III. ALLGEMEINE TRANSFORMATIONSTHEORIE

Bisher begegneten wir dem Transformationsproblem ausschließlich bei oszillatorischen Differentialgleichungen (q), (Q) (§ 13, Nr. 5, § 20, Nr. 6).

In diesem III. Abschnitt werden wir uns mit dem Transformationsproblem bei beliebigen Differentialgleichungen (q), (Q) befassen. Unsere Untersuchungen sind in zwei Kapitel eingeteilt, je nach den Forderungen, die an die transformierenden Funktionen gestellt werden. Im 1. Kapitel geht es um allgemeine Transformationen, bei denen die Transformierende im allgemeinen durch keine Bedingungen eingeschränkt ist. Das 2. Kapitel enthält die Theorie der sogenannten vollständigen Transformationen. Diese sind dadurch charakterisiert, daß die Definitionsintervalle und Wertevorräte ihrer Kerne mit den Definitionsintervallen der Differentialgleichungen (q), (Q) übereinstimmen.

A. ALLGEMEINE TRANSFORMATIONEN

In diesem Kapitel wird zunächst die spezielle Form der Transformationsformel § 11, (11) begründet. Ferner wird eine Transformationstheorie, in deren Mittelpunkt Existenz- und Eindeutigkeitsfragen über Lösungen der Differentialgleichung (Qq) stehen, für allgemeine Differentialgleichungen (q), (Q) entwickelt.

§ 22. Begründung der speziellen Form der Transformationsformel

1. Satz über Transformationen von Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die spezielle Form der Transformationsformel § 11, (11), die in bezug auf die Lösungen Y, y der Differentialgleichungen (Q), (q) linear ist, mag vielleicht als willkürlich und durch die zur Lösung des Transformationsproblems angewandten Methoden bedingt erscheinen. Die Frage jedoch, ob diese Transformationsformel nicht durch eine allgemeinere, mit einer geeigneten Funktion f gebildete Beziehung von der Form

$$y(t) = f\big(t,\, Y[X(t)]\big)$$

ersetzt werden könnte, ist im allgemeinen zu verneinen.

P. Stäckel [J. reine angew. Math. **111** (1893)], S. Lie (Leipziger Ber. 1894) und E. J. Wilczynski [Amer. J. Math. **23** (1901)] haben unter Anwendung verschiedener Methoden gezeigt, daß im allgemeinen die lineare Form der Transformationsformel § 11, (11) die einzig mögliche ist.

Wir wollen diesen Sachverhalt in dem folgenden Satz beschreiben.

Der Wortlaut dieses an die Jacobische Form der betrachteten Differentialgleichungen angepaßten Satzes und der Beweis wurden uns von Frau Z. Mikolajska-Młak zur Verfügung gestellt.

Satz. *Es seien s, S dreidimensionale Räume der Punktkoordinaten* (t, y, z), (T, Y, Z), *wobei*

$$a < t < b; \quad -\infty < y, z < \infty \quad \textit{und} \quad A < T < B; \quad -\infty < Y, Z < \infty$$

ist.

Ferner seien

$$\left.\begin{aligned} t &= x(T), \\ y &= f(t, Y, Z), \\ z &= g(t, Y, Z), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathfrak{t})$$

$$\left.\begin{aligned} T &= X(t), \\ Y &= F(t, y, z), \\ Z &= G(t, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathfrak{T})$$

schlichte und zueinander inverse Abbildungen des Raumes S auf s bzw. des Raumes s auf S.

Wir setzen voraus:

1⁰. *die Abbildungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{T}$ sind von der Klasse C_2, und es bestehen für alle Werte* $\in (a, b)$, $T \in (A, B)$; $-\infty < Y, Z < \infty$ *die Beziehungen*

$$\dot{x}(T) \neq 0; \quad f(t, 0, 0) = 0; \quad f_Y(t, Y, Z) \neq 0; \quad g_Z(t, Y, Z) \neq 0;$$

2⁰. *Die Abbildung $\mathfrak{t}$ überführt die Lösungen jedes Systems von Differentialgleichungen mit stetigem Koeffizienten Q von der Form*

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y} &= Z, \\ \dot{Z} &= Q(T)\, Y \end{aligned}\right\} \qquad (Q)$$

in solche eines analogen Systems

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= q(t)\, y. \end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

Unter diesen Voraussetzungen hat die Abbildung $\mathfrak{t}$ die folgende lineare Form:

$$\begin{aligned} t &= x(T), \\ y &= w(t)\, Y, \\ z &= w'(t)\, Y + w(t)\, X'(t)\, Z. \end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachten ein System (Q) und eine seiner Lösungskurven $\mathfrak{K}$: $Y(T)$, $Z(T)$. Das Bild $\mathfrak{k}$ dieser letzteren in der Abbildung $\mathfrak{t}$ hat die parametrischen Koordinaten

$$\mathfrak{k}\colon \quad y(t) = f\big(t, Y[X(t)], Z[X(t)]\big); \quad z(t) = g\big(t, Y[X(t)], Z[X(t)]\big).$$

Nach 2⁰ ist $\mathfrak{k}$ eine Lösungskurve des Systems (q). Wir haben also

$$z(t) = y'(t) = f_t(t, Y, Z) + f_Y(t, Y, Z)\, \dot{Y}[X(t)]\, X'(t) + f_Z(t, Y, Z)\, \dot{Z}[X(t)]\, X'(t),$$

$$q(t) \cdot y(t) = z'(t) = g_t(t, Y, Z) + g_Y(t, Y, Z)\, \dot{Y}[X(t)]\, X'(t) + g_Z(t, Y, Z)\, \dot{Z}[X(t)]\, X'(t)$$

und ferner, da Y, Z dem System (Q) genügen,

$$z(t) = f_t(t, Y, Z) + f_Y(t, Y, Z)\, Z[X(t)]\, X'(t) + f_Z(t, Y, Z)\, Q[X(t)]\, Y[X(t)]\, X'(t),$$

$$\begin{aligned} q(t)\cdot y(t) = g_t(t, Y, Z) &+ g_Y(t, Y, Z)\, Z[X(t)]\, X'(t) \\ &+ g_Z(t, Y, Z)\, Q[X(t)]\, Y[X(t)]\, X'(t). \end{aligned}$$

Diese Beziehungen bestehen für jede Lösungskurve $\mathfrak{K}$ des Systems (Q). Da durch jeden Punkt $(T, Y, Z) \in S$ eine Lösungskurve von (Q) hindurchgeht, haben wir für $t \in (a, b)$ und alle Werte Y, Z

$$g(t, Y, Z) = f_t(t, Y, Z) + f_Y(t, Y, Z)\, Z\cdot X'(t) + f_Z(t, Y, Z)\, Q[X(t)]\, Y\cdot X'(t), \quad (1)$$

$$q(t)\cdot f(t, Y, Z) = g_t(t, Y, Z) + g_Y(t, Y, Z)\, Z\cdot X'(t) + g_Z(t, Y, Z)\, Q[X(t)]\, Y\cdot X'(t). \quad (2)$$

