se to týkalo Eukleidových *Základů*. Těsně před polovinou 15. století objevil Johann Guttenberg (asi 1400–1468) knihtisk, který umožnil jejich dříve netušené rozšíření.

První tištěné vydání *Základů* je z roku 1482. Je to latinský překlad, pořídil jej z arabského textu už roku 1354 Johannes Campanus (Giovanni Campano (14. stol.)) a vydal v Benátkách tiskař Erhard Ratdolt (1447–1528). Kritické vydání *Základů* plánoval Regiomontanus (Johannes Müller (1436–1476)), ale brzké úmrtí je překazilo. Roku 1574 vyšel v Římě opět latinský překlad, který opatřil Clavius (Christoph Schlüssel (1537–1612)) a který byl až do konce 17. století uznáván jako směrodatný.

První překlady do národních jazyků jsou:

- italský 1543 (připravil jej v matematice velmi dobře známý algebraik Niccolo Tartaglia (1500–1557)),
- anglický 1551 neúplný a 1570 úplný,
- německé 1555 a 1562 neúplné,
- francouzský 1564 neúplný a 1615 úplný,
- španělský 1576 neúplný,
- holandský 1606 neúplný a 1695 úplný.

Známý pátý Eukleidův axióm o rovnoběžkách analyzovali už arabští učenci, zvláště Ibn-al-Hajtham (kolem 965–1039), Umar Chajjám (1048–1131) a Nasír

[5] K 300. výročí úmrtí J. A. Komenského řeč v latinském originálu i s překlady vydala pedagogická nakladatelství v Praze, Bratislavě, Berlíně (NDR), Budapešti, Moskvě a Varšavě. Komenského řeč ani po 350 letech neztrácí na aktuálnosti.

ad-Dín Túsí (1201–1274). Do 16. a 17. století spadá další série pokusů o důkaz pátého axiómu; jsou v knihách

- Clavius: *Euclidis elementa*, Řím 1574,
- J. Wallis (1616–1703): *De postulato quinto*, 1663 (tiskem až Oxford 1693),
- G. Borelli (1608–1679): *Euclides restitutus*, Pisa 1558,
- V. Giordano (1633–1711): *Euclide restituto*, Řím 1680.

Další osudy pátého axiómu jsou už více v povědomí. V 18. století se mu věnovali

- G. Saccheri (1667–1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Milán 1733,
- J. Lambert (1728–1777): *Theorie der Parallellinien*, 1766, tiskem až 1786;

a ve dvacátých letech 19. století dochází k objevu neeukleidovské geometrie.

B. Tři úlohy starořecké matematiky

Zdvojení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu byly úlohy, kterým se od dob starořecké matematiky až do renesance nedostalo větší pozornosti. Situace se mění až v 16. a ještě více v 17. století.

Zdvojení krychle

Krychle s hranou délky k má objem k^3. Krychle dvojnásobného objemu má hranu o délce x, pro niž

$$x^3 = 2k^3\,. \tag{1.1}$$

Mysleme si dvě úsečky, jednu o délce h, druhou o délce k. Hledejme pak úsečky o délkách x a y tak, aby

$$k : x = x : y = y : h\,.$$

Vyloučíme-li z těchto poměrů y, dostaneme

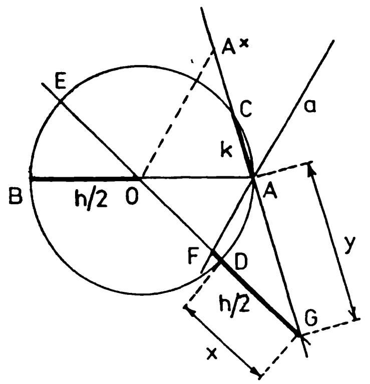
$$x^3 = hk^2\,. \tag{1.2}$$

Volíme-li speciálně $h = 2k$, dostaneme (1.1). Vidíme, že zdvojení krychle je tak převedeno na konstrukci dvou středních úměrných. Takto zobecnil délský problém už Hippokrates z Chiu (5. stol. př. Kr.).

F. Viète řešil roku 1593 úlohu takto (viz obr. 1):

Sestrojme kružnici o středu O a průměru AB délky h; z bodu A veďme tětivu AC o délce $k < h$. Na přímce AC vyhledejme bod $A^\star$ symetrický k A podle C. Se spojnicí $OA^\star$ veďme rovnoběžku a bodem A. Středem O veďme přímku tak, aby její průsečíky F a G s přímkami a a AC měly vzdálenost $\frac{1}{2}h = \mid OA \mid$; tato přímka nechť protíná kružnici v bodech D a E . Pak z podobnosti trojúhelníků $GOA^\star$ a GFA vychází

$$|GO| : |GA^\star| = |GF| : |GA|.$$



Obr. 1

Mocnost bodu G ke kružnici je

$$|GD| \cdot |GE| = |GA| \cdot |GC|.$$

Položíme-li

$$|GD| = x, \qquad |GA| = y,$$

přepíšeme hořejší relace na

$$\frac{x + \frac{h}{2}}{y + 2k} = \frac{\frac{h}{2}}{y} \qquad \text{čili} \qquad xy = hk, \quad x(x + h) = y(y + k).$$

Eliminací y dostaneme

$$x^4 + hx^3 - hk^2x - h^2k^2 = 0 \qquad \text{čili} \qquad (x + h)(x^3 - hk^2) = 0.$$

První faktor je nenulový, takže vychází (1.2).

Zbývá ještě popsat, jak vyhledat přímku jdoucí středem O, na níž přímky a a AC vytínají úsečku délky $h/2$. Stačí si myslit Nikodémovu konchoidu s pólem O, bází a a intervalem $h/2$; tato konchoida protíná spojnici AC v potřebném bodě G.

Zdvojením krychle se v 17. století zabývalo mnoho matematiků; ze známějších to byli P. de Fermat (*Isagoge*[6]) před rokem 1637, R. Descartes (*Géométrie*) roku 1637, Vincenzo Viviani (1622–1703) roku 1647, C. Huygens roku 1654, René de Sluse (1622–1685) roku 1654.

[6]Viz oddíl VI. Analytická geometrie.

Kvadratura kruhu

Na způsob, kterým Archimedes (287–212 př. Kr.) vypočítal číslo π, navázali F. Viète roku 1579, Romanus (Adrien van Roomen (1561–1615)) roku 1593 a Ludolph van Ceulen (1540–1610) roku 1596. V trigonometrickém rouše lze jejich postup traktovat takto:

Mysleme si jednotkovou kružnici s vepsaným pravidelným konvexním n-úhelníkem; středový úhel příslušný straně označíme $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Z délky strany se snadno vypočítá $\sin\frac{\alpha}{2}$, a pak postupně

$$\sin\frac{\alpha}{2^2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2^3}, \quad \ldots \quad , \quad \sin\frac{\alpha}{2^k}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

Elementární nerovnosti

$$\sin\omega < \omega < \tan\omega \qquad (0 < \omega < \frac{\pi}{2}) \tag{1.3}$$

pro $\omega = \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\pi}{2^{k-1}n}$ pak dají

$$\sin\frac{\alpha}{2^k} < \frac{\pi}{2^{k-1}n} < \frac{\alpha}{2^k}.$$

Podobně určil F. Viète číslo π s přesností na 9 desetinných míst, L. van Ceulen dokonce na 35 míst.

Při jiném výpočtu čísla π přišli F. Viète a J. Wallis vůbec k prvním nekonečným součinům:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \tag{1.4a}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}. \tag{1.4b}$$

První z těchto vzorců lze odvodit rychle goniometricky. Protože

$$\begin{aligned}\sin\omega &= 2\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} = 2\cdot 2\sin\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} = \\ &= 2^2\cdot 2\sin\frac{\omega}{2^3}\cdot\cos\frac{\omega}{2^3}\cdot\cos\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} = \\ &= \cdots = 2^n\cdot\sin\frac{\omega}{2^n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\omega}{2^k},\end{aligned}$$

tak

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\omega}{2^k} = \frac{\sin\omega}{2^n\sin\frac{\omega}{2^n}} = \frac{\sin\omega}{\omega}\,\frac{\frac{\omega}{2^n}}{\sin\frac{\omega}{2^n}} \to \frac{\sin\omega}{\omega} \quad \text{při} \quad n\to\infty.$$

Speciálně při $\omega = \frac{\pi}{2}$ máme

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots,$$

což je ovšem (1.4a).

Willebrord Snell (1580–1626) roku 1621 a Ch. Huygens roku 1654 zostřili nerovnosti (1.3) a s nimi zase dospěli k číslu π.

Jinak postupoval James Gregory (1638–1675) roku 1667. Představme si jednotkovou kružnici jednak s vepsanými pravidelnými konvexními n-úhelníkem a $2n$-úhelníkem, jednak s opsanými pravidelnými n-úhelníkem a $2n$-úhelníkem. Obsahy vepsaných mnohoúhelníků označme V_n a V_{2n}, obsahy opsaných O_n a O_{2n}. Pak platí

$$V_{2n} = \sqrt{V_n\cdot O_n}\,,\qquad O_{2n} = \frac{2V_n\cdot O_n}{V_n + V_{2n}}\,. \tag{1.5}$$

Od důkazu upustím, ale verifikujme tyto vzorce alespoň pro $n = 4$. Jednoduchý výpočet poskytne

$$V_4 = 2\,,\qquad O_4 = 4\,,$$

$$V_8 = 2\sqrt{2} = 2{,}8\ldots\,,\qquad O_8 = 8(\sqrt{2}-1) = 3{,}3\ldots$$

a vskutku

$$V_8 = \sqrt{V_4\cdot O_4}\,,\qquad O_8 = \frac{2V_4\cdot O_4}{V_4 + V_8}\,.$$

Z (1.5) lze pak postupně počítat

$$\begin{array}{lll} V_{2^2n}\,, & V_{2^3n}\,, & \ldots, \\ O_{2^2n}\,, & O_{2^3n}\,, & \ldots, \end{array}$$

přičemž pro obsah π jednotkového kruhu je

$$V_{2^kn} < \pi < O_{2^kn}\,.$$

Ještě jinak postupoval R. Descartes. Jeho metoda byla publikována až posmrtně roku 1701.

Mysleme si pravidelný konvexní n-úhelník s obvodem O a označme r_n, R_n poloměry kružnic mu vepsané a opsané. Sestrojme pak pravidelný konvexní $2n$-úhelník s týmž obvodem O a označme r_{2n} a R_{2n} poloměry kružnic mu vepsané a opsané. Pak je

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2}\,,\qquad R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}}\,.$$

Z těchto rekurentních relací se sestrojí posloupnosti

$$r_n\,,\ r_{2n}\,,\ r_{2^2n}\,,\ \ldots\,,\ r_{2^kn}\,,\ \ldots\,, \tag{1.6a}$$

$$R_n\,,\ R_{2n}\,,\ R_{2^2n}\,,\ \ldots,\ R_{2^kn}\,,\ \ldots\,, \tag{1.6b}$$

pro jejichž členy platí tyto nerovnosti:

$$2\pi r_{2^k n} < 0 < 2\pi R_{2^k n} .$$

Adrien Legendre (1752–1833) roku 1794 v *Eléments de Géométrie* vytvořil protějšek k Descartesovu postupu tím, že místo téhož obvodu mnohoúhelníků požadoval jejich stejný obsah P. Pak je

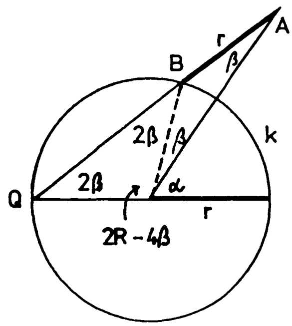
$$r_{2n} = \sqrt{\frac{r_n(r_n + R_n)}{2}} , \qquad R_{2n} = \sqrt{r_n \cdot R_n} .$$

Pro členy rekurentně sestrojených posloupností (1.6) vycházejí nyní nerovnosti

$$\pi r^2_{2^k n} < P < \pi R^2_{s^k n} .$$

Trisekce úhlu

Ve starověkém Řecku se jí zabýval Hippias Elidský (5. stol. př. Kr.), později Archimedes, Nikomedes (2. stol. př. Kr.) a Pappos (2. stol.). Po dlouhé odmlce se k úloze obrátil Étienne Pascal, který k řešení použil konchoidy, při níž je řídící přímka nahrazena kružnicí procházející pólem. Tuto konchoidu nazval G. de Roberval *Pascalovou závitnicí* (po Pascalu – otci).



Obr. 2

Kolem vrcholu O daného úhlu α (viz obr. 2) opíšeme kružnici k s libovolným poloměrem r a označíme Q průsečík této kružnice s ramenem daného úhlu, které jsme prodloužili za vrchol O. Bodem Q vedeme přímku tak, aby druhé rameno úhlu a kružnici k (kromě bodu Q) protľala v bodech A a B o vzdálenosti r. Učiníme tak pomocí konchoidy, která má bod Q za pól, pro niž řídící přímka je nahrazena řídící kružnicí k a jejíž interval je r. V rovnoramenném trojúhelníku ABO se základnou AO označme β úhel při vrcholu A či O. Úhel tohoto trojúhelníka při vrcholu B je $2R - 2\beta$, takže rovnoramenný trojúhelník QOB má při základně QB úhly rovné 2β, a tudíž jeho třetí úhel při vrcholu O je $2R - 4\beta$. Pro přímý úhel s vrcholem O na výchozím rameni tak platí $2R = (2R - 4\beta) + \beta + \alpha$, tj. $\alpha = 3\beta$. Úhel β při vrcholu A je třetina daného úhlu α.

Jiná řešení podali R. Descartes roku 1637 (*Géométrie*) a P. de Fermat (*Isagoge*). V 18. století v úloze pokračovali Tomaso Ceva (1648–1737) a Colin Maclaurin (1698–1746).

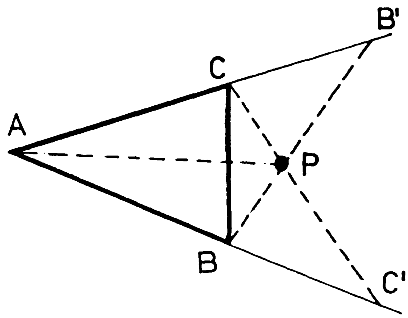
II. Elementární geometrie

A. Planimetrie

Pozornost v této geometrické oblasti se z valné části obracela k starořecké problematice. Ale začnu úlohou, která na ni nenavazovala.

Evangelista Torricelli (1608–1647) v knize vyšlé kolem roku 1640, v níž vyšetřoval maxima a minima, řešil tuto úlohu: v rovině trojúhelníka ABC se má nalézt bod X takový, že součet jeho vzdáleností od vrcholů A, B, C je minimální. Řešení lze nalézt v obsáhlejších učebnicích elementární geometrie, a tak se omezím jen na výsledek. Při každém trojúhelníku ABC existuje právě jeden bod X požadované vlastnosti; má-li trojúhelník ABC jeden úhel, třeba při vrcholu A, větší nebo roven 120°, je $X \equiv A$; nemá-li trojúhelník ABC takový úhel, je X bod, z nějž jsou všechny strany trojúhelníka vidět pod úhlem 120°.

Giovanni Ceva uveřejnil roku 1678 traktát, v němž elementárními vlastnostmi těžiště několika hmotných bodů jednak znovu dokázal větu, kterou jako první znal už Menelaos (1. – 2. stol.), a která pomocí dělících poměrů vyjadřuje podmínku, aby tři body na různých stranách trojúhelníka ležely na přímce; jednak dokázal známou, po něm pojmenovanou větu o příčkách trojúhelníka (viz obr. 3).



Obr. 3

Jestliže v rovině trojúhelníka ABC zvolíme bod P neležící na jeho stranách a jestliže jej promítneme z bodu A do bodu A' na straně BC a cyklicky, pak

$$(AB;C') \cdot (BC;A') \cdot (CA;B') = -1 \ ,$$

kde ovšem $(AB;C')$ je dělící poměr bodu C' vůči bodům A, B a cyklicky (pokud $AB \parallel PC$, tak $(AB;C') = 1$). Větu lze — s jistou opatrností — obrátit. Později se Cevova věta stala východiskem pro jednu část syntetické geometrie.