In diesen Formeln kann (nach 2°) die (stetige) Funktion Q beliebig gewählt werden. Daraus folgt

$$f_Z(t, Y, Z)\, Y\cdot X'(t) = 0$$

und ferner, da (nach 1°) $X'(t) \neq 0$ ist,

$$f_Z(t, Y, Z) = 0.$$

Die Funktion f hängt also von Z nicht ab:

$$f(t, Y, Z) = h(t, Y). \quad (3)$$

Nun haben wir aus (1) und (3)

$$g(t, Y, Z) = h_t(t, Y) + h_Y(t, Y)\, Z\cdot X'(t)$$

und ferner

$$g_t(t, Y, Z) = h_{tt}(t, Y) + h_{tY}(t, Y)\, Z\cdot X'(t) + h_Y(t, Y)\, Z\cdot X''(t),$$

$$g_Y(t, Y, Z) = h_{tY}(t, Y) + h_{YY}(t, Y)\, Z\cdot X'(t),$$

$$g_Z(t, Y, Z) = h_Y(t, Y)\cdot X'(t).$$

Diese Beziehungen ergeben, im Hinblick auf (2),

$$\begin{aligned} q(t)\cdot h(t, Y) = h_{tt}(t, Y) &+ 2h_{tY}(t, Y)\, Z\cdot X'(t) + h_{YY}(t, Y)\, Z^2\cdot X'^2(t) \\ &+ h_Y(t, Y)\left[Z\cdot X''(t) + X'^2(t)\, Y\cdot Q[X(t)]\right]. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch zweimalige partielle Differentiation nach Z

$$2h_{tY}(t, Y)\cdot X'(t) + 2h_{YY}(t, Y)\, Z\cdot X'^2(t) + h_Y(t, Y)\cdot X''(t) = 0,$$

$$h_{YY}(t, Y) = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktion h in bezug auf Y linear ist:

$$h(t, Y) = w(t)\, Y + a(t).$$

Aus 1^0 folgt $a(t) = 0$, und somit ergibt sich die lineare Form der Funktion f:

$$f(t, Y, Z) = w(t) \cdot Y.$$

Schließlich erhalten wir aus (1)

$$g(t, Y, Z) = w'(t)\, Y + w(t)\, X'(t)\, Z.$$

Damit ist der Beweis beendet.

2. Einführung der Differentialgleichung (Qq). Wir betrachten zwei Differentialgleichungen (q), (Q) in beliebigen Definitionsintervallen $j = (a, b)$, $J = (A, B)$:

$$y'' = q(t)\, y; \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)\, Y. \tag{Q}$$

Es sei ($[w, X] =$) $w(t)$, $X(t)$ eine Transformation der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q). Die Funktionen w, X sind also in einem Teilintervall $i \subset j$ erklärt und haben die in § 11, Nr. 2 angeführten Eigenschaften 1.–3. Insbesondere ist also der Wertevorrat von X, $I = X(i)$, ein Teilintervall von $J: I \subset J$.

Wir wissen (§ 11, Nr. 2), daß die Transformierende X in ihrem Definitionsintervall i die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = q(t) \tag{Qq}$$

befriedigt. Ferner wissen wir, daß der Multiplikator w von $[w, X]$ durch die Funktion X bis auf eine multiplikative Konstante k ($\neq 0$) im Sinne der Formel § 11, 12) eindeutig bestimmt ist.

§ 23. Transformationseigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (Qq)

1. Beziehungen zwischen Lösungen der Differentialgleichungen (Qq), (qQ), (qq), (QQ).

Wir interessieren uns nur für reguläre Lösungen dieser Differentialgleichungen, d. h. für Lösungen $X \in C_3$ mit nichtverschwindender Ableitung X'. Ist also X eine in einem Teilintervall k von j bzw. J erklärte Lösung einer von diesen Differentialgleichungen und $K = X(k)$ ihr Wertevorrat, so existiert die im Intervall K erklärte zu X inverse Funktion $x \in C_3$; sie hat in diesem Intervall eine stets von Null verschiedene Ableitung $\dot{x}$. Der Wertevorrat von x ist natürlich das Intervall k: $x(K) = k$. Wir bezeichnen je zwei den Beziehungen $T = X(t)$, $t = x(T)$ genügende Zahlen $t \in k$, $T \in K$ (in bezug auf die entsprechende Differentialgleichung) als homolog.

1. Es sei $X(t)$, $t \in i$ ($\subset j$), eine Lösung der Differentialgleichung (Qq). Dann stellt die zu X inverse Funktion $x(T)$, $T \in I$ $\big(= X(i) \subset J\big)$, eine Lösung der Differentialgleichung (qQ) dar.

Beweis. Es seien $t \in i$, $T \in I$ zwei homologe Zahlen.
Da X eine Lösung von (Qq) ist, gilt an der Stelle t

$$-\frac{\{X, t\}}{X'} + Q(X)\,X' = \frac{q(t)}{X'}. \tag{1}$$

Daraus folgt im Hinblick auf die Formeln § 1, (10), (6)

$$\frac{\{x, T\}}{\dot{x}} + Q(T)\,\frac{1}{\dot{x}} = q(x)\,\dot{x}$$

und ferner

$$-\{x, T\} + q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T).$$

Damit ist der Beweis beendet.

2. Es seien X, x zueinander inverse Lösungen der Differentialgleichungen (Qq), (qQ) mit den Definitionsintervallen i $(\subset j)$, I $(\subset J)$. Dann bestehen an je zwei homologen Stellen $t \in i$, $T \in I$ die symmetrischen Beziehungen

$$Q(X)\,X' - \frac{1}{2}\,\frac{\{X, t\}}{X'} = q(x)\,\dot{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\{x, T\}}{\dot{x}}, \tag{2}$$

$$Q(X)\,X' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X'}\right)'' = q(x)\,\dot{x} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot}. \tag{3}$$

In der Tat, zunächst haben wir die Formel (1). Daraus folgt im Hinblick auf § 1, (6)

$$Q(X)\,X' - \frac{1}{2}\,\frac{\{X, t\}}{X'} = q(x)\,\dot{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\{X, t\}}{X'} \tag{4}$$

und ferner nach § 1, (10) die Beziehung (2).

Die Formel (3) erhalten wir aus (4) und § 1, (16).

3. Wir übernehmen die obige Bedeutung von X, x. Es seien f, F die mit beliebigen Konstanten a_0, a_1; A_0, A_1 in den Intervallen i, I gebildeten Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{X'(t)} + \int\limits_{X(t_0)}^{X(t)} [t - x(\eta)]\,Q(\eta)\,d\eta, \\ F(T) &= A_0 + A_1 T + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\dot{x}(T)} + \int\limits_{x(T_0)}^{x(T)} [T - X(\mathsf{H})]\,q(\mathsf{H})\,d\mathsf{H}; \end{aligned}\right| \tag{5}$$

$t_0 \in i$, $T_0 \in I$ bezeichnen beliebig gewählte homologe Zahlen.

Dann gilt an je zwei homologen Stellen $t \in i$, $T \in I$ die Beziehung

$$f''(t) = \ddot{F}(T). \tag{6}$$

Der Beweis folgt aus der obigen Formel (3).

Um den folgenden Satz einfacher formulieren zu können, wollen wir die Funktionen Q, q mit Q_1, Q_2 und die Differentialgleichungen (QQ), (Qq), (qQ), (qq) wie folgt bezeichnen: (Q_{11}), (Q_{12}), (Q_{21}), (Q_{22}).

4. Es seien X, Y beliebige Lösungen der Differentialgleichungen $(\mathrm{Q}_{\alpha\beta})$, $(\mathrm{Q}_{\beta\gamma})$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$. i, k seien die Existenzintervalle der Funktionen X, Y und I, K die Wertevorräte dieser letzteren. Ferner sei $i \cap K \neq \emptyset$, so daß die zusammengesetzte Funktion $Z = XY$ in einem gewissen Intervall $\bar{k}$ $(\subset k)$ definiert ist.

Wir zeigen, daß die Funktion Z in dem Intervall $\bar{k}$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\mathrm{Q}_{\alpha\gamma})$ ist.

In der Tat, nach unseren Voraussetzungen ist im Intervall $\bar{k}$

$$-\{Y, t\} + Q_\beta(Y)\, Y'^2 = Q_\gamma(t),$$

$$-\{X, Y\} + Q_\alpha(Z)\, X'^2(Y) = Q_\beta(Y),$$

und gleichzeitig gilt nach § 1, (17)

$$\{Z, t\} = \{X, Y\}\, Y'^2(t) + \{Y, t\}.$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$-\{Z, t\} + Q_\alpha(Z)\, Z'^2 = Q_\gamma(t),$$

womit der Beweis beendet ist.

2. Gegenseitige Transformationen von Integralen der Differentialgleichungen (q),(Q).

Wir wollen nun an den in § 22, Nr. 2 beschriebenen Sachverhalt anknüpfen und uns mit der Frage befassen, inwieweit durch die Lösungen der Differentialgleichung (Qq) die Transformationen der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q) bestimmt sind.

Es sei X eine Lösung der Differentialgleichung (Qq) mit dem Definitionsintervall i $(\subset j)$. Wir wissen, daß die zu X inverse Funktion x mit dem Definitionsintervall $\big(X(i) =\big)\, I$ $(\subset J)$ eine Lösung der Differentialgleichung (qQ) darstellt (Nr. 1).

Wir wählen eine beliebige Zahl $t_0 \in i$. Ferner bezeichnen wir mit X_0, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' die Werte der Funktionen X, X', X'' an der Stelle t_0; analog sollen x_0, $\dot{x}_0$ $(\neq 0)$, $\ddot{x}_0$ die Werte von x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ an der zu t_0 homologen Stelle $T_0 \in I$ bedeuten. Die Zahlen X_0, X_0', X_0'' hängen also wie folgt zusammen: $X_0 = T_0$, $x_0 = t_0$, und es gelten die Formeln § 1, (6).

1. Ist Y ein Integral der Differentialgleichung (Q), dann ist die im Sinne der Formel

$$\bar{y}(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \tag{7}$$

im Intervall i definierte Funktion $\bar{y}$ eine Lösung der Differentialgleichung (q), und zwar ist diese Lösung $\bar{y}$ der im Intervall i bestehende Teil des durch die

Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}, \\ y'(t_0) &= \frac{\dot{Y}(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot X_0' - \frac{1}{2} \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot \frac{X_0''}{X_0'} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

bestimmten Integrals y von (q).

Beweis. Die Funktion $\bar{y}$ ist offenbar im Intervall i zweimal stetig differenzierbar, und es gelten, wie man leicht nachrechnet, die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}'(t) &= \frac{\dot{Y}(X)}{\sqrt{|X'|}} \cdot X' + Y(X) \left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)', \\ \bar{y}''(t) &= \frac{\ddot{Y}(X)}{\sqrt{|X'|}} \cdot X'^2 - \frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}} \cdot \{X, t\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Da die Funktionen Y, X den Differentialgleichungen (Q) bzw. (Qq) genügen, gilt an jeder Stelle $t \in i$

$$\ddot{Y}(X) = Q(X)\, Y(X),$$

$$-\{X, t\} = -Q(X)\, X'^2 + q(t).$$

Wir haben also

$$\bar{y}''(t) = \frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}} Q(X)\, X'^2 + \frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}} [-Q(X)\, X'^2 + q(t)]$$

und folglich auch

$$\bar{y}''(t) = q(t)\, \bar{y}.$$

Wir sehen, daß die Funktion $\bar{y}$ eine Lösung der Differentialgleichung (q) ist. Die Werte $\bar{y}(t_0)$, $\bar{y}'(t_0)$ sind nach (7) und (9) durch die Formeln (8) gegeben.

2. Es seien Y, y die in dem obigen Satz 1 betrachteten Integrale der Differentialgleichungen (Q), (q). Dann ist der im Intervall I definierte Teil $\bar{Y}$ von Y durch die zu (7) inverse Formel

$$\bar{Y}(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \tag{10}$$

gegeben, und die Cauchyschen Anfangswerte $Y(T_0)$, $Y'(T_0)$ sind

$$\left.\begin{aligned} Y(T_0) &= \frac{y(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}, \\ \dot{Y}(T_0) &= \frac{y'(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}} \cdot \dot{x}_0 - \frac{1}{2} \frac{y(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}} \cdot \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Beweis. Da y ein Integral von (q) und x eine Lösung von (qQ) ist, stellt nach dem obigen Satz die Funktion

$$\tilde{Y}(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}$$

im Intervall I eine Lösung der Differentialgleichung (Q) dar.

Nun gelten an je zwei homologen Stellen $T \in I$, $t \in i$ die Beziehungen

$$\tilde{Y}(T) = \frac{\bar{y}(t)}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|\dot{x}(T) \cdot X'(t)|}} = Y(T) = \bar{Y}(T).$$

Folglich ist $\tilde{Y}$ der im Intervall I definierte Teil $\bar{Y}$ des Integrals Y.

Nach den Formeln (8) sind die Cauchyschen Anfangsbedingungen für das Integral Y durch die Formeln (11) gegeben.