B. Stereometrie

R. Descartes si do svých zápisků kolem 1620 poznamenal prostorovou analogii Pythagorovy věty. Představme si pravoúhlý trojhran s vrcholem V a s body A, B, $C \not\equiv V$ postupně zvolenými na hranách. Pak čtverec obsahu trojúhelníka ABC je roven součtu čtverců obsahů trojúhelníků ABV, BCV, CAV. Ve speciálním případě $|VA| = |VB| = |VC|$ větu publikoval Johann Faulhaber (1580–1635) roku 1622.

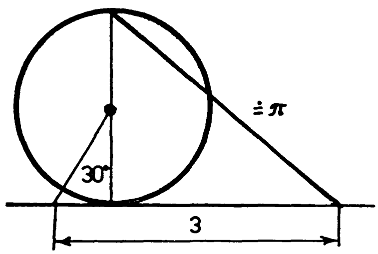
Ve druhé polovině 18. století — když se začala rozvíjet prostorová analytická geometrie — se věta opět několikrát vracela a zobecňovala v prostorovou analogii kosinové věty.

P. de Fermat formuloval a řešil kolem roku 1663 prostorovou analogii úlohy, kterou se zabýval už Apollonios (asi 262 – asi 190 př. Kr.). Sestrojil kouli, která se dotýká daných čtyř koulí.

Apolloniova rovinná úloha o konstrukci kružnice dotýkající se tří daných kružnic a její prostorový protějšek byly zvláště v 19. století prubířskými úlohami pro řadu geometrických metod.

C. Přibližné konstrukce

Známá je přibližná rektifikace kružnice, kterou uveřejnil Adam Kochański (1631–1700) roku 1685 (viz obr. 4).



Obr. 4

Mysleme si jednotkovou kružnici o středu O a v jejím bodě A tečnu. Trojúhelník ABO s pravým úhlem při A nechť má při B úhel 60°. Na tečnu naneseme od bodu B za bod A úsečku délky 3 do bodu C. Vzdálenost bodu C od bodu A^* protějšího k A je

$$\sqrt{\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2} = 3{,}141533\ldots\,.$$

Víme, že $\pi = 3{,}141592\ldots$.

Značnou pozornost k sobě upoutalo sestrojení pravidelných mnohoúhelníků. Velmi jednoduchá přibližná konstrukce pravidelného konvexního sedmiúhelníka se připisuje A. Dürerovi: strana a_7 takového sedmiúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice je přibližně rovna výšce b_7 rovnostranného trojúhelníka o straně 1.

Jednoduchý výpočet poskytne

$$a_7 = 0,8677\dots\,, \qquad b_7 = 0,8660\dots$$

a Dürerova konstrukce je tedy ještě dobře vyhovující.

A. Manesson-Mallet byl vojenský inženýr, autor několika spisů o stavbě pevností. Pro vytyčení jejich základů ve formě pravidelného k-úhelníka ($k = 6,7,\dots,12$) popsal (v dílu citovaném už na začátku úvodu) jednotnou konstrukci, exaktní při $k = 6,12$ a přibližnou při $k = 7,\dots,11$. Vždy jde o sestrojení pravidelného k-úhelníka nad danou stranou. Největší chyba v konstrukci je při $k = 10$; vezme-li se za délku strany 1, je tato největší chyba $0,011\dots$. Nepřesnosti jsou tak malé, že při stavbě se jich bylo možné dopustit.

Podobných konstrukcí uvádí A. Manesson-Mallet záplavu, ale všechny jen popisuje a neodvozuje nebo neodhaduje jejich chyby. Stejně postupovali i jeho současníci, pokud psali o geometrii v aplikacích, hlavně stavitelských. Radikálně to změnil až Amédée-François Frézier (1682–1773); viz oddíl IV.

D. Mnohoúhelníky a mnohostěny

V dlouhém období od starořecké matematiky až k novověku se polygony nejobsáhleji zabýval Thomas Bradwardinus (kolem 1290–1349). Zvláště vyšetřoval hvězdicové mnohoúhelníky vznikající z pravidelných konvexních polygonů.

Albert Girard (1595–1632) roku 1626 rozlišoval typy hvězdicových mnohoúhelníků podle úhlopříček. V nejjednodušším případě čtyřúhelníka mu vyšly tři typy: v konvexním čtyřúhelníku jsou obě úhlopříčky uvnitř obrazce; v čtyřúhelníku s dvěma křížícími se stranami jsou úhlopříčky vně obrazce; v nekonvexním čtyřúhelníku s nekřížícími se stranami je jedna úhlopříčka uvnitř a druhá vně obrazce.

Počet typů při takové klasifikaci prudce rostl s rostoucím počtem vrcholů; u 5-úhelníka 11, u 6-úhelníka 69. Broscius (Jan Brożek (1585–1662)) se roku 1652 vydal zcela jinou cestou. Hvězdicový pětiúhelník uvažoval jako desetiúhelník s 5 ostrými a s 5 dutými úhly; analogicky při 6-, 7-, ...-úhelníku až s přiblížením k isoperimetrické nerovnosti.

Pravidelná tělesa znali už starověcí matematici: Theaitetos Athénský (asi 414–361 př. Kr.), Platon (427–347 př. Kr.), Eukleides aj. Polopravidelná tělesa vyšetřil Archimedes ve spisu, který se ztratil; jeho obsah zaznamemal Pappos.

Po velmi dlouhé přestávce zájem o tato tělesa ožil za italské renesance. Luca Pacioli roku 1497 dokončil a roku 1509 v Benátkách vydal knihu *Divina proportione*, do níž Leonardo da Vinci (1452–1519) vyrýsoval všech pět pravidelných a několik polopravidelných těles; jejich hrany jsou tvořeny tyčemi. Norimberský zlatník Wenzel Jamnitzer (1508–1586) zobrazil 1568 sbírku geometrických těles, mezi nimi i hvězdicovitých polyedrů. Jamnitzerův přístup byl ovšem více umělecký než geometrický, ale — pokud je známo — byl první, kdo tyto polyedry nakreslil.

Pravidelným tělesům přisoudil ve svém díle důležité místo J. Kepler. V roce 1595 — za svého působení na gymnáziu ve Štyrském Hradci — přišel na myšlenku vkládat mezi sféry, po nichž se pohybují planety, pravidelné mnohostěny, a to tak, aby byly jedné sféře opsány a druhé vepsány. Vezme-li se za jednotku poloměr sféry Země, jsou Keplerovy údaje z *Mysterium Cosmographicum* z roku 1596 uvedeny ve druhém sloupci této tabulky (je převzata z knížky Z. Horský: *Kepler v Praze*, Praha 1980):

Poloměry planetárních sfér

	Dnešní údaj	Kepler	
Merkur	0,387	0,429	
			osmistěn
Venuše	0,723	0,762	
			dvacetistěn
Země	1	1	
			dvacnáctistěn
Mars	1,524	1,440	
			čtyřstěn
Jupiter	5,203	5,261	
			šestistěn
Saturn	9,539	9,163	

Např. šestistěn čili krychle má poměr poloměrů R a r koulí opsané a vepsané

$$R : r = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots .$$

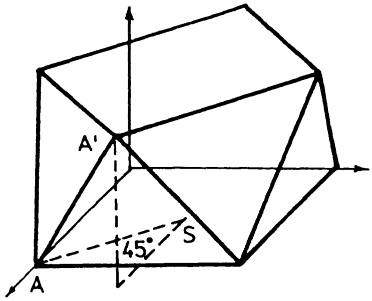
Poměr poloměrů Saturnovy a Jupiterovy sféry je při Keplerových údajích

$$9{,}163 : 5{,}261 = 1{,}741\ldots .$$

To je shoda jistě víc než nápadná. Keplerův systém planetárních sfér a pravidelných těles je v *Mysterium Cosmographicum* krásně ilustrován.

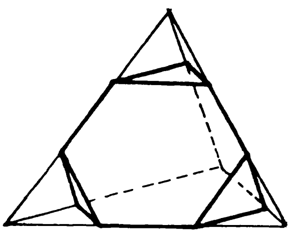
V *Harmoniae Mundi* z roku 1619 vyšetřil J. Kepler znovu polopravidelná tělesa, tj. konvexní polyedry, jejichž prostorové úhly při všech vrcholech jsou kongruentní a všechny stěny jsou — nikoliv nutně kongruentní — pravidelné mnohoúhelníky.

Polopravidelná tělesa vznikají z pravidelných mnohostěnů. Další jsou tvořena jednak přímými hranoly, jejichž základnou je pravidelný 12-úhelník a stěny jsou čtvercové; jednak „antihranoly“, které se dostanou takto: pravidelný n-úhelník, jehož jeden vrchol označíme A, natočíme kolem jeho středu S o úhel $180°/n$ a ve směru kolmém na jeho rovinu posuneme tak, aby vzdálenost bodu A (v původní poloze) od bodu A' vznikajícího z něj popsaným otočením a posunutím byla rovna straně původního n-úhelníka; antihranol je pak ohraničen dvěma shodnými n-úhelníky a $2n$ shodnými rovnostrannými trojúhelníky (viz obr. 5 při $n = 4$).

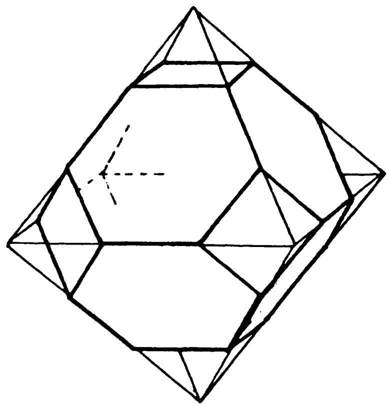


Obr. 5

Vznik všech polopravidelných těles nebudu popisovat, ale jako ilustraci uvedu, jak se dostane zkosený tetraedr, zkosený oktaedr a kubooktaedr. Z těchto tří mnohostěnů vytvořili architekti Alfred Neumann (1900–1969) a Zvi Hecker (⋆ 1931) synagogu postavenou roku 1968 v poušti Negev v Izraeli.



Obr. 6

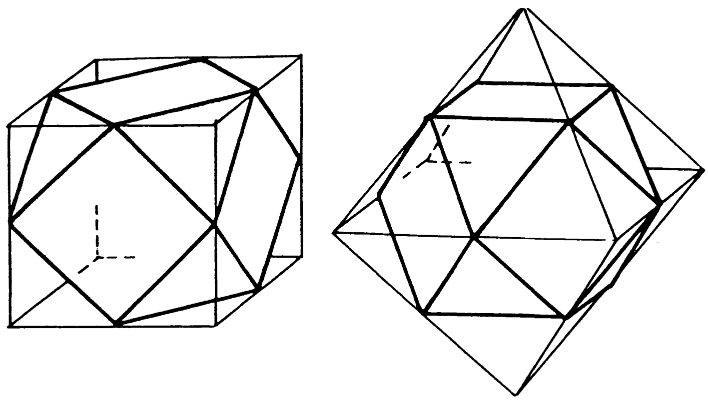


Obr. 7

Představme si pravidelný čtyřstěn (viz obr. 6); jeho vrcholy označíme A, B, C, D. Všechny hrany roztřetíme. Na třech hranách vycházejících z bodu A vybereme dělicí body mu bližší a proložíme jimi rovinu, kterou odsekneme tu část čtyřstěnu, která obsahuje vrchol A. Konstrukci opakujeme ve vrcholech B, C, D a dostaneme tak těleso ohraničené čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky (vzniklými řezy) a čtyřmi pravidelnými šestiúhelníky (vzniklými z původních trojúhelníkových stěn odřezáním vrcholů).

A zcela analogicky (viz obr. 7): vrcholy pravidelného osmistěnu označíme A, B, C, D, E, F. Všechny hrany roztřetíme. Na čtyřech hranách vycházejících z bodu A vybereme dělicí body mu bližší a proložíme jimi rovinu (to lze!), kterou odsekneme tu část osmistěnu, která obsahuje vrchol A. Konstrukci opakujeme ve vrcholech $B, \ldots, F$ a dostaneme tak těleso ohraničené šesti čtverci (vzniklými řezy) a osmi pravidelnými šestiúhelníky (vzniklými z původních trojúhelníkových stěn odřezáním vrcholů).

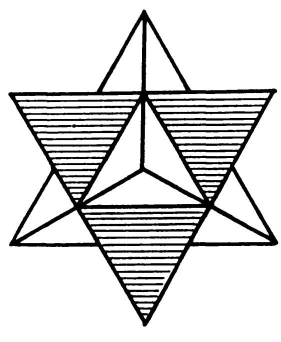
(Když na pravidelném dvacetistěnu provedeme zcela analogickou konstrukci, vznikne zkosený ikosaedr. Jeho hranici tvoří 12 pravidelných 5-úhelníků a 20 pravidelných 6-úhelníků. Je běžným vzorem pro míč.)



Obr. 8

Jestliže na pravidelném osmistěnu (viz obr. 8) odřízneme všechny jeho vrcholy rovinami, které spojují půlící body hran vycházejících z vrcholu, dostaneme zkosený oktaedr, jehož stěny jsou pravidelné trojúhelníky a čtyřúhelníky. Jestliže na krychli provedeme analogickou konstrukci, dostaneme zkosený kubus, jehož stěny jsou zase pravidelné trojúhelníky a čtyřúhelníky. Dvěma různými způsoby jsme dostali těleso, kterému se říká kubooktaedr.

J. Kepler objevil rovněž některá hvězdicovitá tělesa, vznikající z pravidelných polyedrů. Nejznámější je jeho „stella octangula“, totiž jediný hvězdicovitý typ vznikající z osmistěnu. Dostane se též vhodným průnikem dvou shodných tetraedrů. Viz obr. 9.



Obr. 9

Teorii hvězdicovitých polyedrů završili až mnohem později Louis Poinsot (1777–1859), Augustin Cauchy (1789–1857) a Arthur Cayley (1821–1895).

E. Kubatury

J. Kepler roku 1615 (v dlouho připravovaném, ale i z finančních důvodů pro tisk dlouho odkládaném spisu *Stereometria doliorum*) se z vysloveně praktických důvodů zabýval výpočtem objemu vinných sudů. Keplerovy myšlenky o „nekonečném součtu nekonečně malých veličin“ byly východiskem pro pozdější kvadratury a kubatury. V této souvislosti je třeba ještě uvést zvláště tato dvě jména: Francesco Cavalieri (1598–1647) a Paul Guldin (1577–1643). Po prvním je pojmenován známý princip pro rovnost objemů dvou těles při rovnosti obsahů jejich paralelních rovinných řezů (tento princip zhruba po 300 letech vyústil v počítačovou tomografii). Jméno druhého spojujeme se známými vzorci využívajícími geometrickou mechaniku pro vyjádření objemu a povrchu rotačního tělesa.

J. Kepler nepochybně patří mezi novověké matematiky, kteří nejvíce připravovali integrální počet.

III. Trigonometrie

Počátky trigonometrie jsou v temnotách. Pravděpodobně vznikaly z astronomických podnětů v Babylonii. Ve starém Řecku ji nejvíce ovlivnil astronom Hipparchos (180–125 př. Kr.); po zániku řeckořímské kultury trigonometrii rozvinuli Arabové. Ale na úroveň samostatné nauky jako části geometrie přivedl trigonometrii Peršan Nasír ad-Dín Túsí. V Evropě byl jeho protějškem až Regiomontanus.