Aus den obigen Überlegungen folgt der

Satz. *Die zweigliedrige mit einer beliebigen Konstanten* k $(\neq 0)$ *gebildete Funktionenfolge* $w(t) = k : \sqrt{|X'(t)|}$, $X(t)$ *stellt eine Transformation* $[w, X]$ *der Differentialgleichung* (Q) *in die Differentialgleichung* (q) *dar. Zugleich stellt die Funktionenfolge* $W(T) = \frac{1}{k} : \sqrt{|\dot{x}(T)|}$, $x(T)$ *eine Transformation der Differentialgleichung* (q) *in* (Q) *dar.*

Jedes Integral Y *der Differentialgleichung* (Q) *wird durch die Transformation* $[w, X]$ *in sein Bild*

$$\bar{y}(t) = k \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \tag{12}$$

transformiert, wobei dieses einen Teil des durch die Anfangswerte

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= k \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}, \\ y'(t_0) &= k \left[\frac{\dot{Y}(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot X_0' - \frac{1}{2} \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot \frac{X_0''}{X_0'} \right] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

bestimmten Bildintegrals y *von* Y *bildet.*

Zugleich wird das Integral y *der Differentialgleichung* (q) *durch die Transformation* $[W, x]$ *in sein Bild*

$$\bar{Y}(T) = \frac{1}{k} \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \tag{14}$$

transformiert, wobei dieses Bild einen Teil des durch die Anfangswerte

$$\left.\begin{aligned} Y(T_0) &= \frac{1}{k} \frac{y(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}, \\ \dot{Y}(T_0) &= \frac{1}{k} \left[\frac{y'(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}} \cdot \dot{x}_0 - \frac{1}{2} \frac{y(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}} \cdot \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0} \right] \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

bestimmten Bildintegrals Y *von* y *bildet.*

3. Es seien Y, y die im obigen Satz betrachteten Integrale der Differentialgleichungen (Q), (q). Dann gelten an je zwei homologen Stellen $T \in I$, $t \in i$ die

Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}\cdot kY(T) &= \sqrt[4]{|X'(t)|}\cdot y(t),\\ \frac{k}{\sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}}\left[\dot{Y}(T)+\frac{1}{4}\,Y(T)\cdot\frac{\ddot{x}(T)}{\dot{x}(T)}\right] &= \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{|X'(t)|}}\left[y'(t)+\frac{1}{4}\,y(t)\,\frac{X''(t)}{X'(t)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

mit $\varepsilon = \operatorname{sgn} X_0' = \operatorname{sgn} \dot{x}_0$.

Diese Beziehungen erhält man aus den Formeln (12), (14) und ihren Ableitungen unter Anwendung von § 1, (6).

4. Die Bildintegrale u, v von zwei unabhängigen Integralen U, V der Differentialgleichung (Q) in der Transformation $[w, X]$ sind unabhängig. Analoges gilt natürlich von der Transformation $[W, x]$.

Dies folgt unmittelbar aus den Formeln (13) bzw. (15).

3. Transformationen der Ableitungen von Integralen der Differentialgleichungen (q), (Q). Die obigen Resultate können zur Ermittelung von Transformationen der Integrale oder deren Ableitungen (1. Ordnung) einer der Differentialgleichungen (q), (Q) in Teile von Integralen und deren Ableitungen der anderen Differentialgleichung angewendet werden.

Setzen wir voraus, daß die Träger q, Q der Differentialgleichungen (q), (Q) in ihren Definitionsintervallen j, J stets von Null verschieden sind und der Klasse C_2 angehören, dann lassen die Differentialgleichungen (q), (Q) begleitende Differentialgleichungen $(\hat{q}_1)$, $(\hat{Q}_1)$ zu (§ 1, Nr. 9). Ihre Träger $\hat{q}_1$, $\hat{Q}_1$ sind im Sinne der Formeln § 1, (18) bzw. (20) definiert, und die Ableitungen y', $\dot{Y}$ von Integralen y, Y der Differentialgleichungen (q), (Q) hängen mit Integralen y_1, Y_1 von $(\hat{q}_1)$, $(\hat{Q}_1)$ so wie in § 1, (21) zusammen.

Wendet man die obigen Resultate auf die Differentialgleichungen $(\hat{q}_1)$, (Q) und $(\hat{q}_1)$, $(\hat{Q}_1)$ an, so ergeben sich Tatsachen über Transformationen von Integralen y, Y der Differentialgleichungen (q), (Q) und ihren Ableitungen y', $\dot{Y}$. Die den Beziehungen (12), (14) entsprechenden Transformationsformeln sind

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}'(t) &= k\sqrt{|q(t)|}\,\frac{Y[X_1(t)]}{\sqrt{|X_1'(t)|}}, & \bar{Y}(T) &= \frac{1}{k}\,\frac{1}{\sqrt{|q[x_1(T)]|}}\,\frac{y'[x_1(T)]}{\sqrt{|\dot{x}_1(T)|}},\\ \bar{y}'(t) &= k\sqrt{\left|\frac{q(t)}{Q[X_2(t)]}\right|}\,\frac{\dot{Y}[X_2(t)]}{\sqrt{|X_2'(t)|}}, & \dot{\bar{Y}}(T) &= \frac{1}{k}\sqrt{\left|\frac{Q(T)}{q[x_2(T)]}\right|}\,\frac{y'[x_2(T)]}{\sqrt{|\dot{x}_2(T)|}}; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

X_1, x_1 stellen zueinander inverse Lösungen der Differentialgleichungen $(Q\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1Q)$ und X_2, x_2 solche von $(\hat{Q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1\hat{Q}_1)$ dar.

4. Beziehungen zwischen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) und ersten Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q). Die in dieser Nr. betrachteten Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q) sind stets erste Phasen. Wir sprechen deshalb im folgenden kürzer von Phasen statt von ersten Phasen.

Wir übernehmen aus Nr. 2 die Bedeutung von X, x usw.

1. Es sei A eine Phase der Differentialgleichung (Q). Dann ist die im Sinne der Formel

$$\bar{\alpha}(t) = \mathsf{A}[X(t)] \tag{18}$$

im Intervall i definierte Funktion $\bar{\alpha}$ ein Teil einer Phase α der Differentialgleichung (q), und zwar ist diese Phase α durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$\alpha(t_0) = \mathsf{A}(X_0); \quad \alpha'(t_0) = \dot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0'; \quad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0'^2 + \dot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0'' \quad (19)$$

bestimmt. Offenbar sind die Phasen α, A verknüpft (§ 9, Nr. 2).

Beweis. Die Phase A ist in dem Phasensystem einer Basis (U, V) der Differentialgleichung (Q) enthalten (§ 5, Nr. 6). Folglich gilt im Intervall J (mit Ausnahme der Nullstellen von V) die Beziehung $\tan \mathsf{A} = U : V$.

Wir betrachten die Transformation $w(t) = 1 : \sqrt{|X'(t)|}$, $X(t)$ der Differentialgleichung (Q) in die Differentialgleichung (q). Es seien u, v die Bildintegrale von U, V in dieser Transformation $[w, X]$. Nach Nr. 2,4 ist (u, v) eine Basis von (q). Es sei α_0 eine Phase dieser Basis. Dann haben wir für $t \in i$ (mit Ausnahme der singulären Stellen)

$$\tan \alpha_0(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{U[X(t)]}{V[X(t)]} = \tan \mathsf{A}[X(t)],$$

und daraus folgt $\alpha_0(t) + m\pi = \mathsf{A}[X(t)]$, wobei m eine geeignete ganze Zahl ist. Nun stellt aber die Funktion $\alpha = \alpha_0 + m\pi$ eine Phase der Basis (u, v) und $\bar{\alpha}$ den in dem Intervall i definierten Teil von α dar. Aus (18) folgen durch Differentiation die Anfangswerte $\alpha'(t_0)$, $\alpha''(t_0)$ im Sinne der Formeln (19).

Damit ist der Beweis beendet.

Natürlich wird durch die zu X inverse Lösung x der Differentialgleichung (qQ) die Phase α in einen Teil $\bar{\mathsf{A}}$ von A transformiert:

$$\bar{\mathsf{A}}(T) = \alpha[x(T)] \quad \big(T \in I = X(i)\big). \tag{20}$$

2. Es seien α, A beliebige verknüpfte Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q). Ferner sei

$$L = \alpha(j) \cap \mathsf{A}(J); \quad k = \alpha^{-1}(L), \quad K = \mathsf{A}^{-1}(L). \tag{21}$$

Dann gibt es zu jeder Zahl $t \in k$ bzw. $T \in K$ genau eine der Gleichung

$$\alpha(t) = \mathsf{A}[Z(t)] \quad \text{bzw.} \quad \alpha[z(T)] = \mathsf{A}(T) \tag{22}$$

genügende Zahl $Z(t) \in K$ bzw. $z(T) \in k$. Die vermöge der Formeln (22) in den Intervallen k, K definierten und offensichtlich zueinander inversen Funktionen $Z(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t)$, $z(T) = \alpha^{-1}\mathsf{A}(T)$ gehören der Klasse C_3 an und stellen reguläre Lösungen der Differentialgleichungen (Qq), (qQ) dar. Die durch die Funktionen Z, z definierten Kurven gehen von Rand zu Rand des rechteckigen Bereiches $(a, b) \times (A, B)$.

Beweis. a) Es sei $t \in k$ eine beliebige Zahl. Dann ist $\alpha(t) \in L = \mathsf{A}(K)$, und da die Funktion A wächst oder abnimmt, gibt es genau eine der ersten Gleichung (22) genügende Zahl $Z(t) \in K$. Ähnliches gilt von der zweiten Gleichung (22).

b) Aus $Z(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t)$, $z(T) = \alpha^{-1}\mathsf{A}(T)$ folgt, daß die Funktionen Z, z der Klasse C_3 angehören und ihre Ableitungen Z', $\dot{z}$ stets von Null verschieden sind. Bildet man die Schwarzschen Ableitungen von (22), so erkennt man, daß die Funktionen Z, z den Differentialgleichungen (Qq), (qQ) genügen.

c) Die Richtigkeit der letzten Behauptung geht aus dem Resultat in § 9, Nr. 2 über die Intervalle k, K hervor.

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nennen Z, z die durch die Phasen α, A *erzeugten* Lösungen der Differentialgleichungen (Qq), (qQ).

Die oben in 1. betrachtete Lösung X der Differentialgleichung (Qq) ist offenbar der im Intervall i bestehende Teil der durch die Phasen α, A erzeugten Lösung Z der Differentialgleichung (Qq).

5. Gegenseitige Transformationen von ersten und zweiten Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q). Nach Nr. 4,1. transformiert eine Lösung X der Differentialgleichung (Qq) jede erste Phase A der Differentialgleichung (Q) in einen Teil $\bar{\alpha}$ einer ersten Phase α der Differentialgleichung (q) im Sinne der Formel (18). Analoges gilt von einer Lösung x der Differentialgleichung (qQ) und jeder ersten Phase α der Differentialgleichung (q): Vermöge der Funktion x wird die Phase α in einen Teil einer ersten Phase $\bar{\mathsf{A}}$ der Differentialgleichung (Q) im gleichen Sinne transformiert. Nach Nr. 4,2. erzeugen je zwei verknüpfte erste Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) gewisse zueinander inverse Lösungen der Differentialgleichungen (Qq), (qQ).

Setzen wir nun voraus, daß die Funktionen q, Q in ihren Definitionsintervallen j, J stets von Null verschieden sind und der Klasse C_2 angehören, so daß die Differentialgleichungen (q), (Q) begleitende Differentialgleichungen $(\hat{\mathrm{q}}_1)$, $(\hat{\mathrm{Q}}_1)$ zulassen, dann stellt jede erste Phase α_1, A_1 der Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ bzw. $(\hat{\mathrm{Q}}_1)$ eine zweite Phase β, B von (q) bzw. (Q) dar: $\alpha_1 = \beta$, $\mathsf{A}_1 = \mathsf{B}$. Wendet man die erwähnten Resultate von Nr. 4,1.; 4,2. auf die Differentialgleichungen $(\hat{\mathrm{q}}_1)$, (Q) und $(\hat{\mathrm{q}}_1)$, $(\hat{\mathrm{Q}}_1)$ an, so ergeben sich Tatsachen über Transformationen von ersten und zweiten Phasen α, A bzw. β, B der Differentialgleichungen (q), (Q) ineinander. Die den Beziehungen (18), (20) entsprechenden Transformationsformeln sind

$$\bar{\beta}(t) = \mathsf{A}[X_1(t)]; \qquad \bar{\mathsf{A}}(T) = \beta[x_1(T)];$$

$$\bar{\beta}(t) = \mathsf{B}[X_2(t)]; \qquad \bar{\mathsf{B}}(T) = \beta[x_2(T)];$$

X_1, x_1 stellen zueinander inverse Lösungen der Differentialgleichungen $(\mathrm{Q}\hat{\mathrm{q}}_1)$, $(\hat{\mathrm{q}}_1\mathrm{Q})$ und X_2, x_2 solche von $(\hat{\mathrm{Q}}_1\hat{\mathrm{q}}_1)$, $(\hat{\mathrm{q}}_1\hat{\mathrm{Q}}_1)$ dar.

§ 24. Existenz- und Eindeutigkeitsfragen über Lösungen der Differentialgleichung (Qq)

1. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen der Differentialgleichung (Qq). Grundlegend für die allgemeine Transformationstheorie ist der folgende

Satz. *Es seien $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' beliebige Zahlen. Es gibt genau eine in einem gewissen Intervall k $(\subset j)$ definierte breiteste Lösung $Z(t)$ der Differentialgleichung* (Qq) *mit den Cauchyschen Anfangsbedingungen:*

$$Z(t_0) = X_0, \qquad Z'(t_0) = X_0', \qquad Z''(t_0) = X_0''; \tag{1}$$

„breiteste" *bedeutet, daß jede denselben Anfangsbedingungen genügende Lösung von* (Qq) *ein Teil von* $Z(t)$ *ist.*

Es seien α, A *beliebige Phasen der Differentialgleichungen* (q), (Q), *deren Werte an den Stellen* t_0, X_0 *wie folgt zusammenhängen:*

$$\alpha(t_0) = \mathsf{A}(X_0); \quad \alpha'(t_0) = \dot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0'; \quad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0'^2 + \dot{\mathsf{A}}(X_0)\, X_0''. \tag{2}$$

Dann ist $Z(t)$ *die durch die (verknüpften) Phasen* α, A *erzeugte Lösung der Differentialgleichung* (Qq):

$$Z(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t). \tag{3}$$

Beweis. Wir wählen eine der Phasen α, A, z. B. die Phase α, beliebig; dann ist die andere, A, durch die aus den Formeln (2) sich ergebenden Werte $\mathsf{A}(X_0)$, $\dot{\mathsf{A}}(X_0)$, $\ddot{\mathsf{A}}(X_0)$ eindeutig bestimmt (§ 7, Nr. 1).