Logaritmy ve druhé a třetí dekádě 17. století vyvolaly v trigonometrii přelom. Pravděpodobně vlivem jejich objevu, který učinil John Neper (1550–1617), se v 17. století trigonometrie nejvíce rozvíjela v Anglii. Henry Briggs (1561–1631) a Henry Gellibrand (1597–1637) uveřejnili roku 1633 knihu s názvem *Trigonometria Britannica*. Její první část tvoří rozsáhlé tabulky — za zmínku jistě stojí, že při desetinném dělení úhlu — a druhá část shrnuje trigonometrické vzorce ve tvaru vhodném pro logaritmický výpočet spolu s velkou řadou úloh z rovinné i sférické trigonometrie. Adriaen Vlacq (asi 1600–1667) roku 1633 vydal tabulky *Trigonometria artificialis*, v nichž pracoval se starým šedesátinným dělením, které pak na velmi dlouho převládlo.

Ne všechny trigonometrické či goniometrické vzorce připouštějící logaritmování vznikly až jako impulsy po objevu logaritmů. Tak třeba vzorce pro poloviční úhel α trojúhelníka z jeho stran a, b, c

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\,, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\,, \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

objevil Georg Rhaeticus (1514–1585) roku 1576, ale publikovány byly až roku 1596. Analogie pro sférický trojúhelník

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}\,, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\ \cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

(a, b, c v nich znamenají středové úhly stran) odvodil J. Neper po objevu přirozených logaritmů.

Od třicátých let 17. století byla trigonometrie zaplavena vzorci, které — až na velmi vzácné výjimky — byly identitami. Protože se v posledních desetiletích našeho věku v souvislosti s geometrickými nerovnostmi objevil zájem o trigonometrické či goniometrická nerovnosti, stojí za připomenutí, že i nerovnosti v trigonometrii jsou velmi starého data. W. Snell našel roku 1621 relace

$$\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} < \varphi < \tan\frac{\varphi}{3} + 2\sin\frac{\varphi}{3},$$

které dokazal Ch. Huygens roku 1654. Z nich pak při $\varphi = \frac{\pi}{30}$ dostal

$$\pi = 3{,}131\,592\,653\ldots$$

(s devíti správnými ciframi za desetinnou čárkou). Ch. Huygens pochyboval o možnosti kvadratury kruhu.

Ve třicátých letech 18. století se o trigonometrii začíná zajímat Leonhard Euler (1707–1783). Rovinné i sférické trigonometrii dal tvar, který si v hlavních rysech udržela dodnes.

IV. Perspektiva a deskriptivní geometrie

A. Perspektiva

Pro italskou renesanci perspektivu znovu objevil už v úvodu připomenutý Filippo Brunelleschi, stavitel imposantni kopule dómu ve Florencii 1420–1436. Zvláště významně k lineární perspektivě přispěli malíři (první byl spolupracovníkem Brunelleschiho) Masaccio (rovněž zmíněný v úvodu), Piero della Francesca (1416–1492), Leonardo da Vinci a Raffaello Santi (1483–1520). K nim se druží sochař Lorenzo Ghiberti (1378–1455), který na počátku 15. století vyhrál soutěž na dvojici bronzových dveří v hlavním portálu baptisteria ve Florencii. Reliéfy odlité v letech 1424–1447 — tedy v době prvních počátků perspektivy — vykazují vysoký stupeň správnosti v jejích pravidlech. Navíc je třeba si uvědomit, že geometrická teorie reliefu vznikala až zhruba v polovině 19. století. Rozdíl vůči lineární perspektivě je podstatný; zatímco perspektiva zobrazuje prostor do roviny, relief jej zobrazuje opět do prostoru.

Pojednání o perspektivě se v písemné formě zachovala už od malířů nebo architektů rané renesance:

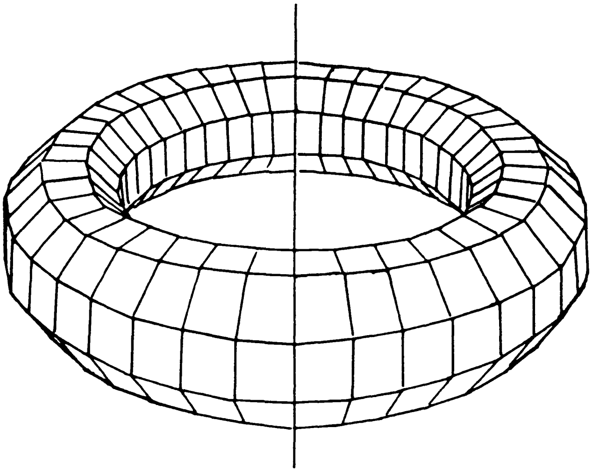
- Leone Battista Alberti (1404–1472) — z roku 1436
- Piero della Francesca — z roku 1482

Teoretičtější charakter měly knihy těchto autorů:

- Jean Pélerin (Viator, asi 1445–1524) — z roku 1505
- Albrecht Dürer — z roku 1525

- Daniel Barbaro — z roku 1569
- Quido del Monte (1545–1607) — z roku 1600
- Simon Stevin (1548–1620) — z roku 1607

Knihy podobného charakteru z rozmezí geometrie — umění, které byly uveřejněny až v 17. století, už nebudu uvádět. J. Pélerin ve svém díle shromáždil zkušenosti ze staveb gotických katedrál ve Francii. O Dürerově knize jsem několikrát mluvil v přednáškách o geometrii a umění a nebudu se tedy opakovat. D. Barbaro doprovodil svou knihu množstvím kreseb, též pravidelných mnohostěnů.



Obr. 10

Na obr. 10 je polyedrální torus z jeho knihy; kdybychom kresbu vytvořili počítačem, tak — ačkoliv se na Barbarově kresbě snadno najdou nepřesnosti — rozdíl více než 400 let není markantní.

Dürerův dřevořez a mědirytiny *Odpočinek na útěku do Egypta* (1503, asi 30 × 21 cm), *Sv. Jeroným v domku* (1514, asi 25 × 19 cm) a *Melancholie I* (1514, asi 24 × 17 cm) jsou ukázkami velkých Dürerových vědomostí o lineární perspektivě a současně příležitostí k poznatku, že i tak geniální umělec se tehdy ještě nemohl vystříhat pochybeni v ní. Zvláště *Melancholie I* byla několikrát v literatuře podrobena geometrické analýze. Na rytině je zajímavý

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

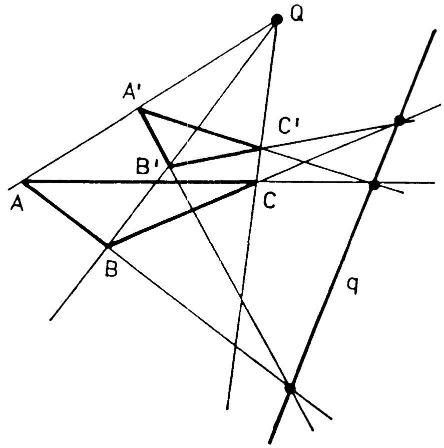
Obr. 11

klenec (těleso ohraničené šesti shodnými kosočtverci) zkosený odseknutím těch dvou vrcholů, které spojuje nejdelší úhlopříčka. Na rytině je i magický čtverec reprodukovaný na obr. 11.

Nejen v každé řádce, v každém sloupci a v obou úhlopříčkách je součet čísel 34; stejný součet 34 dávají i čísla v pěti malých čtvercích ohraničených čárkovaně. Prostřední dvě číslice v posledním řádku dávají datum úmrtí Dürerovy matky 1514, po němž umělec rytinu vytvořil.

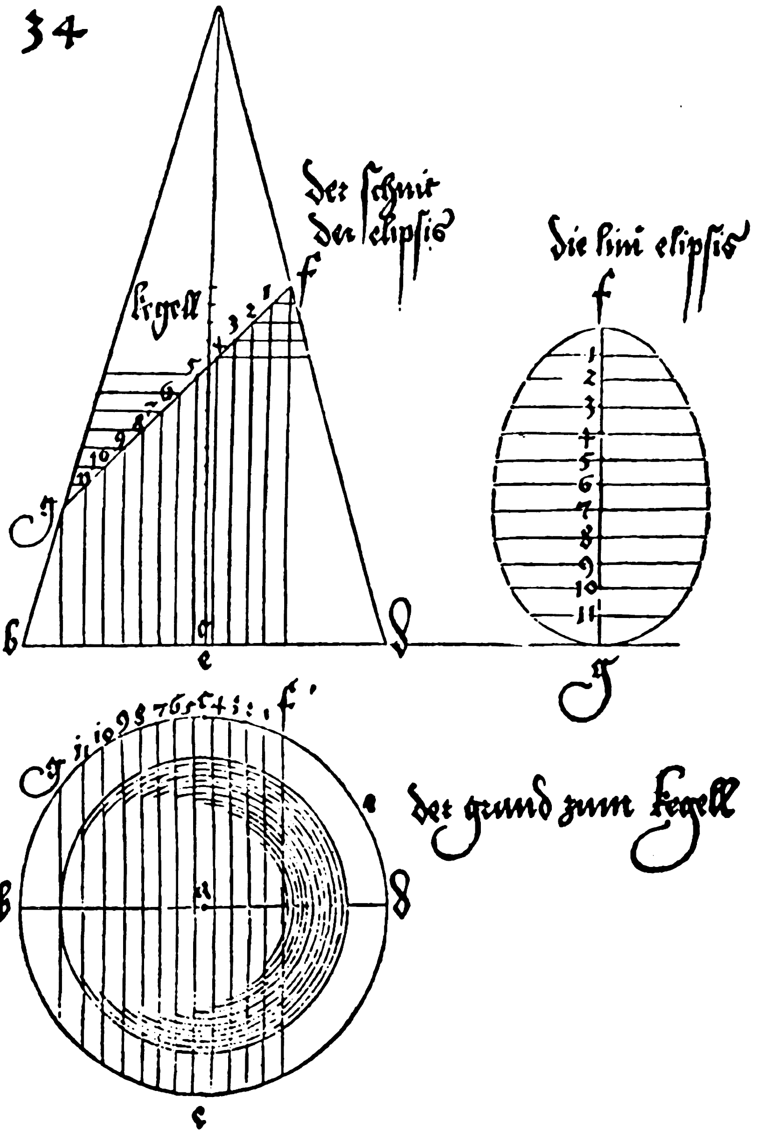
V knihách o vzniku perspektivy — ať už jsou jejich autory historici umění či historici vědy (matematici) — jsou sice objevy základních konstrukčních prvků a pravidel lineární perspektivy připisovány zpravidla výše uvedeným jménům, ale nikoliv jednoznačně. Proto — a poněvadž jsem si sám nemohl údaje ověřovat v původních nebo kritických vydáních — upustím od výčtu, kdo objevil hlavní bod, horizont, úběžníky, úběžnice, distanční bod nebo různé konstrukční postupy. Připojím jen, že za zakladatele teoretického studia perspektivy je považován G. del Monte.

Zvláštní místo zaujímá G. Desargues, jímž začíná vědecká práce i v projektivní geometrii, nadřazené perspektivě. Ukazuje to už jeho první traktát vydaný roku 1636; rovněž roku 1643 vydal spis o perspektivě, jímž se obracel výslovně k teoretikům. V prvním spisu je známá věta o perspektivních trojúhelnících: jestliže dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ v rovině jsou v takové poloze, že spojnice AA', BB', CC' procházejí jedním bodem Q, protínají se (prodloužené) strany AB a $A'B'$, BC a $B'C'$, CA a $C'A'$ v bodech ležících na jedné přímce q (obr. 12); a naopak. Význam této věty, kterou lze snadno dokázat přibráním prostoru a uvažováním trojúhelníků jako řezů jehlanu, je dostatečně známý.



Obr. 12

Desarguesovy myšlenky a úvahy byly tak nové a nesrozumitelně vyložené, že narazily na prudké odmítnutí. Nekonečno, jak o něm v perspektivě psal Desargues — tedy cosi společného rovnoběžným přímkám či rovinám — bylo něco jiného než nekonečno ve vznikajícím infinitesimálním počtu, na které si tehdy matematici už řadu desetiletí zvykali. K Desarguesovi se jetě vrátím v oddíle V.



Obr. 13
Z knížky E. Schröder *Dürer–Kunst und Geometrie*, 1980

B. Deskriptivní geometrie

Ačkoliv se za její počátek běžně považuje závěr 18. století, kdy G. Monge vydal roku 1795 své přednášky, jsou některé základní konstrukce deskriptivní geometrie mnohem staršího data.

A. Dürer v připomenuté už knize *Underweysung der Messung* ... z roku 1525 konstruuje řezy rotační kuželové plochy rovinou. Osu plochy volí vertikálně, takže její základna je v horizontální rovině. Sečná rovina jde kolmo k průčelní vertikální rovině. Pak přibere soustavu rovnoběžných horizontálních rovin. Každá z nich protne kuželovou plochu v kružnici a sečnou rovinu v přímce; půdorysné průměty jak této kružnice, tak této přímky se snadno sestrojí a svými průsečíky poskytnou dva body řezu. V situaci z obr. 13 (na protější straně), o níž víme, že vede k elipse jako řezu, konstruoval A. Dürer i jeho skutečný tvar. Postupoval správně, ale graficky řez zakreslil chybně: přizpůsobil jej svému přesvědčení, že řezem je ovál s dolní částí širší než horní část.

Bez jakéhokoliv přehánění můžeme říci, že v Dürerově postupu jsou obsaženy základy promítání na dvě kolmé průmětny, jak je známe z Mongeovy projekce.

Kdybychom nyní — vzdáleni zhruba půl tisíciletí od A. Dürera — řešili jeho úlohu, myšlenkově bychom postupovali úplně ve shodě s ním.

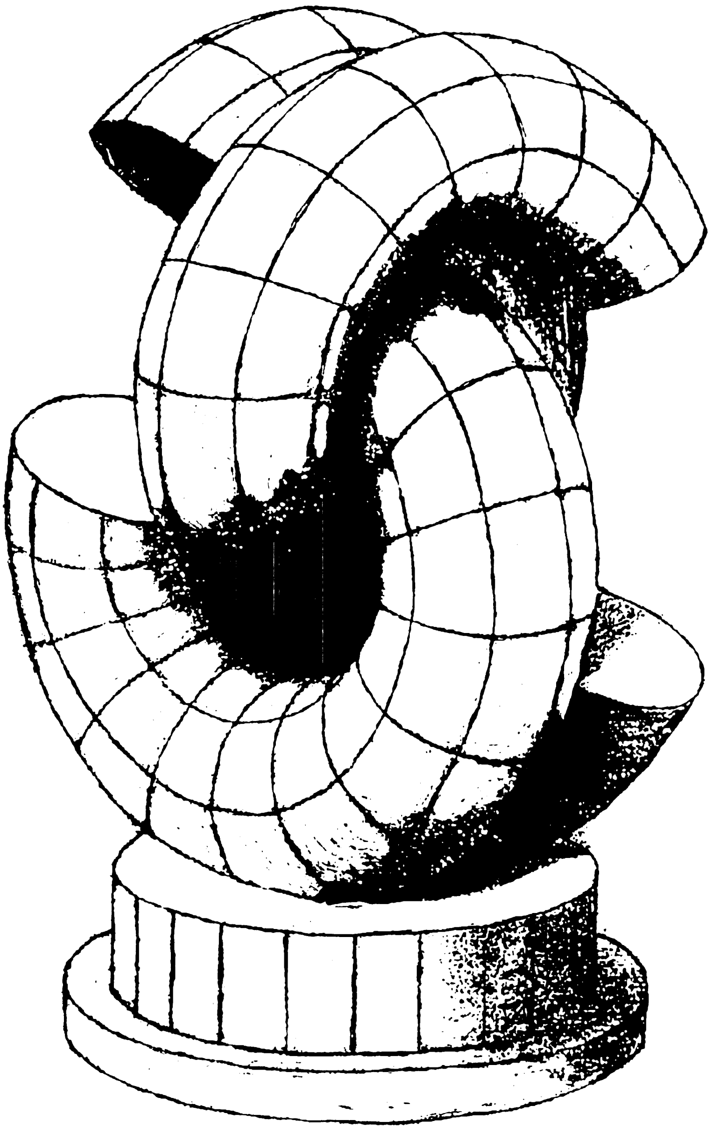
Počátky popsaného promítání však jsou jistě starší a sahají až do stavebních hutí ve 13. století.