Die durch die Phasen α, A erzeugte Lösung $Z(t)$ erfüllt offenbar die Anfangsbedingungen (1). Wir haben also zu zeigen, daß jede in einem Intervall i ($\subset j$) definierte Lösung $X(t)$ der Differentialgleichung (Qq) mit den Anfangswerten (1) ein Teil von $Z(t)$ ist. Nach § 23, Nr. 4,1. ist die im Intervall i definierte Funktion $\bar{\alpha}(t) = \mathsf{A}[X(t)]$ ein Teil einer Phase α_0 der Differentialgleichung (q), und zwar derjenigen Phase α_0, die wie α vermöge derselben Anfangswerte (2) bestimmt ist. Daraus folgt $\alpha_0(t) = \alpha(t)$ für $t \in j$ und ferner $\alpha(t) = \mathsf{A}[X(t)]$ für $t \in i$. Folglich ist $X(t)$ der im Intervall i bestehende Teil von $Z(t)$.

Damit ist der Beweis beendet.

Nach § 23, Nr. 4,2. geht die durch die Funktion $Z(t)$ definierte Kurve von Rand zu Rand des rechteckigen Bereiches $j \times J$.

2. Transformationen gegebener Integrale der Differentialgleichungen (q), (Q) ineinander. Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen, ob es möglich ist, von zwei *beliebig gegebenen* Integralen y, Y der Differentialgleichungen (q), (Q) das eine, z. B. Y, vermöge einer passenden Lösung $X(t)$ der Differentialgleichung (Qq), $t \in i$ ($\subset j$), in einen Teil $\bar{y}$ des anderen Integrals y im Sinne der Formel § 23, (7) zu transformieren. Im bejahenden Fall wird natürlich das Integral y vermöge der zu X inversen Lösung x der Differentialgleichung (qQ) in einen Teil $\bar{Y}$ von Y so wie in § 23, (10) transformiert.

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend, wenn man nötigenfalls das Vorzeichen eines der beiden Integrale y, Y ändert. Man kann sogar den Wert X_0 der Funktion X an einer beliebigen Stelle $t_0 \in j$ nach Belieben vorschreiben: $X_0 = X(t_0)$. Es ist jedoch zu betonen, daß die erwähnten Gegebenheiten nicht ganz willkürlich angenommen werden dürfen, da nach den Transformationsformeln § 23, (7), (10) die Werte der beiden Integrale y, Y an je zwei homologen Stellen $T = X(t)$ $\big(\in I = X(i)\big)$, $t = x(T)$ ($\in i$) dasselbe Vorzeichen haben oder beide verschwinden.

Wir wollen den Sachverhalt genauer beschreiben in folgendem

Satz. *Es seien* y, Y *beliebige Integrale der Differentialgleichungen* (q), (Q). *Ferner seien* $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ *beliebige Zahlen, welche die eine oder die andere von den folgenden Beziehungen* a), b) *erfüllen:*

$$\text{a) } y(t_0) \neq 0 \neq Y(X_0), \quad \text{b) } y(t_0) = 0 = Y(X_0).$$

Dann gibt es breiteste Lösungen X der Differentialgleichung (Qq), *die an der Stelle t_0 den Wert X_0 annehmen, $X_0 = X(t_0)$, und in ihren Definitionsintervallen das Integral Y in einen Teil $\bar{y}$ von y transformieren*:

$$\bar{y}(t) = \eta \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{4}$$

Im Fall a) *gibt es genau eine wachsende und genau eine abnehmende breiteste Lösung X der Differentialgleichung* (Qq); *im Fall* b) *gibt es genau ∞^1 wachsende und ebensoviel abnehmende breiteste Lösungen X.*

In beiden Fällen a), b) *bezeichnet η die Zahl ± 1, und zwar im Sinne der Formeln*

$$\text{a) } \eta = \operatorname{sgn} y(t_0)\, Y(X_0)$$

$$\text{b) } \eta = \begin{cases} \operatorname{sgn} y'(t_0)\, \dot{Y}(X_0) & \textit{für wachsende Lösungen,} \\ -\operatorname{sgn} y'(t_0)\, \dot{Y}(X_0) & \textit{für abnehmende Lösungen.} \end{cases}$$

Beweis. Nehmen wir zunächst an, es gäbe eine in einem Intervall k ($\subset j$) definierte und der Behauptung des Satzes entsprechende breiteste Lösung X der Differentialgleichung (Qq), dann gelten im Intervall k die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \eta \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \\ \bar{y}'(t) &= \eta \left[\frac{\dot{Y}[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} X'(t) - \frac{1}{2} \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \cdot \frac{X''(t)}{X'(t)} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Funktionen X, X', X'' an der Stelle t_0 entsprechend den Fällen a), b) folgende Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = \varepsilon \frac{Y^2(X_0)}{y^2(t_0)}, \\ &\qquad X''(t_0) = 2 \frac{Y^2(X_0)}{y^4(t_0)} [Y(X_0)\, \dot{Y}(X_0) - \varepsilon y(t_0)\, y'(t_0)]; \\ &\text{b)}\quad X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = \varepsilon \frac{y'^2(t_0)}{\dot{Y}^2(X_0)}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dabei ist $\varepsilon = \pm 1$. Im Fall b) ist der Wert $X''(t_0)$ durch die Beziehungen (5) nicht bestimmt.

Offenbar ist $\varepsilon = 1$ oder $= -1$, je nachdem, ob die Funktion X im Intervall k wächst oder abnimmt.

Im Fall a) sind also durch die Integrale y, Y und die Angabe der Werte $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ und ferner dadurch, ob die Funktion X wächst oder abnimmt, die Anfangswerte $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0)$ ($\neq 0$), $X''(t_0)$ der Funktion X eindeutig bestimmt. Im Fall b) gilt dies nur von den Anfangswerten $X(t_0)$, $X'(t_0)$. Aus dem Satz von Nr. 1 geht hervor, daß die Anzahl der den Bedingungen des Satzes entsprechenden breitesten Lösungen X der Differentialgleichung (Qq) die in diesem Satze angegebene Anzahl nicht übertrifft.

Es sei nun X die breiteste durch die Anfangswerte (6), a) oder b) bestimmte Lösung der Differentialgleichung (Qq); im Fall b) sei X_0'' eine beliebige Zahl. Die Existenz dieser Lösung X ist durch den Satz von Nr. 1 gesichert; das Definitionsintervall von X sei k $(\subset j)$.

Nach § 23, Nr. 2,1. ist die im Intervall k definierte Funktion

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \tag{7}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (q), und zwar ist sie der im Intervall k bestehende Teil des vermöge der Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$\tilde{y}(t_0) = \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X'(t_0)|}},$$

$$\tilde{y}'(t_0) = \frac{\dot{Y}(X_0)}{\sqrt{|X'(t_0)|}} X'(t_0) - \frac{1}{2} \frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X'(t_0)|}} \cdot \frac{X''(t_0)}{X'(t_0)}$$

bestimmten Integrals $\tilde{y}$ von (q).

Ersetzt man $X'(t_0)$, $X''(t_0)$ durch die entsprechenden in den Formeln (6) angegebenen Werte, so ergibt sich in beiden Fällen a), b)

$$\tilde{y}(t_0) = \eta y(t_0); \quad \tilde{y}'(t_0) = \eta y'(t_0).$$

Daraus folgt für $t \in k$

$$\tilde{y}(t) = \eta y(t).$$

Folglich transformiert die Lösung X der Differentialgleichung (Qq) das Integral ηY in den im Intervall k bestehenden Teil des Integrals y im Sinne der Formel (7).

Damit ist der Beweis beendet.

Zu diesen Überlegungen wollen wir die folgende Bemerkung hinzufügen:

Die Formel (7) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$y(t) = \eta \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \tag{8}$$

wobei jedoch die Gültigkeit dieser letzteren auf das Intervall k $(\subset j)$ beschränkt ist. In speziellen Fällen kann es vorkommen, daß die Formel (8) im ganzen Intervall j besteht und zugleich der Wertevorrat der Funktion X mit dem Intervall J übereinstimmt. Dann wird durch die Funktion X das Integral ηY in seinem ganzen Verlauf in das Integral y im Sinne der Formel (8) transformiert. Natürlich tritt diese Situation genau dann ein, wenn das Definitionsintervall k der Funktion X mit j und zugleich dasjenige, K, der zu X inversen Funktion x mit J identisch ist. Dies ist im besonderen der Fall, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) oszillatorisch sind. Dann sind je zwei beliebige Phasen α, A dieser Differentialgleichungen einander ähnlich, und folglich stimmen die Intervalle k, j und K, J überein (§ 9, Nr. 2).

Beispielsweise wird die Funktion $\sin t$ $(q = -1)$ in ihrem ganzen Verlauf, $t \in (-\infty, \infty)$, vermöge einer passenden und etwa wachsenden Funktion $x_\nu(T)$ $(\in C_3)$, $T \in (0, \infty)$, in das Integral $\sqrt{T}\, J_\nu(T)$ der Besselschen Differentialgleichung

§ 1, (24) transformiert. Daraus folgt diese Darstellung der Besselschen Funktion $J_\nu(T)$:

$$J_\nu(T) = \frac{\sin x_\nu(T)}{\sqrt{T \cdot \dot{x}_\nu(T)}}.$$

§ 25. Physikalische Anwendung der allgemeinen Transformationstheorie

1. Geradlinige Bewegungen in physikalischen Räumen. Wir betrachten zwei physikalische Räume I und II. In diesen Räumen seien die Zeiten während gewisser (offener) Zeitintervalle k bzw. K an Uhren [I] bzw. [II] gemessen. Wir nehmen an, die Uhren [I], [II] seien in ihrem Gang vermöge zwei in den Intervallen k, K definierter und zueinander inverser Funktionen $X(t)$, $t \in k$, und $x(T)$, $T \in K$, aufeinander abgestimmt: In jedem an der Uhr [I] gemessenen Augenblick $t \in k$ zeigt die Uhr [II] die Zeit $T = X(t)$ $(\in K)$ an, mit anderen Worten: In jedem an der Uhr [II] gemessenen Augenblick $T \in K$ zeigt die Uhr [I] die Zeit $t = x(T)$ $(\in k)$ an. Wir nennen X bzw. x die *Zeitfunktion* für den Raum [II] bzw. [I]. Im Hinblick auf die folgende Anwendung setzen wir voraus, daß diese Zeitfunktionen der Klasse C_3 angehören und ihre Ableitungen X', $\dot{x}$ stets >0 sind. Dann ist es sinnvoll, von der Zeitgeschwindigkeit $X'(t)$ und Zeitbeschleunigung $X''(t)$ im Raume [II] im Augenblick t $(\in k)$ zu sprechen und desgleichen von der Zeitgeschwindigkeit $\dot{x}(T)$ und Zeitbeschleunigung $\ddot{x}(T)$ im Raume [I] im Augenblicke T $(\in K)$. Zwei (homologe) Augenblicke $t \in k$ und $T = X(t) \in K$, oder $T \in K$ und $t = x(T) \in k$, wollen wir als *gleichzeitig* bezeichnen.

Nun seien in den Räumen I, II orientierte Geraden G_{I}, G_{II} gegeben, auf denen sich zwei Punkte P_{I}, P_{II} bewegen. Auf jeder von diesen Geraden sei ein fester Punkt O_{I} bzw. O_{II}, der Nullpunkt, festgelegt. Von ihm aus werden die jeweiligen Abstände der Punkte P_{I} bzw. P_{II} gemessen, und zwar positiv in positiver und negativ in negativer Richtung der entsprechenden Geraden (§ 1, Nr. 5).

Wir nehmen an, die Bewegungen der Punkte P_{I}, P_{II} seien durch beliebige Differentialgleichungen

$$y'' = q(t)\, y, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)\, Y \tag{Q}$$

$(t \in j,\ T \in J)$ geregelt, und zwar:

Es seien für beliebige Augenblicke $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ vermöge gewisser Abstände y_0, Y_0 von den Nullpunkten O_{I}, O_{II} die Lagen der Punkte P_{I}, P_{II} auf den Geraden G_{I}, G_{II} und ferner ihre Geschwindigkeiten y_0', $\dot{Y}_0$ gewählt. Dann erfolgen die Bewegungen der Punkte P_{I}, P_{II} nach den durch die Anfangswerte $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ und $Y(T_0) = Y_0$, $\dot{Y}(T_0) = \dot{Y}_0$ bestimmten Integralen $y(t)$, $Y(T)$ der Differentialgleichungen (q), (Q). Die Lage des Punktes P_{I} in jedem Augenblick $t \in j$ ist also durch seinen Abstand $y(t)$ vom Nullpunkt O_{I} gegeben; und zwar ist $y(t) > 0$ oder $y(t) < 0$ oder $y(t) = 0$, je nachdem, ob sich der Punkt P_{I} in positiver oder negativer Richtung vom Nullpunkt O_{I} befindet oder durch diesen hindurchgeht. Entsprechendes gilt natürlich vom Punkt P_{II}. Wenn z. B. die Differentialgleichungen (q), (Q) oszillatorisch sind, so schwingen die Punkte P_{I}, P_{II} stets um die Nullpunkte O_{I}, O_{II} herum.