Připojuji ještě (na následující straně) kresbu rourových ploch H. Lenckera (zmíněného už na začátku úvodu) z roku 1565, na níž jsou nakresleny čáry, které až o více než 200 let později začal vyšetřovat G. Monge — totiž čáry udávající směr extrémního zakřivení plochy v jejím bodě. Dnes těmto čarám říkáme hlavní (křivoznačné) a víme, že tvoří ortogonální síť. Je vidět, že H. Lencker tuto ortogonalitu dobře vycítil.

Jiného předchůdce měla deskriptivní geometrie v plánech pevností, hlavně z 16. století. Plány těchto opevnění byly zpravidla kresleny v projekci, které se říká *kavalírní perspektiva*. Pojmenování může mýlit; nejedná se o perspektivu, ale speciální případ šikmé axonometrie, v níž se prostorový osový pravoúhlý kříž promítá na dvě kolmé polopřímky a v polopřímku svírající s nimi úhel 135° a v níž poměry délek zůstávají zachovány. „Cavalier" pak ve starší francouzštině znamenalo i polní opevnění. Výhodou tohoto zobrazení bylo, že znázorňovalo pohledy ze tří stran se zachováním poměrů skutečných délek.

V knihách o stavitelství v 16. a. 17. století bylo zcela běžné, že autoři v nich popisovali řadu geometrických konstrukcí, které nijak neodůvodňovali. To změnil až A.-F. Frézier svým dílem *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de stéréotomie*, Strasbourg I – 1738, II – 1739; Paříž I – 1754, II – 1768, III – 1769.

První svazek je teoretický a konstrukce jsou v něm odůvodňovány, vůbec se nejedná o pouhé návody. (Viz Z. Nádeník: *200 let Mongeovy „Géométrie descriptive"*. Matematika v proměnách věků I, Praha 1998, str. 147–162.)



Rourové plochy H. Lenckera (1565)

V. Projektivní geometrie

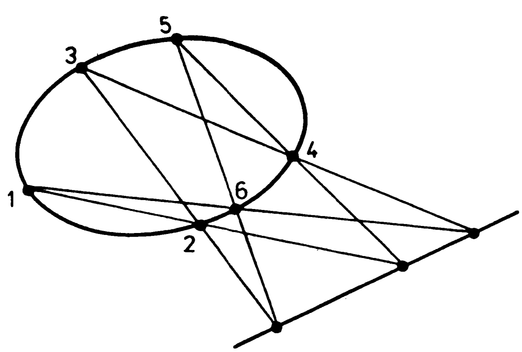
Na vrcholu starořeckého bádání o kuželosečkách je Apollonios z Pergy. Za dlouhou řadu dalších staletí — až do třetiny 17. věku — nedošlo k významným objevům v teorii čar 2. stupně.

O nový pohled se zasloužil G. Desargues — povoláním stavitel a vojenský inženýr — který jednak ovládal perspektivu s jejím praktickým upotřebením třeba v architektuře, jednak měl hluboký smysl pro vědecký postup. V roce 1639 vydal spis *Brouillon project* ... s dlouhým názvem říkajícím, že jde o rovinné řezy kužele. Spis je počátkem projektivní geometrie. Neměl příznivé osudy. Současníkům byl téměř nesrozumitelný, úplně se ztratil, teprve v polovině minulého století objevil v jednom pařížském antikvariátu Michel Chasles (1793–1880) jeho opis, který pořídil Philippe De la Hire (1640–1718) roku 1679. Až k polovině našeho století byl nalezen i tištěný exemplář. Přetiskl jej R. Taton: *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Paříž 1951.

Desargues založil své úvahy na širokém uplatnění středového promítání a nevlastních elementů, tj. prvků v nekonečnu. Studoval involuci bodů na přímce i přímek ve svazku; v případě hyperbolické involuce určil její dva reálné samodružné body. Rovněž studoval involuci na přímkách protínajících svazek kuželoseček (dnes: Desarguesova věta). Na svých poznatcích o involuci založil i studium kuželoseček v tom smyslu, že věta získaná pomocí involuce pro kružnici zůstává v platnosti pro každou kuželosečku. Nalezl i řadu vět o pólech a polárách.

G. Desargues se nedočkal uznání, naopak, jeho spis zcela zapadl. Představa nekonečně vzdálených bodů, přímek a rovin byla tehdejším geometrům ještě velmi vzdálená, většina pojmů byla nová a výklad nesrozumitelný. Ale Desarguesův výkon patří nepochybně k vrcholům geometrie v 17. století.

G. Desargues byl původním povoláním vojenský inženýr. Později se usadil v Paříži a stal se členem vědeckého kroužku, který předcházel založení pařížské Akademie (viz úvod). Se svým otcem se jej účastnil i mladý B. Pascal, kterému Desargues pravděpodobně vyložil své myšlenky o nové projektivní geometrii a setkal se u něho s velkým zájmem. Patrně byl B. Pascal tehdy jediný,



Obr. 14

kdo Desarguesovy myšlenky zcela pochopil a dokonce dále rozvinul. Projevilo se to v Pascalově slavném objevu o šestiúhelníku s vrcholy 1, 2, 3, 4, 5, 6 na kuželosečce (viz obr. 14) — tři dvojice protějších stran 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 se protínají v bodech ležících na přímce.

Tato věta umožňuje spoustu důsledků. B. Pascal svůj objev zachytil bez důkazu v pojednání, které bylo publikováno roku 1639 jen z malé části. Po Pascalově smrti se pojednání dostalo k Leibnizovi, který o něm roku 1676 napsal delší dopis Pascalovu synovi. V dopisu vystihl obsah Pascalova pojednání a naléhavě je celé doporučoval k tisku. To se nestalo a rukopis se ztratil. Existenci rukopisu potvrzuje též Pascalův vlastní zápis z roku 1654, že už ve svých šestnácti letech sestavil spis o kuželosečkách.

Z Leibnizova dopisu lze usoudit, že B. Pascal svou větu dokázal nejdříve pro šestiúhelník vepsaný do kružnice a středovým promítáním větu zobecnil pro libovolnou kuželosečku. Vytištěná část byla známa i Descartesovi, který se měl údajně vyjádřit, že nemůže pocházet od šestnáctiletého mladíka. Tak vznikla legenda, že autorem rukopisu byl G. Desargues nebo E. Pascal – otec. Ale z roku 1644 pochází vytištěné svědectví — autorem je M. Mersenne, že B. Pascal z jediné obecné věty rozvinul celou Apolloniovu nauku o kuželosečkách.

Druhým geometrem, o kterém je třeba se zmínit v souvislosti s Desarguesem, je P. De la Hire. Vydal v letech 1673, 1679 a 1685 o kuželosečkách tři spisy, v nichž navázal na Desarguese a k jeho teoriím připojil nové věci — např. další vlastnosti pólu a poláry, harmonických čtveřin aj.

Víme, jak později projektivní geometrie znovu vznikla — byli to hlavně G. Monge a Lazare Carnot (1753–1823), s jejichž vlivem J. Poncelet (1788–1867) vydal roku 1822 *Traité des propriétés projectives des figures*. Toto dílo je nový základ projektivní geometrie, která se v 19. století rozrostla v tehdy jednu z nejvýznamnějších oblastí matematiky. J. Poncelet napsal (svazek I, úvod, str. XXV–XXVI):

Desargues, ami de l'illustre Descartes, et dont celui-ci faisait le plus grand cas comme géomètre; Desargues, qu'on peut appeler, à plus d'un titre, le Monge de son siècle, que les biographes n'ont point assez connu, ni assez compris; Desargues, enfin, que des contemporains, indignes du beau titre de géomètre, ont noirci, persécuté et dégoûté, pour n'avoir pu se mettre à la hauteur de ses idées et de son génie, fut, je crois, le premier, d'entre les modernes qui envisagea la Géométrie sous le point de vue général que je viens de faire connaître. ...

. . . . .

Descartes écrivait, en janvier 1639, au sujet d'un papier de Desargues, que lui avait transmis le P. Mersenne: „La façon dont il commence son raisonnement, en l'appliquant tout ensemble aux lignes droites et aux courbes, est d'autant plus belle qu'elle est plus générale, et semble être prise de ce que j'ai coutume de nommer la Métaphysique de la Géométrie, qui est une science dont je n'ai point remarqué qu'aucun autre se soit jamais servi, sinon Archimède. ...“[7]

[7] *Desargues, přítel proslulého Descartesa, který ho jako geometra považoval za největ-*

Je třeba pamatovat, že J. Poncelet neznal Desarguesův spis; věděl o něm jen z dochovaných zpráv.

VI. Analytická geometrie

Předně rozlišíme souřadnicovou geometrii a analytickou geometrii. Se zřetelnými počátky první se setkáváme už ve starořecké matematice: Apollonios z Pergy s teorií kuželoseček, Hipparchos s „výmyslem“ zeměpisné šířky a zeměpisné délky, s objevem stereografické projekce a s aplikací astronomických poznatků v geografii.

Analytická geometrie se mohla objevit teprve tehdy, až algebra natolik vyspěla, že ji bylo možné spojit se souřadnicemi. To udělali R. Descartes a P. de Fermat přibližně v třetině 17. století, oba výlučně jen v rovině.

Soudí se, že koncem dvacátých let 17. století měl R. Descartes rozmyšleny podstatné části svého pozdějšího spisu *Discours de la méthode*, k němuž *Géométrie* s analytickou geometrií je jedním ze tří dodatků (*Dioptrique, Météores, Géométrie*). Koncem roku 1633 se R. Descartes dověděl, že Galileo Galilei (1564–1642) byl odsouzen římskou inkvizicí. Toho se zalekl, takže dokončení a uveřejnění svého spisu pozdržel až do roku 1637 (latinská verse je až z roku 1644). Protože ve třicátých letech 17. století žil R. Descartes v Holandsku, a tudíž byl římskou inkvizicí osobně nezasažitelný, připouští se, že zmíněný úlek mohl být i důsledkem jezuitské výchovy. Descartesovy spisy se dostaly na index až roku 1663.

Rovněž se usuzuje, že P. de Fermat rozvinul svou metodu analytické geometrie ve třicátých letech, ještě před rokem 1637, kdy vyšla Descartesova *Géométrie*. Podnětem mu byly práce starořeckých matematiků, zvláště Apolloniovo dílo o kuželosečkách, ve spojení s metodou označování, kterou vynalezl F. Viète. Fermatův spis se nazýval *Ad locos planos et solidos isagoge* (*Úvod do rovinných a prostorových míst*; název by mohl vyvolat nedorozumění, Fermat užíval starořecké terminologie: rovinná místa — přímka a kružnice, tělesná místa — elipsa, parabola, hyperbola vznikající jako řez kužele rovinou). Tiskem jej vydal až roku 1679 Fermatův syn Clément-Samuel (1632–1690), ale částečně již s označením, které zavedl R. Descartes. Fermat se v několika směrech dostal dále než Descartes. Např. běžně užívá posunutí soustavy souřadnic (které Descartes nemá) a zbavuje se jím lineárních členů v rovnicích. Fermat rovněž diskutuje — i když neúplně — homogenní rovnici 2. stupně mezi souřadnicemi

šího; Desargues, kterého možno nazvat — z několika důvodů — Mongem jeho století, jehož životopisci vůbec dosti neznali ani mu nerozuměli; Desargues, konečně, kterého současníci, nezasluhující si krásného titulu geometra, očernili, pronásledovali a znechutili, pro neschopnost povznést se k výšce jeho myšlenek a jeho génia, byl — věřím — prvním mezi moderními (geometry), který vzhlížel ke geometrii z obecného hlediska, které hned vyložím ... Descartes napsal, v lednu 1639, k předmětu jednoho Desarguesova spisu, který mu postoupil Mersenne: „Způsob, jímž začíná svou úvahu, používaje ji zároveň na přímky a křivky, je tím krásnější, že je obecnější, a zdá se přejatý z toho, co jsem zvyklý nazývat metafysikou geometrie, což je věda, u níž jsem vůbec nepostřehl, že by jí někdo jiný kdy posloužil, leda Archimedes.“ ...

x a y (což rovněž Descartes nečiní) a formuluje podmínky, za nichž rovnice 2. stupně znamená kružnici.

Známý je spor G. Leibniz — I. Newton o prioritu v infinitesimálním počtu, který přerostl ve spor mezi anglickou a německou stranou. Francouzi k němu vyjádřili své stanovisko připomínkou, že první byl P. de Fermat. Tato kolise měla jakousi „předehru" ve sporu R. Descartes versus P. de Fermat z roku 1638, který však zůstal omezen jen na jejich úzké vědecké okolí a měl mnohem slabší intenzitu. Vznikl pro Fermatovu metodu maxim a minim z dvacátých let 17. století (velmi se blížila diferenciálnímu počtu) a přenesl se i na analytickou geometrii. Ve sporu se prý R. Descartes nezdržel invektiv a P. de Fermat se prý ukázal velkorysejší. Jiného druhu bylo obvinění, které při veřejné rozpravě vyslovil G. de Roberval, že R. Descartes převzal hlavní myšlenky ke své analytické geometrii za svého pobytu v Anglii od anglických autorů; měli to být Thomas Harriot (1560–1621) a William Oughtred (1574–1660), kteří vynikli svými pracemi v algebře. Výtka nebyla ojedinělá, opakoval ji roku 1677 Oughtredův žák J. Wallis, jeden z významných předchůdců infinitesimálního počtu.[8] Teprve roku 1971 ukázal B. Porschnew neoprávněnost této výtky.[9]

V literatuře o historii matematiky je posouzení dvojice R. Descartes – P. de Fermat, co se analytické geometrie týká, rozkolísané. Někteří autoři soudí, že Fermat se dostal dále než Descartes.

V povědomí matematiků se už v 17. století prosadila Descartesova analytická geometrie. Důvodů k tomu bylo několik. Předně více než čtyřicetiletý rozdíl v uveřejnění. Pak nepochybně označování: P. de Fermat převzal způsob, který zavedl F. Viète, avšak R. Descartes volil symboliku přehlednější a bližší naší. (Příklad: místo dřívějšího označení třetí mocniny jako aaa nebo $a3$ psal Descartes už a^3.)

Prostorová analytická geometrie

Dnes se zdá přechod od analytické geometrie rovinné k prostorové — tj. přechod od dvou ke třem souřadnicím — velmi přirozený. V počátcích analytické geometrie tomu však bylo jinak. R. Descartes i P. de Fermat se prostorové analogie jen dotkli. Druhý naznačil, jak by se studovaly plochy pomocí rovinných řezů; první jen připojil, že prostorové křivky by bylo možné vyšetřovat pomocí jejich průmětů na dvě kolmé roviny.

Určení bodu v prostoru třemi pravoúhlými souřadnicemi popsal G. Desargues roku 1636, ale učinil tak pro konstrukci perspektivního obrazu předmětu, nikoliv pro analytickou geometrii. To udělal až P. De la Hire roku 1679, který patrně jako první dospěl k rovnici plochy, a to v případě rotačního paraboloidu (vznikajícího otáčením paraboly kolem její osy). S prostorovými souřadnicemi

[8]Podle F. Cajori: *A History of Mathematics*, 2. vyd., New York 1924. J. Wallis ve své knize *Algebra* z roku 1685 uvažoval o čtyřech a více dimensích. V traktátu o kuželosečkách z roku 1655 je studoval jako křivky dané rovnicí 2. stupně

[9]Podle H. Wussing–W. Arnold: *Biographien bedeutender Mathematiker*, 3. vyd., Berlín 1983.

musil pracovat i Johann Bernoulli; Guillaume de L'Hospital (1661–1704) od něj totiž dostal roku 1697 dopis (publikovaný až roku 1742) s rovnicí geodetické křivky.