Wir nehmen z. B. $y(t_0) > 0$, $Y(T_0) > 0$ an. Nach dem Satz von § 24, Nr. 2 gibt es genau eine z. B. wachsende breiteste Lösung X der Differentialgleichung

(Qq), die an der Stelle t_0 den Wert T_0 annimmt und in ihrem Definitionsintervall k ($\in j$) das Integral Y in den im Intervall k bestehenden Teil von y transformiert. Zugleich stellt die zu X inverse Funktion x in ihrem Definitionsintervall $X(k) = K$ ($\in J$) die wachsende breiteste Lösung von (qQ) dar, die an der Stelle T_0 den Wert t_0 annimmt und im Intervall K das Integral y in den im Intervall K bestehenden Teil von Y überführt. Diese Transformationen drücken sich durch die Formel

$$\sqrt[4]{X'(t)}\, y(t) = \sqrt[4]{\dot{x}(T)}\; Y(T) \tag{1}$$

aus.

Wir wählen nun die Funktion X bzw. x während des Zeitintervalls k bzw. K zur Zeitfunktion für den Raum II bzw. I. Außerdem wählen wir die Längeneinheit im Raum I in jedem Augenblick t ($\in k$) gleich der vierten Wurzel der entsprechenden Zeitgeschwindigkeit im Raum II, also $\sqrt[4]{X'(t)}$, und analog diejenige im Raume II gleich $\sqrt[4]{\dot{x}(T)}$. Dann sind nach der Formel (1) die gleichzeitigen Abstände der Punkte P_{I}, P_{II} von den Nullpunkten O_{I}, O_{II} stets dieselben, mit anderen Worten: Die Bewegungen der Punkte P_{I}, P_{II} sind während der Zeitintervalle k, K dieselben.

Wir fassen dieses Resultat kurz zusammen:

In physikalischen Räumen sind bei geeigneten Zeit- und Längenmessungen alle geradlinigen und durch beliebige Differentialgleichungen 2. Ordnung geregelten Bewegungen einander gleich.

2. Harmonische Bewegungen. Wir wollen nun die obigen Überlegungen auf den Fall harmonischer Bewegungen anwenden.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß die Bewegungen der Punkte P_{I}, P_{II} durch die mit beliebigen Konstanten $\omega > 0$, $\Omega > 0$ gebildeten Differentialgleichungen

$$y'' = -\omega^2 y, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = -\Omega^2 Y \tag{Q}$$

in dem Zeitintervall $(-\infty, \infty)$ geregelt werden.

Die Lage der Punkte P_{I}, P_{II} und ihre Geschwindigkeiten in den Augenblicken t_0, T_0 wählen wir wie folgt:

$$y_0 = \frac{c}{\sqrt{\omega}}, \quad y_0' = 0; \quad Y_0 = \frac{c}{\sqrt{\Omega}}, \quad Y_0' = 0 \quad (c = \text{const} > 0).$$

Dann erfolgt die Bewegung der Punkte P_{I}, P_{II} nach den folgenden Integralen der Differentialgleichungen (q), (Q):

$$y(t) = \frac{c}{\sqrt{\omega}} \sin\left[\omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right], \quad Y(T) = \frac{c}{\sqrt{\Omega}} \sin\left[\Omega(T - T_0) + \frac{\pi}{2}\right],$$
$$t, T \in (-\infty, \infty).$$

Die wachsende breiteste Lösung $X(t)$ der Differentialgleichung

$$-\{X, t\} - \Omega^2 X'^2(t) = -\omega^2, \tag{Qq}$$

die an der Stelle t_0 den Wert T_0 annimmt, und die zu ihr inverse Funktion $x(T)$ sind linear und drücken sich folgendermaßen aus:

$$X(t) = \frac{\omega}{\Omega}(t - t_0) + T_0; \quad x(T) = \frac{\Omega}{\omega}(T - T_0) + t_0 \quad (t, T \in (-\infty, \infty)).$$

Durch diese Funktionen wird in dem Intervall $(-\infty, \infty)$ das Integral Y in y bzw. das Integral y in Y transformiert, und es gilt

$$\sqrt[4]{\frac{\omega}{\Omega}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\omega}} \sin\left[\omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right] = \sqrt[4]{\frac{\Omega}{\omega}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\Omega}} \sin\left[\Omega(T - T_0) + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Wir wählen nun entsprechend den obigen Überlegungen die Funktion X bzw. x während des Zeitintervalls $(-\infty, \infty)$ zur Zeitfunktion für den Raum II bzw. I. Die Linearität dieser Funktionen drückt den gleichförmigen Zeitverlauf in den betrachteten Räumen aus. Außerdem wählen wir die Längeneinheiten in den Räumen I, II konstant, und zwar gleich $\sqrt[4]{\omega : \Omega}$ bzw. $\sqrt[4]{\Omega : \omega}$. Dann sind [nach der Formel (2)] die Bewegungen der Punkte $P_{\text{I}}, P_{\text{II}}$ in dem Zeitintervall $(-\infty, \infty)$ dieselben.

Wir fassen kurz zusammen:

Geradlinige harmonische Bewegungen zweier Punkte in physikalischen Räumen sind bei geeignetem gleichförmigem Zeitverlauf und passend gewählten konstanten Längeneinheiten in beiden Räumen dieselben.

B. VOLLSTÄNDIGE TRANSFORMATIONEN

Dieses Kapitel ist Fragen über Existenz und Allgemeinheit der vollständigen Transformationen zweier Differentialgleichungen (q), (Q) sowie Untersuchungen über die Struktur der Menge solcher Transformationen gewidmet.

Die diesbezügliche Theorie stützt sich auf die in § 9, Nr. 5 gewonnenen Erkenntnisse über ähnliche Phasen zweier Differentialgleichungen. Folglich werden wir die in der erwähnten Nr. angewandten Bezeichnungen in den folgenden Überlegungen benutzen. Insbesondere wollen wir die links- bzw. rechtsseitigen 1-Grundfolgen der Differentialgleichungen (q), (Q), sofern sie existieren, mit

$$(a <)\, a_1 < a_2 < \cdots \quad \text{bzw.} \quad (b >)\, b_{-1} > b_{-2} > \cdots$$

und

$$(A <)\, A_1 < A_2 < \cdots \quad \text{bzw.} \quad (B >)\, B_{-1} > B_{-2} > \cdots$$

bezeichnen.

§ 26. Existenz und Allgemeinheit der vollständigen Transformationen

1. Fragestellung. Den Ausgangspunkt zu den folgenden Betrachtungen bildet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz über Lösungen der Differentialgleichung (Qq) (§ 24, Nr. 1) und die auf S. 196 gemachte Bemerkung. Nach dem erwähnten Satz gibt es genau eine in einem gewissen Intervall $k(\subset j)$ definierte breiteste