Antoine Paran (1666–1716) roku 1705 psal už rovnici kulové plochy se středem mimo počátek (až na zcela nepodstatný pořádek členů) tak, jak ji téměř po 300 letech píšeme i my.

Po prvních krůčcích ještě v 17. století se prostorová analytická geometrie v 18. století už velmi zřetelně prosadila — roku 1731 vydal Alexis Clairaut (1713–1765) spis o diferenciální geometrii prostorových čar, který obsahuje patrně první soustavnou aplikaci analytické geometrie na prostorové útvary — a na konci 18. století jí dal G. Monge tvar, který v hlavních rysech podržela až do našeho století. Podle prostorového Mongeova vzoru uspořádal rovinnou analytickou geometrii na přelomu 18. a 19. století Sylvestre Lacroix (1765–1843); forma, již jí dal, přetrvala celé 19. století až do prvních desetiletí našeho.

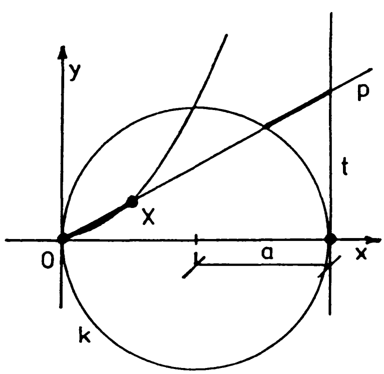
VII. Speciální křivky

Analytická geometrie a infinitesimální počet vznikající v 17. století skýtaly mnoho podnětů ke studiu rovinných křivek; naopak při něm bylo možné ověřovat metody jak analytické geometrie, tak diferenciálního a integrálního počtu.

A. Rovinné algebraické čáry stupně 3

Dioklova kisoida

Přišel na ni už Diokles (2. stol. př. Kr.), když se zabýval zdvojením krychle prostřednictvím dvou středních geometrických úměrných (viz oddíl I B). V 17. století byla objektem, na němž mnoho matematiků zkoušelo konstrukci tečny a výpočet obsahu, tedy základní úlohy, z nichž vznikal infinitesimální počet. Zvláště to byli P. de Fermat, G. de Roberval, J. Wallis, R. de Sluse, Ch. Huygens, I. Newton.



Obr. 15

Na kružnici k o poloměru a zvolme bod O (obr. 15) a v jeho bodě protějším sestrojme k ní tečnu t. Z bodu O veďme polopřímku p protínající t a její úsek mezi k a t přenesme na p od bodu O k bodu X. Při měnící se polopřímce p vytváří bod X Dioklovu kisoidu. Zvolí-li se tečna v bodě O ke kružnici k za osu y a pozitivní směr osy x tak, aby obsahoval průměr kružnice k, má kisoida rovnici

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \qquad (0 \le x < 2a) \ .$$

R. de Sluse roku 1658 (v dopisech Ch. Huygensovi) jako první uvažoval kisoidu i mimo kruh ohraničený kružnicí k; uvědomil si, že tečna t je asymptota kisoidy; vypočítal objem rotačního tělesa vzniklého otáčením kisoidy kolem její asymptoty. Ch. Huygens v té korespondenci uvedl, že kisoida se svou asymptotou t omezuje plochu, jejíž obsah je roven trojnásobku plochy kruhu ohraničeného kružnicí k; s našimi vědomostmi to potvrdíme výpočtem nevlastního integrálu

$$2\int_0^{2a} \sqrt{\tfrac{x^3}{2a-x}}\,dx =$$

$$= 2a^2\Big[-\frac{1}{2a^2}(x+3a)\sqrt{x(2a-x)} + 3\arctan\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\Big]_0^{2a} = 3\pi a^2 \ .$$

Descartesův list

Čára vyjádřená v pravoúhlých souřadnicích rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy \ , \tag{7.1}$$

kde a je kladná konstanta, se objevuje v dopisech, které Descartes roku 1638 adresoval svému příteli M. Mersenneovi. Descartesovi posloužila ke studiu konstrukce tečny. Podobně jako u kisoidy i na ní zkoušela řada matematiků začátky infinitesimálního počtu, rovněž s omezením na I. kvadrant. Teprve Ch. Huygens roku 1692 v dopisech G. L'Hospitalovi vyšetřil celkový průběh křivky; v konci 17. století se mu věnovali též G. L'Hospital sám a Johann Bernoulli.

Ve zmíněných už Descartesových dopisech z roku 1638 je také transformace rovnice čáry z jedné do druhé souřadnicové soustavy. Protože rovnice (7.1) zůstává nezměněna, zaměníme-li x s y, je Descartesův list symetrický podle osy lichých kvadrantů. Vezměme ji za novou osu X s pozitivní částí v prvním kvadrantu, nová osa Y k ní kolmá nechť svou pozitivní částí je ve II. kvadrantu původní soustavy. Pro souřadnice $[x, y]$ a $[X, Y]$ téhož bodu v uvažovaných soustavách (jedna vzniká z druhé otočením kolem společného počátku) platí

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot X - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot Y \ , \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot X + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot Y$$

a rovnice (7.1) přechází v

$$Y^2 = \frac{X^2(3a - \sqrt{2}X)}{3(a + \sqrt{2}X)} \ .$$

Descartesův list má tedy asymptotu, jejíž rovnice v soustavě (X, Y) je

$$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}a$$

a v soustavě (x, y) tedy

$$x + y + a = 0 \ .$$

Kubická parabola

Z rovnice paraboly $y^2 = px$ (p je kladná konstanta) se přímo nabízí zobecnění

$$y^n = px \ ,$$

nejdříve s n přirozeným. Tyto paraboly se objevují kolem poloviny 17. století se známými nám jmény; R. Descartes (1638), P. de Fermat (1644), M. Mersenne, F. Cavalieri, G. Roberval, J. Wallis aj.

Při $n = 3$ máme kubickou parabolu, kterou se zabýval Johann Bernoulli roku 1698; zjistil, jak se na této čáře najdou oblouky, jejichž rozdíl je rektifikovatelný (rozdíl délek oněch oblouků lze sestrojit kružítkem a pravítkem). Stojí za povšimnutí, že analogické vlastnosti eliptických oblouků objevil až později Gianfrancesco di Fagnano (1715–1797) a doplnili je až matematici v první polovině 19. století, zvláště John Graves (1806–1870); z těchto objevů pak pramenila teorie eliptických integrálů.

Neilova parabola

K dalšímu zobecnění vede upuštění od požadavku, že n je přirozené. Nejznámější případ je $n = \frac{2}{3}$, který J. Wallis pojmenoval *semikubickou parabolou.* Její rektifikací se z Wallisova podnětu zabýval William Neil (1637–1670) roku 1657. Jeho výsledek uveřejnil až roku 1659 opět J. Wallis: délka oblouku semikubické paraboly mezi body s úsečkami 0 a X je (při $p = 1$)

$$\int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} = \frac{8}{27}\left[(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \ ,$$

z čehož vychází rektifikovatelnost semikubické paraboly. Je to nejstarší případ rektifikace algebraické křivky.

B. Rovinné algebraické čáry stupně 4

Descartův ovál

R. Descartes se v *Dioptrice* a v *Géométrie* z r. 1637 zabýval touto úlohou: jsou dána dvě média rozhraničená plochou; v jednom je bodový zdroj světla. Jaký tvar musí mít ona plocha, aby se světelné paprsky setkaly v jednom bodě druhého média?

V rovině je řešením čára, k níž lze — výlučně geometricky — dospět takto: zvolme dva různé pevné body F_1 a F_2; označme r_1 a r_2 vzdálenosti bodu X od bodů F_1 a F_2; zvolme dvě konstanty k_1 a k_2 nikoliv obě záporné nebo nulové. Co vytvoří body X, pro které

$$k_1 r_1 + k_2 r_2 = 1\,?$$

Odpověď je ovšem známa při $|k_1| = |k_2|$, kdy bod X vytvoří elipsu ($k_1 k_2 > 0$) nebo hyperbolu ($k_1 k_2 < 0$) . Nechť tedy v dalším $k_1^2 \neq k_2^2$.

Položme $2e = |F_1 F_2|$ a zvolme soustavu pravoúhlých souřadnic tak, že $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$. Pro bod $X = [x, y]$ pak platí

$$k_1 \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + k_2 \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 0\,. \tag{7.2}$$

Po odstranění mocnin dostaneme

$$(x^2 + y^2)^2 + 4e\,\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}\,x(x^2 + y^2) + (\text{členy st. nejvýš } 2) = 0\,.$$

Vidíme, že se jedná o bicirkulární křivku[10]. Říká se jí *Descartův ovál.*

Lze jej velmi jednoduše vytvořit stereometricky. Mysleme si dvě rotační kuželové plochy o rovnicích

$$(x+e)^2 + y^2 = \frac{(z - m_1)^2}{k_1^2 (m_2 - m_1)^2}\,,$$
$$(x-e)^2 + y^2 = \frac{(z - m_2)^2}{k_2^2 (m_2 - m_1)^2}\,,$$

s různými kótami m_1 a m_2 vrcholů. Eliminace proměnné z — za vhodné volby znamének při odmocňování — vede k rovnici (7.2). Descartův ovál tak vzniká z průniku dvou rotačních kuželových ploch s rovnoběžnými osami, a to jeho průmětem na rovinu kolmou k osám.

[10]Tak se označují čáry s rovnicí

$$(x^2 + y^2)^2 + (\text{konst.} \cdot x + \text{konst.} \cdot y)(x^2 + y^2) + (\text{členy st. nejvýš } 2) = 0\,,$$

tedy se singularitami v kruhových bodech. Vlastnosti bicirkulárních křivek byly ovšem studovány mnohem později až v 19. století.

Lze ovšem určit dvě čísla ϱ_1, ϱ_2 tak, aby $k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 = 1$. Při jedné takové volbě můžeme rovnici (7.2) přepsat na

$$\frac{\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\varrho_1}{\sqrt{(x-e)^2+y^2}-\varrho_2} = -\frac{k_2}{k_1}$$

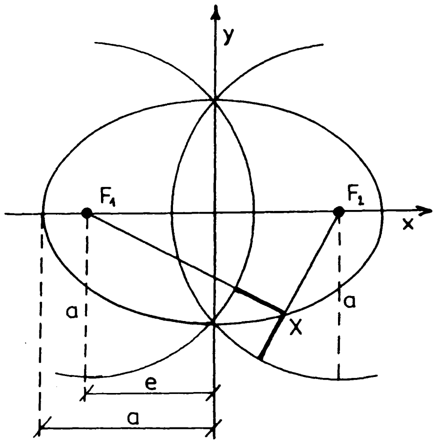
a interpretovat tak, jak to učinil I. Newton v r. 1687: Descartův ovál je množina bodů, jejichž (orientované) vzdálenosti od daných dvou kružnic o středech F_1, F_2 a poloměrech $|\varrho_1|$, $|\varrho_2|$ jsou v konstantním poměru. (Pro bod $X[x,y]$ elipsy s hlavní poloosou a, excentricitou e a s ohnisky F_1, F_2 jako výše místo (7.2) je

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a\,,$$

čili

$$\frac{\sqrt{(x+e)^2+y^2}-a}{\sqrt{(x-e)^2+y^2}-a} = -1\,.$$

To je na obr. 16 vystiženo rovností délek silně vytažených úseček mezi bodem X elipsy a kružnicemi o středech F_1, F_2 s poloměrem a.)



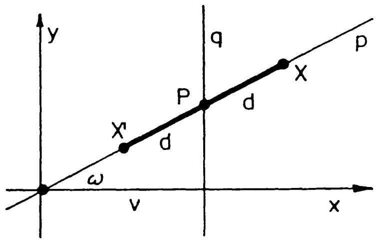
Obr. 16

Nikomédova konchoida

Nikomédes popsal konstrukci, která vede ke křivce později po něm pojmenované (obr. 17). Mysleme si bod O a přímku q s ním neincidentní ve vzdálenosti v. Bodem O veďme přímku p a označme P její průsečík s přímkou q . Pak na přímce p vytkněme body X a X', které mají od bodu P danou vzdálenost d. Otáčí-li se přímka p kolem bodu O, pohybují se body x a X' po křivce, které se říká *Nikomédova konchoida*[11]. Ještě v 17. století považovali matematici — zvláště G. de Roberval — větve konchoidy za dvě různé čáry. Příliš se tomu

[11]Pro její tvar viz A. Kolman: *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha 1968, str. 161, obr. 58.

nelze divit, protože ta větev konchoidy, na níž leží uzlový bod, má tvar velmi blízký Descartovu listu.



Obr. 17

Nikomédova konchoida se v 17. století dočkala — podobně jako Dioklova kisoida — oživeného zájmu. Konstrukcí její tečny se zabýval Fermat v dopisu G. de Robervalovi v r. 1636 i R. Descartes v r. 1637; též sám G. de Roberval na ní vyzkoušel svůj způsob pro konstrukci tečny, založený na rozkladu pohybu[12].

Zvolí-li se za počátek pravoúhlých souřadnic x, y bod O a za osu x kolmice z bodu O na přímku q (orientovaná od O ke q), má rovnice Nikomédovy konchoidy tvar

$$y^2 = \frac{x^2\,[d^2 - (x-v)^2]}{(x-v)^2}\,. \tag{7.3}$$

Přímka $x = v$ (tj. přímka q) je asymptota; je tečnou v nevlastním bodě, v němž má konchoida dotykový uzel. Protože po odstranění zlomku v poslední rovnici se dostane

$$(\text{členy st. } 4) + (\text{členy st. } 3) + (v^2 - d^2)x^2 + v^2y^2 = 0\,,$$

je počátek singulární bod konchoidy s tečnami

$$(v^2 - d^2)x^2 + v^2y^2 = 0\,.$$

V bodě O má tedy konchoida při $d < v$ bod izolovaný, při $d = v$ bod vratu, při $d > v$ bod uzlový.

Určením inflexních bodů se zabýval Ch. Huygens v r. 1653 v dopisu Fransi van Schootenovi (1615–1660) a v traktátu z roku 1654. Protože Huygensův postup našel později — až v 19. století — značný ohlas v algebraické geometrii, tak jej v krátkosti naznačím.

Při volbě polárních souřadnic $r \in \langle 0, \infty)$ a $\omega \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ s pólem v bodě O a s polopřímkou $\omega = 0$ v pozitivní části osy x má konchoida rovnici (viz obr. 17)

$$r = \frac{v}{\cos\omega} \pm d\,, \tag{7.4}$$

[12]Při aplikaci Robervalovy konstrukce se nevyhnul omylu Monge: *Géométrie descriptive* 1795; rozboru ji podrobil Christian Wiener (1826–1896): *Lehrbuch der darstellenden Geometrie I*, 1884 se závěrem, že nejjistější je ji nepoužívat; viz Z. Nádeník: *200 let Mongeovy „Géométrie descriptive"*, in: J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků I*, Praha 1998, str. 147-162.

která vzhledem k $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ přechází v (7.3) a současně poskytuje

$$x = v \pm d\cos\omega, \quad y = v\tan\omega \pm d\sin\omega\,. \tag{7.5}$$

Tři body konchoidy na téže větvi s amplitudami $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ($\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1$) leží tedy na přímce právě tehdy, když determinant 3. stupně

$$|\, v \pm d\cos\omega_i \quad v\tan\omega_i \pm d\sin\omega_i \quad 1\,| = 0$$

(všude se znaménkem + nebo všude se znaménkem -). Poněkud delší výpočet ukáže, že lze krátit

$$2\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot\sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2}\cdot\sin\frac{\omega_3-\omega_1}{2} \neq 0$$

a zůstává

$$v\left[\cos(\omega_1+\omega_2)+\cos(\omega_2+\omega_3)+\cos(\omega_3+\omega_1)-1\right] \pm 2d\cos\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3 = 0\,.$$

Při $\omega_i \to \omega$ ($i = 1, 2, 3$) tedy

$$v(3\cos 2\omega - 1) \pm 2d\cos^3\omega = 0\,,$$

čili

$$\pm d\cos^3\omega + 3v\,\cos^2\omega - 2v = 0\,.$$

Se (7.5) přepíšeme poslední rovnici na

$$\frac{(x-v)^3}{d^2} + 3v\frac{(x-v)^2}{d^2} - 2v = 0$$

čili na

$$x^3 - 3v^2x + 2v(v^2 - d^2) = 0\,. \tag{7.6}$$

Vidíme tak, že úloha nalézt inflexní body konchoidy je kubická. Ch. Huygens ve zmíněném už dopisu van Schootenovi poznamenal, že rovnici (7.6) při $d^2 = 2v^2$ lze uvést na tvar

$$(x+v)(x^2 - vx - 2v^2) = 0\,,$$

takže v tomto případě se kubická úloha redukuje na kvadratickou. Dále Ch. Huygens graficky nachází inflexní body pomocí jisté paraboly a jisté kružnice. Kubická rovnice (7.6) nemá kvadratický člen; pro takové rovnice udal R. Descartes koncem 20. let 17. století grafické řešení založené na vyhledání průsečíků paraboly a kružnice. Grafické řešení Huygensovo je nápadně blízké grafickému řešení Descartovu.

Nikomédovou konchoidou se rovněž zabýval R. de Sluse v r. 1658 v dopisu Huygensovi; J. Wallis v traktátu z roku 1659; konečně též I. Newton v 70. letech 17. století (tiskem až v r. 1707) se zabýval využitím konchoidy při řešení problémů vedoucích na rovnice 3. a 4. stupně.

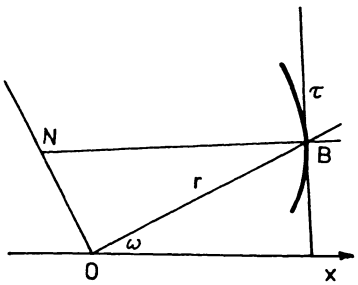
C. Spirály

V tomto oddílu stále pracujeme s polárními souřadnicemi s průvodičem r a amplitudou ω, pro kterou připouštíme $\omega \in \langle 0, \infty)$.

Archimedova spirála

Je to množina bodů určených rovnicí $r = a\omega$, (a = konst. > 0). S křivkou se zpravidla spojovaly tři základní úlohy: konstrukce tečny, výpočet obsahu plochy, kterou křivka (event. s průvodiči) opisuje a rektifikace křivky. Stručně naznačíme výsledky těchto úloh pro Archimedovu spirálu.

První úlohu rozřešil už Archimedes vyšetřením vlastností subtangenty. Ale ještě snadněji se sestrojí tečna pomocí subnormály. Na průvodič bodu B čáry sestrojme počátkem O kolmici a určeme její průsečík N s normálou ke křivce v bodu B; úsečka ON — nebo její délka — se nazývá *polární subnormálou* (viz obr. 18).



Obr. 18

Z elementárních poznatků o čarách vyjádřených polární rovnicí víme, že pro křivku o rovnici $r = r(\omega)$ je

$$|ON| = |r'(\omega)|\,.$$

V případě Archimedovy spirály tedy $|ON| = a$ a konstrukce normály i tečny je zvláště snadná.

Obsah $\triangle$ „trojúhelníka", jehož dvě strany jsou tvořeny průvodiči bodů B_1 a B_2 s amplitudami ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$; $\omega_2 - \omega_1 \leqslant 2\pi$) spirály a třetí stranu tvoří její oblouk $\widehat{B_1B_2}$, je

$$\triangle = \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} a^2\omega^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}a^2(\omega_2^3 - \omega_1^3) = \frac{1}{6a}(r_2^3 - r_1^3)\,.$$

Speciálně při $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$ je

$$\triangle = \frac{(2\pi a)^3}{6a} = \frac{4\pi^3 a^2}{3} = \frac{\pi(2\pi a)^2}{3}\,,$$

což je třetina obsahu kruhu o poloměru $2\pi a$. Tento výsledek byl znám už Archimedovi.

Třetí úlohu neřešil ani Archimedes, ani jeho následovníci. Zůstala otevřená až do 17. století, kdy se jí věnovali B. Cavalieri v r. 1635, Grégoire de St. Vincent (1584–1667) v r. 1647, G. de Roberval (podle Mersenneovy knihy z roku 1644), B. Pascal v r. 1659 a Fermat v r. 1659. Jejich výsledky ústily v převedení rektifikace spirály v rektifikaci paraboly.

Další spirály

Archimedova spirála podnítila studium čar s obecnější rovnicí. Ihned je patrné, že čára o rovnici $r = \text{konst.} \cdot \omega + \text{konst.}$ je zase Archimedova spirála.

Mezi čarami s polární rovnicí tvaru $r = a\omega^2 + b\omega + c$, $(a,b,c = \text{konst.})$ vystupuje *Galileova spirála*

$$r = a\omega^2 + c \quad (a < 0,\, c > 0)\,.$$

Studoval ji — aniž by udal její rovnici — Fermat v r. 1636. Podnítil ho k tomu M. Mersenne jednou úlohou z Galileovy mechaniky — odtud název Galileova spirála.

Fermatova spirála je čára s polární rovnicí

$$r^2 = \text{konst.} \cdot \omega\,.$$

Vyšetřoval ji P. de Fermat v r. 1636 v dopisu Mersenneovi. Později studoval i obecnější spirály

$$r^k = \text{konst.} \cdot \omega\,, \quad (k = \text{konst.} > 0)\,,$$

kterým věnoval pozornost též J. Wallis.

Parabolickou spirálou se rozumí čára vystižená polární rovnicí

$$(r - a)^2 = 2pa\omega\,, (a = \text{konst.}, p = \text{konst.})\,.$$

Zabýval se jí Jacob Bernoulli v r. 1691.

Hyperbolická spirála má polární rovnici

$$r = \frac{\text{konst.}}{\omega}\,.$$

Její studium začal Pierre Varignon (1654–1722) v r.1704 a pokračoval v něm Johann Bernoulli.

Logaritmická spirála má rovněž původ v geometrické úloze. Mysleme si čáru o polární rovnici $r = r(\omega)$. Pro úhel τ, který svírá průvodič bodu o parametru ω s tečnou v tom bodě (viz obr. 18), platí

$$\tan\tau = r \cdot \frac{1}{\frac{dr}{d\omega}}\,.$$

Hledá-li se čára, pro niž je τ =konst., je třeba integrovat rovnici

$$\frac{dr}{d\omega} = \text{konst.} \cdot r\,,$$

což dává

$$r = \text{konst.} \cdot e^{\text{konst.} \cdot \omega}\,.$$

První zmínku o logaritmické spirále napsal Descartes v r. 1638 v dopisu Mersenneovi. Přibližně ve stejnou dobu se jí zabýval E. Torricelli, pak J. Wallis v r. 1659, ještě později v 90. letech 17. století několikrát Jacob Bernoulli.

D. Další rovinné křivky

Klotoida

O logaritmické spirále bylo známo, že její poloměr křivosti je úměrný délce oblouku. V pozůstalosti Jacoba Bernoulliho se našel počátek vyšetřování křivek, které mají poloměr křivosti nepřímo úměrný délce oblouku. Pak věc úplně zapadla a dostali se k ní až Alfred Cornu (1841–1902) v r. 1854 při studiu lomu světla a Ernesto Cesàro (1859–1906) v letech 1864 a 1896 ve své přirozené geometrii. A. Cornu vyšetřil průběh křivky s oběma asymptotickými body, kolem nichž se čára „navíjí" ; to vedlo E. Cesàra k pojmenování podle starořecké sudičky Klótho, která u kolébky předla lidský osud. Klotoidy se užívá jako přechodnice z přímé trati do kruhového oblouku při stavbě silnic pro vysoké rychlosti.

Brachistochrona

Úlohu o *brachistochroně* (slovo je odvozeno z řeckého ekvivalentu pro „nejkratší čas") vyslovil v r. 1696 Johann Bernoulli a vzápětí ji řešil jak sám, tak jeho bratr Jacob: ve vertikální rovině — s pravoúhlou souřadnicovou soustavou, jejíž osa x je horizontální — zvolme body $A_1[x_1, y_1]$ a $A_2[x_2, y_2]$ s $x_1 \neq x_2$, $y_1 > y_2$ (bod A_1 je tedy výše než bod A_2, ale nejsou na téže vertikále). Po jaké čáře se musí pohybovat hmotný bod B, aby z polohy $B \equiv A_1$ dospěl do polohy $B \equiv A_2$ v nejkratším čase? Johannovo řešení bylo přizpůsobeno výlučně uvažovanému případu, Jacobovo řešení bylo hlubší v tom smyslu, že připouštělo zobecnění a připravovalo variační počet. Jacob vyslovil při něm i myšlenku, že v jisté třídě funkcí je třeba najít extremálu, tj. funkci nejlépe vyhovující jisté podmínce.

K základům variačního počtu velmi přispěla úloha o nejkratší spojnici dvou bodů na ploše; viz část F o geodetické křivce.

E. Odvozené křivky

Paralelní čáry

Mysleme si, že ve všech bodech hladké křivky $\mathfrak{C}$ bez inflexních bodů jsme sestrojili normály a každou jsme orientovali ve směru od její paty k středu křivosti. Pak na každou normálu naneseme od její paty v jejím pozitivním (negativním) smyslu úsečku pevné délky d; množina tak vzniklých bodů se nazývá *vnitřní* (*vnější*) *paralelní čára* k čáře dané. (Vylučujeme ovšem kruhový oblouk jako $\mathfrak{C}$ při d rovném jeho poloměru.)

Takovými čarami se zabýval W. Leibniz v r. 1692. Jakýsi náznak k nim pochází už od A. Dürera v *Underweysung der Messung* ... .

Mnohem později zvláštní pozornost připoutala čára paralelní k elipse (vnější má vždy tvar oválu, vnitřní může být komplikovanější). Její rovnici 8. stupně v pravoúhlých souřadnicích odvodili Eugène Catalan (1814–1894) v r. 1844 a A. Cayley v r. 1860. Až koncem 19. století se ukázal velký význam paralelních čar pro teorii konvexních útvarů.

Evoluty a evolenty

Ch. Huygens byl první, kdo se těmito čarami zabýval. Učinil tak ve 3. části svého díla, které dopsal v r. 1665, avšak publikoval až v r. 1673. Všiml si, že normály cykloidy obalují posunutou cykloidu, a z toho speciálního případu přešel k obecné situaci. Znal už věty, které se dnes uvádějí jako základní poznatky o evolutách a evolentách.

Huygensovy úvahy velmi zobecnil fyzik René Réaumur (1683–1757) v r. 1709. Místo normál svírajících s tečnou pravý úhel uvažoval přímky, které s tečnami svírají pevný ostrý úhel. Pro obálku těchto přímek (název není ustálen, nejčastěji je přijímáno francouzské pojmenování *développoide* a podle něj utvořené *evolutoida*) odvodil R. Réaumur sérii vět o vztahu ke středům křivosti výchozí čáry.

Cykloidy, epi- a hypocykloidy

Jestliže se v rovině kotálí po přímce kružnice k, tak bod s ní pevně spojený vytvoří cykloidu, leží-li na kružnici k; zkrácenou cykloidu, je-li uvnitř kružnice k; prodlouženou cykloidu, je-li vně kružnice k.

Ačkoliv je pravděpodobné, že cykloida byla známa už ve starořecké geometrii, s jistotou se to nepodařilo ověřit. Gino Loria (1862–1953) udává, že první určitá zmínka o cykloidě je v knize, kterou Charles de Bouvelles (asi 1470–1553) vydal v Paříži v r. 1501; až téměř po sto letech se k cykloidě vrátil G. Galilei v r. 1599.

V 17. století přitáhla cykloida na sebe velkou pozornost. Ve 20. letech se jí zabýval M. Mersenne, a protože bezúspěšně, obrátil se na G. de Robervala. Tomu se podařilo odkrýt několik vlastností cykloidy (např., že obsah oblasti omezené přímkou, po níž se kružnice kotálí, a obloukem cykloidy mezi jejími sousedními body vratu, je trojnásobek obsahu kotálejícího se kruhu), které vzbudily velkou pozornost a vyvolaly řadu dalších studií, založených na infinitesimálním počtu.

F. Prostorové křivky

Vivianiho čára

I prostorové křivky se objevují ve starořecké matematice. Eudoxos z Knidu (asi 408–355 před Kr.; přímý předchůdce Eukleidův, autor *proporcí* jako předobrazu teorie reálných čísel a rovněž autor *exhaustívní metody* — název pochází až ze 17. století) při pokusu vytvořit matematickou teorii planetárních pohybů vyšetřoval valení rotační válcové plochy podél meridiánu kulové plochy a došel tak k prostorové křivce vznikající jako průnik kulové plochy a rotační válcové plochy, které mají společnou tečnou rovinu je neoddělující.

A. de Lalouvère (1600–1644) v r. 1660, o něco později G. de Roberval a nejvíce Galileiho následovník V. Viviani se v r. 1692 zabývali tělesem, které je průnikem koule o poloměru r s rotačním válcem o poloměru $\frac{r}{2}$, při čemž střed koule je na povrchu válce. Hraniční plochy koule a válce se protínají ve *Vivianiho křivce*, která je tedy (při očividné volbě soustavy souřadnic x, y, z) průnikem ploch o rovnicích

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,, \quad (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = (\frac{r}{2})^2\,.$$

Parametrické vyjádření tohoto průniku je

$$\begin{aligned} x &= r\cos^2\omega\,,\\ y &= r\cos\omega\sin\omega\,,\\ z &= r\sin\omega\,; \quad \omega < 0,\, 2\pi)\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Snadno se přesvědčíme, že stereografická projekce Vivianiho čáry na společnou tečnou rovinu kulové a válcové plochy je lemniskáta. Při jistém ω se bod (7.7) promítá ze středu projekce $[-r, 0, 0]$ do roviny $x = r$ v bod o dalších souřadnicích

$$y = 2r\,\frac{\cos\omega\sin\omega}{1+\cos^2\omega}\,, \quad z = 2r\,\frac{\sin\omega}{1+\cos^2\omega}\,.$$

Eliminací ω vychází

$$(y^2 + z^2)^2 + 4r^2(y^2 - z^2) = 0\,.$$

Povrch té části kulové plochy, která leží uvnitř válce, je $8r^2(\frac{\pi}{2} - 1)$; protože povrch koule je $4\pi r^2$, je povrch té části koule, která je mimo válec, roven $8r^2$. Je jistě pozoruhodné, že v tomto výsledku není r spojeno s iracionalitami.

Podobné tvrzení platí i pro objem té části koule, která je mimo válec. Tyto Vivianiho poznatky ověřil G. Leibniz integrálním počtem.

Stojí za povšimnutí, že soustavné studium prostorových čar 4. stupně — pokud jsou průnikem dvou kvadrik — zahajuje až G. Monge koncem 18. století a prostorových čar 3. stupně dokonce až August Möbius (1790–1868) ve své knize *Der barycentrische Calcul* z r. 1827.

Loxodroma

Pro mořeplavectví měla důležitý význam čára, která na globu protíná poledníky v témž úhlu. Podstatné zjednodušení v řízení plavby podle takové čáry převýšilo nevýhodu, že plavební dráha nebyla nejkratší (v menších zeměpisných šířkách byl rozdíl nevelký).

Čáru jako první uvažoval Pedro Nuñez (1502–1578) v knihách o mořeplavectví z let 1537, 1566 a 1573. Zabýval se jí S. Stevin v r. 1605 a W. Snell v r. 1624 ji nazval *loxodromou* (složenina z řeckých ekvivalentů k slovům kosý a běh). J. Gregory v r. 1668 se přiblížil k její rovnici a Edmund Halley (1656–1742) v r. 1686 zjistil, že stereografickou projekcí loxodromy ze severního pólu je logaritmická spirála.

Šroubovice

Šroubovici na rotační válcové ploše znali už Apollonios z Pergy, Geminos z Rhodu (1. stol. př. Kr.) a Pappos. Podrobněji ji studoval G. del Monte v r. 1615. Vyjádření souřadnic běžného bodu šroubovice se však objevuje až v 18. století.

Konická spirála

Vzniká průnikem rotační kuželové plochy s válcovou plochou, jejíž řídící křivka je Archimedova spirála a jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině řídící křivky; a to v té vzájemné poloze, kdy povrchová přímka válcové plochy jdoucí pólem spirály splývá s osou kuželové plochy. Konickou spirálou se zabýval už Pappos. Psal o ní i B. Pascal v r. 1658.

G. Geodetická křivka

Její vyšetřování je velmi úzce spojeno s rozmíškami, kterým po několik let podléhali bratři Jacob a Johann Bernoulliové[13]. Počátky tohoto studia pocházejí z let kolem roku 1700. (Různí autoři nejsou zcela shodní jak v časových, tak ve věcných údajích).

S jistou rezervou a zjednodušením se dá říci toto: v roce 1696 předložil Johann známou úlohu o brachistochroně. Za necelý rok ji rozřešil jak sám

[13] O tomto sporu píše podrobně M. Cantor: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik III*, 2. vyd., kap. 92. Pravou příčinu považuje za neznámou.

mladší Johann, tak starší Jacob, jehož řešení bylo hlubší v tom smyslu, že připouštělo významné zobecnění a zakládalo začátky variačního počtu. Navíc se Jacob odvděčil další úlohou veřejně adresovanou přímo Johannovi; šlo o jistý problém, který se dnes označuje jako *isoperimetrický*. Johann — zdá se — zapomněl na opatrnost. Vzápětí uveřejnil řešení a trval na něm i po několika Jacobových dotazech. Nato Jacob podrobil Johannovo řešení velmi tvrdé kritice a v r. 1700 předložil své vlastní řešení. Johann toto Jacobovo řešení později velmi prohloubil (autoři se různí, zda to bylo před či až po Jacobově smrti v r. 1705) a formuloval při tom úlohu vedoucí na geodetickou čáru: dva body plochy je třeba spojit čárou, která — probíhajíc na ploše — má nejkratší délku. Johann znal už důležitou vlastnost takové čáry, že totiž (pokud není přímkou) její hlavní normála splývá s normálou plochy (v našem názvosloví ovšem). Rovnici geodetické čáry publikoval Johann až v r. 1742, ale znal ji už v r. 1728; v tomto roce ji totiž uvedl v jednom ze svých dopisů. Datum, kdy Johann nalezl rovnici geodetiky, by bylo zajímavé i pro historii analytické geometrie — pro rovnici geodetiky je zapotřebí ovládnout rovnice plochy a je známo, že kolem r. 1700 byla prostorová analytická geometrie ještě v začátcích.

Úloha o brachistochroně, isoperimetrická úloha a úloha o geodetické křivce byly nejdůležitější problémy, z nichž se v 18. století tvořil variační počet.

VIII. Algebraická geometrie

Algebraická geometrie zůstává v 16. a 17. století jen u rovinných křivek. Na čelném místě je I. Newton s klasifikací čar 3. stupně a s vyšetřováním lokálního průběhu čáry.

Z Newtonovy korespondence vyplývá, že se rovinnými kubikami zabýval už v 70. letech 17. století. Ale výsledky shrnul až mnohem později v pojednání, které publikoval jako dodatek ke své knize *Opticks* v r. 1704. Jako pravděpodobný důvod, proč svou práci o rovinných kubikách připojil ke knize obsahem zcela odlišné, se udává Newtonova snaha neohrozit svou prioritu. Samostatně vyšlo pojednání až v r. 1760.

Obecnou rovnici 3. stupně v souřadnicích x a y

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+3Ex^2+6Fxy+3Gy^2+3Hx+3Jy+K=0 \quad (8.1)$$

převedl Newton transformacemi na jeden z těchto čtyř kanonických tvarů:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & xy^2+ey= \\ \text{II.} & xy= \\ \text{III.} & y^2= \\ \text{IV.} & y= \end{array}\right\} ax^3+3bx^2+3cx+d\,.$$

K nim připojil ještě v případě I charakteristickou rovnici

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{e}{4}=0$$

a v případech II - IV charakteristickou rovnici

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Klasifikaci kubik (8.1) založil pak na rozlišení vztahů mezi kořeny charakteristických rovnic. Kubické křivky rozdělil na 7 tříd, 14 rodů a celkem 72 typů. Později se ukázalo, že počet typů je třeba ještě zvětšit. Nejobsažnější je případ I, v němž Newton rozlišuje 4 třídy podle tohoto schematu pro koeficienty charakteristické rovnice:

(1) $a > 0$
(2) $a = 0,\, b \neq 0$
(3) $a = 0,\, b = 0$
(4) $a < 0$.

Zbývající 3 třídy jsou případy II – IV. Newton pak v jednotlivých třídách klasifikuje kubiky podle počtu průměrů. (Pokud středy tětiv kubiky, které jsou rovnoběžné s asymptotou, leží na přímce, tak se této přímce říká *průměr*. Kubika má buďto tři nebo jeden nebo žádný průměr, nemůže mít právě dvě asymptoty.) Dalším rozlišovacím kritériem je poloha asymptot; dalším singularity. Vidíme, že klasifikace nemá jednotný charakter.

Newtonovu klasifikaci doplnili nejdříve Jean de Gua de Malves (1712–1785) v r. 1740 a James Stirling (1696–1770) v r. 1717. Pokusy o klasifikaci pokračovaly i celé 19. století až do 20. století.

Poznamenejme, že o první klasifikaci rovinných křivek 4. stupně se pokusil Christophe de Bragelogne (1688–1744) v r. 1730 vyšetřením kanonických tvarů. V problému pokračovali L. Euler v r. 1748 a Gabriel Cramer (1704–1752) v r. 1750.

I. Newton rovněž jako první aplikoval na studium rovinných křivek nekonečné řady. Přivedl ho k tomu jeho výrazný sklon k praktickému významu matematických objevů. V traktátu napsaném nejpozději r. 1669, ale publikovaném až v r. 1685 v knize J. Wallise: *Treatise of Algebra* ... se zabýval numerickým řešením rovnic. Svou metodu ilustroval příkladem

$$x^3 - 2x - 5\,. \tag{8.2}$$

Přibližné hrubé řešení je $x = 2$. Řešení vezmeme tedy ve tvaru $x = 2 + p$ při p blízkém 0 a po dosazení do (8.2) pro p dostaneme

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0\,. \tag{8.3}$$

Zanedbáme-li druhou a třetí mocninu p, vyjde $p = 0{,}1$. Položíme $p = 0{,}1 + q$ při q blízkém 0 a po dosazení do (8.3) dostaneme — při zanedbání druhé a třetí mocniny — $11{,}23q + 0{,}061 = 0$. Tedy $q = -0{,}005\,4\ldots$, takže $x \doteq 2 + 0{,}1 - 0{,}005\,4 = 2{,}094\,5$.

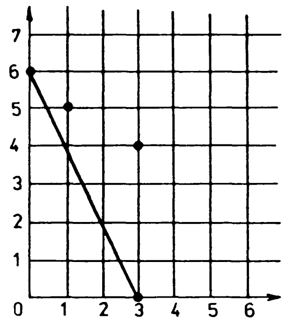
Touto Newtonovou metodou se zabýval E. Halley v letech 1687 a 1694. Poukázal i na její nedostatky: neposkytuje představu o přesnosti řešení a není zaručena jeho konvergence.

Newton svou metodu rozšířil i na rovnice s dvěma proměnnými x a y. Postup opět ilustroval příkladem, a to rovnicí

$$y^6 - 5xy^5 + x^3y^4 - 7x^2y^2 + x^4 + 6x^3 = 0. \tag{8.4}$$

V ní je x nejvýš v mocnině 4, y nejvýš v mocnině 6. Nakreslíme (viz obr. 19) rovnoběžky $x = 0; 1; \ldots ; 4$ a $y = 0; 1; \ldots ; 6$ a v pravoúhelníku $\langle 0,4\rangle \times \langle 0,6\rangle$ s šachovnicí vyznačíme body [viz exponenty při x a y ve členech nalevo v (8.4)] o souřadnicích [0, 6], [1, 5], [3, 4], [2, 2], [4, 0], [3, 0]. Všechny tyto body leží v polorovině s hraniční přímkou ve spojnici bodů [0, 6] a [3, 0]; na této spojnici leží ještě bod [2, 2]. Z rovnice (8.4) ponecháme jen ty členy, z nichž vznikly tyto tři body:

$$y^6 = 7x^2y^2 + 6x^3 = 0.$$



Obr. 19

Levá strana této rovnice je

$$(y^2 - x)(y^2 - 2x)(y^2 + 3x),$$

takže pro $x \geqslant 0$ vycházejí z (8.5) tyto reálné možnosti:

$$y = \pm\sqrt{x}, \quad y = \pm\sqrt{2x}.$$

Každá z nich vede k vyjádření y

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \ldots \quad , y = -x^{\frac{1}{2}} + \ldots \quad , y = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \ldots \quad , y = -\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \ldots \quad ,$$

v němž členy vyznačené tečkami by se zjistily způsobem analogickým hořejšímu.

Geometricky znamená rovnice (8.4) křivku 6. stupně, která má počátek za trojný bod s jedinou tečnou v ose y. Rovnice (8.6) pak udávají přibližně průběh uvažované čáry v okolí počátku; mluvíme o *větvích*. Dostali jsme se tak k Newtonovu vyšetřování singulárních bodů.

Příklad je velmi instruktivní; pokud jej neinterpretujeme geometricky, pak instruktivnost ztrácí. Je to způsobeno jedinou tečnou v singulárním trojném bodě. Pokud by tečny takového bodu byly různé (a ten bod počátkem), pak místo silně vytažené úsečky na obr. 19 bychom dostali lomenou konvexní čáru, které se říká *Newtonův polygon*. Pro seznámení s ním odkazuji na učebnici B. Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie*, Praha 1948.

Newtonovým polygonem se zabývali J. de Gua de Malves v r. 1741, Abraham Kästner (1719–1800) v r. 1743, Nicolaus Bernoulli (1687–1759) v r. 1745, C. Maclaurin v r. 1748, G. Cramer v r.1750 aj.

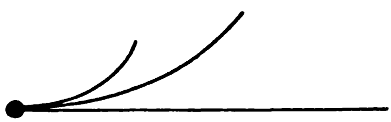
I. Newton v r. 1680 též dokázal, že abscisy průsečíků dvou rovinných algebraických křivek stupňů p a q jsou kořeny algebraické rovnice stupně nejvýš pq. Tím zpřesnil starší poznatek, že ony křivky se mohou protnout v pq bodech, a současně vytvořit základ pro další studium této věty, které se ve druhé polovině 18. století značně zintenzívnělo.

Studium prostorových algebraických křivek a studium ploch začíná ještě později; viz oddíl VII, část F.

IX. Diferenciální geometrie

Diferenciální geometrii v 16. a 17. století musíme rozlišit na diferenciálně geometrické studium rovinných čar a na studium prostorových útvarů.

Vyšetřování rovinných čar je tak úzce spojeno s vývojem diferenciálního počtu, že je nelze oddělit. Tečna rovinné křivky, kružnice a poloměr křivosti — vše z hlediska diferenciálního počtu zajímaly všechny jeho předchůdce, tvůrce a ovšem i pokračovatele. Projevovalo se to též rozsáhlým studiem speciálních křivek, viz oddíl VII.



Obr. 20

Zvláštní místo však zaujímá kniha G. de L'Hospitala: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (*Analysa nekonečně malých (veličin) pro vyšetřování křivých čar*), 1696, která byla první — a nadlouho jedinou — začátečníkům přístupnou učebnicí diferenciálního počtu a která se velmi věnovala rovinným křivkám. Tak třeba se v ní objevuje „point de rebroussement de la seconde sorte" — bod vratu druhého druhu (v jeho okolí jsou obě větve křivky po téže straně jeho tečny — viz obr. 20). Je však třeba říci, že za vědeckým obsahem knihy stál Johann Bernoulli, za metodickým zpracováním G. L'Hospital sám. V roce 1920 byl objeven rukopis Bernoulliových přednášek v Paříži 1691–92, které l'Hospital metodicky uzpůsobil a převzal; z korespondence Bernoulli — l'Hospital vyplývá, že i objev bodu vratu druhého druhu je třeba přičíst Bernoulliovi.

Odhlédneme-li od tohoto spojení diferenciální geometrie s diferenciálním počtem, zasahuje diferenciální geometrie pouze do závěru 17. století, avšak velmi významnou partií, totiž studiem geodetických křivek.

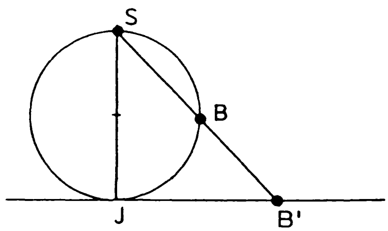
Předpokladem pro aplikaci diferenciálního počtu na prostorové útvary bylo rozvinutí analytické geometrie. První takovou aplikací bylo studium čáry, která na dané ploše je nejkratší spojnicí dvou jejích bodů A, B.[14] V dopisu de l'Hospitalovi z roku 1697 Johann Bernoulli napsal rovnici geodetické křivky dané plochy; způsob, jak k ní došel, vyložil a publikoval o několik desetiletí později. Také Clairautovy a Eulerovy práce o geodetických čarách se datují až z třetího desetiletí 18. století.

Diferenciální geometrie prostorových čar a ploch počíná se tak až později v 18. století.

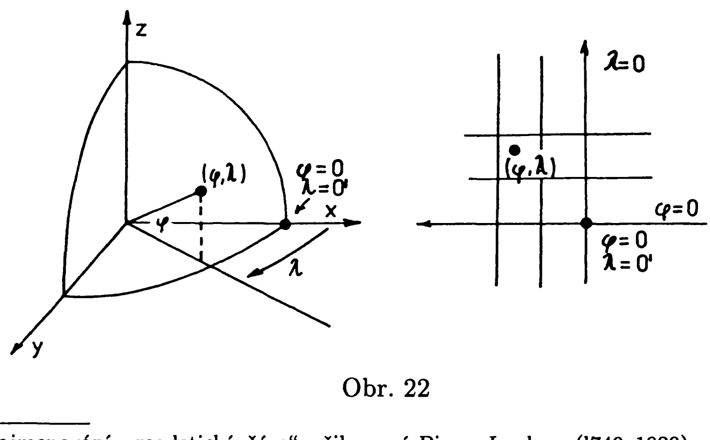
X. Geodetické aplikace geometrie

A. Matematická kartografie

Její počátek je ve známé stereografické projekci, kterou už ve 2. století před Kristem popsal Hipparchos (obr. 21): ze severního pólu S globu se jeho body B promítají na tečnou rovinu v jižním pólu J v body B'. Zobrazení zachovává úhly a ty kružnice na kulové ploše, které neprocházejí (procházejí) pólem S, převádí v kružnice (v přímky). Až do druhé poloviny 16. století se na námořních mapách užívalo zobrazení, jehož autorem je Marinos z Tyru (1. stol.) (obr. 22).



Obr. 21



Obr. 22

[14]Pojmenování „geodetická čára“ užil první Pierre Laplace (1749–1829) ve 2. dílu své *Mécanique céleste* z roku 1798-99 speciálně pro zemský elipsoid.

Bod o zeměpisné šířce $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zeměpisné délce $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$ na kulové ploše o poloměru R přechází (užiji současného pojmenování) v bod o pravoúhlých souřadnicích $x = R\lambda$, $y = R\varphi$ v rovině. Obrazy rovnoběžek a poledníků tvoří čtvercovou síť; proto se Marinova mapa nazývala ***kvadratická***. Obsahovala zárodek nejjednodušší souřadnicové soustavy. V starém věku přivedl kartografii k vrcholu Klaudios Ptolemaios (okolo 90–asi 168); je původcem zobrazení kulové plochy na kuželovou plochu, která se kulové plochy dotýká podél rovnoběžky.

Počátkem 16. století se objevují nová zobrazení. Z nich předělem byla mapa, jejíž vytvoření a vlastnosti v roce 1569 popsal — ale nedokázal — Mercator (Gerhard Kremer 1512–1594). Jedná se o konformní zobrazení globu na válcovou plochu dotýkající se jej podél rovníku. Meridiány se zobrazují jako přímky, rovnoběžky globu přecházejí v kružnice válcové plochy. Mercator neodůvodnil svůj vyběr té kružnice na válci, která je obrazem jisté rovnoběžky na globu. Údaje, kdo první vytvořil matematickou teorii Mercatorovy projekce, se v literatuře velmi liší jmény i dobou; jako poslední se udává až v r. 1695 astronom E. Halley, známý v souvislosti s kometou po něm pojmenovanou.

Bod jednotkové kulové plochy se zeměpisnými souřadnicemi φ a λ a tedy pravoúhlými prostorovými souřadnicemi

$$\boldsymbol{x}\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\lambda \\ y = \cos\varphi\sin\lambda \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

se zobrazuje v ten bod zmíněné válcové plochy, který má prostorové souřadnice

$$\boldsymbol{X}\begin{cases} X = \cos\lambda \\ Y = \sin\lambda \\ Z = \ln\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\,. \end{cases}$$

Po rozvinutí válcové plochy do roviny bude se jednat o bod s rovinnými pravoúhlými souřadnicemi

$$\boldsymbol{\xi}\begin{cases} \xi = \lambda \\ \eta = \ln\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\,. \end{cases}$$

Jednoduchý výpočet ukáže, že Gaussovy koeficienty jsou

$$e = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\varphi} = 1 \qquad f = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\lambda} = 0 \qquad g = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\lambda} = \cos^2\varphi$$

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \qquad F = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\lambda} = 0 \qquad G = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial\lambda} = 1$$

$$\epsilon = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \qquad \varphi^* = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\lambda} = 0 \qquad \gamma = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial\lambda} = 1$$

(v posledním řádku je u prostředního Gaussova koeficientu hvězdička pro odlišení od zeměpisné šířky φ). Tudíž první základní forma na kulové ploše má tvar

$$ds^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 = d\varphi^2 + (\cos\varphi)^2 d\lambda^2$$

a na válcové ploše nebo jejím rozvinutí

$$\left.\begin{aligned} dS^2 &= Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 \\ d\sigma^2 &= \epsilon d\varphi^2 + \gamma d\lambda^2 \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi^2 + d\lambda^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[d\varphi^2 + (\cos\varphi)^2 d\lambda^2\right].$$

Je tedy

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}\, ds^2\,,$$

což znamená, že Mercatorovo zobrazení je konformní.

Ačkoliv se v Mercatorově projekci zkreslení ve větších zeměpisných šířkách prudce zvětšuje, zachování úhlů je výhoda, která ono zkreslení vyvažuje. Mercatorovy mapy znamenaly ohromný pokrok v nautice, protože umožňovaly snadno určit stabilní úhel, v němž dráha lodi plavící se z místa A do místa B protíná poledníky. Lodě se tak plavily z A do B nikoliv po nejkratší cestě (geodetice), ale po čáře, pro niž W. Snell v r. 1624 zavedl z řečtiny pocházející pojmenování „loxodroma“.

Nicolas Sanson (1600–1667) navrhl zobrazení kulové plochy do roviny, které zachovává obsah. Bod globu o zeměpisné šířce φ a délce λ se zobrazí v bod roviny s pravoúhlými souřadnicemi

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} \xi = \varphi \\ \eta = \lambda\cos\varphi\,. \end{cases}$$

Obrazy rovnoběžek jsou rovnoběžné úsečky, obrazy meridiánů jsou oblouky sinusoid. Gaussovy koeficienty v rovině zobrazení jsou

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\varphi} = 1 + \lambda^2\sin^2\varphi\,, \\ \varphi^* &= \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\lambda} = -\lambda\cos\varphi\sin\varphi\,, \\ \gamma &= \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\lambda}\cdot\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\lambda} = \cos^2\varphi\,, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{vmatrix} \epsilon & \varphi^* \\ \varphi^* & \gamma \end{vmatrix} = \cos^2\varphi\,.$$

Z rovnic pro Gaussovy koeficienty (viz předchozí strana) plyne, že na kulové ploše je

$$\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = \cos^2\varphi\,.$$

Vidíme, že plošný element se při uvažovaném zobrazení vskutku reprodukuje.

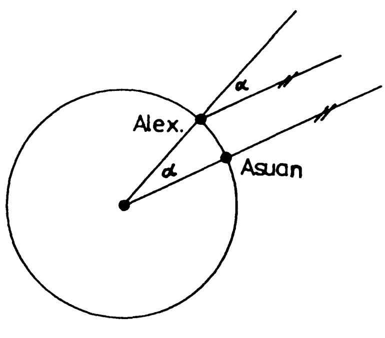
Další významný krok v matematické kartografii učinil až v 18. století J. Lambert studiem konformních zobrazení.

B. Vyšší geodézie (tvar a rozměry Země)

Jako první se o určení poloměru Země jako koule pokusil Eratosthenes z Kyreny (asi 276–194 př. Kr.). Využil k tomu vztahu mezi poloměrem R kružnice, délkou s jejího oblouku a velikostí α mu příslušného středového úhlu (v obloukové míře)

$$s = R \cdot \alpha . \tag{10.1}$$

Eratosthenes zvolil oblouk hlavní kružnice mezi Asuánem a Alexandrií (obr. 23) — přibližně na témže meridiánu – a délku tohoto oblouku odhadl z doby, kterou potřebovaly karavany, aby údolím Nilu dorazily z Asuánu do Alexandrie. V dnešní míře mu vyšlo $s \doteq 900$ km, ačkoliv skutečná vzdálenost je asi o 100 km menší. Úhel α je roven rozdílu zeměpisných šířek Alexandrie a Asuánu. Asuán leží na obratníku Raka, při letním slunovratu dopadají na něj sluneční paprsky kolmo; ale v Alexandrii v tu dobu svislá tyč vrhá stín a úhel slunečních paprsků se svislicí odhadl Eratosthenes na 1/50 plného úhlu, tedy $\alpha = 2\pi/50 \doteq 6,3/50 = 0,126$. Ze vztahu (10.1) pak vychází $R \doteq 7\,150$km, což je sice asi o 800 km více než ve skutečnosti, ale i tak to byl výsledek skvělý.



Obr. 23

Eratosthenova myšlenka byla — v různých modifikacích a zpřesněních ovšem — základem geometrických metod pro určování rozměrů a tvaru Země, a to po dobu zhruba dvou tisíciletí.

První měření v Eratosthenově duchu v Evropě podnikl francouzský matematik — později profesor mediciny na Sorboně — Jean Fernel (1497–1558) v r. 1525. Vzdálenost mezi Paříží a severně ležícím městem Amiens odhadl počítáním otoček kola kočáru, ve kterém cestoval; rozdíl zeměpisných šířek určil astronomicky. Fernelův výsledek — zřejmě jen díky náhodě — se málo lišil od 10 000 km pro zemský kvadrant.

G. Rhaeticus, propagátor Koperníkových myšlenek, věnoval celoživotní úsilí sestavení trigonometrických tabulek. Pro geometrické výpočty měl ohromný význam objev logaritmů v druhé dekádě 17. století, protože usnadňovaly propočítání trigonometrických sítí.

Je v oblasti domněnek, kdo vymyslil triangulaci. Snad jí užil už Tadeáš Hájek z Hájku (1525–1600) při mapování pražského okolí v letech 1556–1553.

Naproti tomu se s jistotou ví, že W. Snell jako první využil triangulace k výpočtu délky oblouku na zemském meridiánu. Holandská města Alkmaar a Bergen of Zoom, ležící v blízkosti meridiánu procházejícího městem Leiden a vzdálená asi 130 km („města" byla ovšem zúžena na kostelní věže v nich), spojil v letech 1615–17 sítí 33 trojúhelníků. V nich změřil úhly a dvě strany — teoreticky by bylo stačilo změřit jen jednu stranu. Pak už výpočtem zjistil délky ostatních stran a promítnutím do leidenského meridiánu i délku jeho oblouku. Takto vyšel Snellovi zemský kvadrant o málo kratší než 10 000 km.

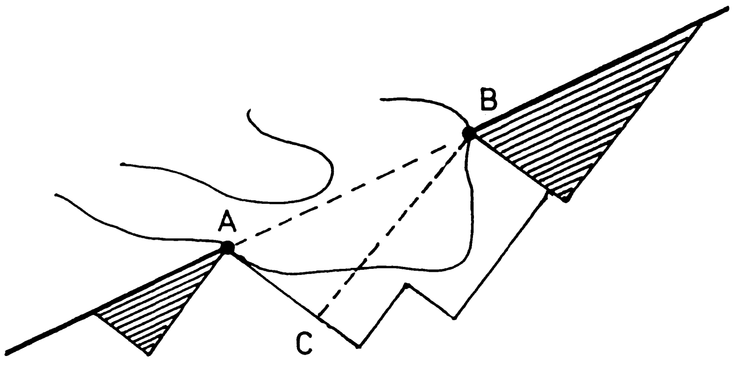
Kolem roku 1670 přeměřil pomocí triangulace oblouk Paříž – Amiens Jean Picard (1620–1682). P. De la Hire v r. 1680 oblouk prodloužil na sever až k Dunkerque.

Koncem 17. a začátkem 18. století měřili otec Giovanni Cassini (1625–1712) a syn Jacques (1677–1756) oblouk pařížského poledníku od Dunkerque až k úpatí Pyrenejí. V důsledku měřických chyb došli k chybnému závěru, že v severním směru se délka šířkového stupně meridiánu zmenšuje, což by znamenalo, že Země má tvar protáhlého elipsoidu. Spor, který z toho vznikl vzhledem k fyzikálním teoriím vedoucím ke zploštělému elipsoidu, rozhodly až dvě expedice, vyslané francouzskou Akademií v první polovině 18. století k šířkovým měřením do Laponska a na území dnešního Ekvadoru, tedy do oblastí velmi odlišných zeměpisných šířek.

C. Geodézie (vyměřování)

Praktická geometrie má prastarou tradici. Stačí připomenout, co Heron Alexandrijský (1. stol. př. Kr.), shromáždil ve svém spisu o dioptře: od popisu zaměřovacího přístroje — Řekové mu říkali *dioptra* — až k řadě zeměměřických úloh. Tak třeba geometrický postup při ražení tunelu mezi body A a B (obr. 24 na následující straně) popisuje Heron takto: body A a B se spojí pravoúhlým polygonovým pořadem, obcházejícím horu, jíž má být tunel prokopán. Z délek stran pořadu se určí délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka a z nich se sestrojí trojúhelníky — na obr. vyšrafované — mu podobné; jejich přepony už určují směry ražení z bodů A a B.

V 16. století, za válek mezi městskými republikami na Apeninském poloostrově, se zeměměřictví zapojilo i do vojenské techniky. N. Tartaglia, kterého známe z řešení rovnic 3. stupně, se zabýval též vnější balistikou a pro sklon hlavně zkonstruoval ve 30. letech 16. století dělostřelecký kvadrant, který se brzy stal běžnou geodetickou pomůckou pro měření úhlů ve vertikální rovině.



Obr. 24

Gemma Frisius (Regnier 1508–1555) ve svém spisu vydaném v Antverpách v r. 1533 popsal způsob, kterým lze určit polohu místa měřením osnovy horizontálních úhlů ze dvou stanic se známými zeměpisnými souřadnicemi; za tyto stanice volil věže v Antverpách a v Bruselu. Frisiova metoda je přinejmenším náznak Snellovy triangulace z doby asi o 90 let pozdější.

V 16. století se geometrie velmi využívala při fortifikačních stavbách, jejichž půdorys byl zpravidla pravidelný mnohoúhelník. Ve vrcholech byly buďto okrouhlé věže (bašty), z nichž bylo možno krýt i prostor těsně před pevnostní zdí, nebo vyvýšené plošiny pro dělostřelectvo (bastiony). Vynálezcem takové soustavy byl italský vojenský inženýr Michele Sanmicheli (1484–1559). Vyměřování a stavbu pevností popisoval A. Manesson-Mallet (viz oddíl II C). Při zobrazování užíval kavalírní perspektivy (viz oddíl IV B).

LITERATURA

Nejsou zahrnuty knihy citované v textu, zvláště v úvodu.

1. Borodin, A. N., Bugaj, A. S., *Biografičeskij slovar dějatělej v oblasti matematiki*, Kijev, 1979.
2. Brocard, H., Lemoyne, T., *Courbes géométriques remarquables, planes et gauches*, Paris, I. 1967, II. 1967, III. 1970.
3. Cajori, E., *A History of Mathematics*, 2. vyd., New York, 1924.
4. Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, II. (1200–1666), 2. vyd., 1913; III. (1668–1758), 2. vyd., 1901.
5. Chasles, M., *Aperçy historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 2. vyd., Paris, 1875.
6. Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods*, Oxford, 1940.
7. Fiala, F., *Matematická kartografie*, Praha, 1955.
8. Hofmann, J., *Geschichte der Mathematik*, Berlin, I. 2. vyd. 1963, II. 1957, III. 1957.
9. Honl, I., Procházka, E., *Úvod do dějin zeměměřictví*, Praha, *I – Starověk*, 1. vyd. 1976, *II – Středověk*, 1. vyd. 1978, *III – Novověk*, 1. část 1. vyd. 1980, *IV – Novověk*, 2. část 1. vyd. 1982.
10. Hoppe, J., *Johannes Kepler*, 4. vyd., Leipzig, 1982.
11. Horský, Z., *Kepler v Praze*, Praha, 1980.
12. Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Praha, 1977, ruský originál 1961.
13. Kolman, A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha, 1968, ruský originál Moskva 1961.

14. Kuska, F., *Matematická kartografia*, Bratislava, 1960.
15. Loria, G., *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig–Berlin, 2. vyd., I. 1910, II. 1911.
16. Loria, G., *Curve sghembe speciali algebriche e transcendenti*, Bologna, I., II. 1925.
17. Matvijevskaja, G. P., *Rene Dekart*, Moskva, 1976.
18. Matvijevskaja, G. P., *Albert Djurer - učenyj*, Moskva, 1989.
19. Nádeník, Z., *Geometrie a geodézie. Od Pythagora k současnosti*, Pokroky mat., fyz. a astr. **16** (1971), 169–180.
20. Nikiforowski, W. A., Freiman, L. S., *Wegbereiter der neuen Mathematik*, Moskau–Leipzig, 1978, ruský originál 1976.
21. Perrier, G., *Petite histoire de la géodésie*, Paris, 1939, německý překlad Bamberg 1950.
22. Schreiber, P., *Euklid*, Leipzig, 1987.
23. Schröder, E., *Kartenentwürfe der Erde. Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht*, Leipzig, 1988.
24. Smogorževskij, A. S., Stočova, E. S., *Spravočnik po teorii ploskich krivych tretjevo porjadka*, Moskva, 1961.
25. Tarasov, B. N., *Paskal*, Moskva, 1979.
26. Teixeira, F. G., *Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches*, Coǐmbre, I. 1908, II. 1909, III. 1915.
27. Tropfke, J., *Geschichte der Elementarmathematik*, II. díl: *Geometrie, ...* , Leipzig, 1903.
28. Wieleitner, H., *Zur Erfindung der analytischen Geometrie.*, Zeitschrift für math. - naturwiss. Unterricht **47** (1916), 414–426.
29. Wieleitner, H., *Istorija matematiki ot Dekarta do serediny XIX. stoletija*, Moskva, 1966, překlady německých originálů.
30. Wussing, H., Arnold, W. (Ed.), *Biographien bedeutender Mathematiker*, Berlin, 3. vyd. 1983.
31. Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig, 1903.