kommen, daß die durch Zusammensetzung erzeugten Funktionen einer höheren Klasse als ihre erzeugenden Komponenten angehören. Unsere Resultate über Ableitungen von Zentraldispersionen führen zu mehreren Situationen dieser Art. Wir wollen uns diesbezüglich mit einigen Bemerkungen begnügen, da eine Weiterführung der Untersuchungen in dieser Richtung den Rahmen unseres Themas übersteigen würde.

Wir zeigen:

Es sei q eine im Intervall $j = (a, b)$ stets negative und stetige Funktion derart, daß die Differentialgleichung (q) *oszillatorisch ist. Hier gibt es im Intervall j zwei den Ungleichungen $t < X(t) < Y(t)$ genügende Funktionen X, Y derart, daß die Funktion $q[X(t)] : q[Y(t)]$ der Klasse C_2 angehört. Ist die Funktion q streng monoton, so gibt es sogar stetige Funktionen X, Y mit der erwähnten Eigenschaft.*

In der Tat erhält man Funktionen X, Y der beschriebenen Art, wenn man ihre Werte $X(t)$, $Y(t)$ an jeder Stelle $t \in j$ gemäß dem Satz aus Nr. 6 wählt: $X(t) = t_1$, $Y(t) = t_3$; $t < t_1 < t_3$. Die Funktion $q[X(t)] : q[Y(t)]$ $\big(= \varphi'(t)\big)$ besitzt an der Stelle t eine stetige Ableitung 2. Ordnung, wie uns aus Nr. 4 bekannt ist. Ist die Funktion q streng monoton, so folgt aus dem Satz in Nr. 6 und der Beziehung $\omega\chi = \varphi$

$$X(t) = q^{-1}[q[\chi(t)] \cdot \chi'(t)]; \qquad Y(t) = q^{-1}[q[\chi(t)] : \omega'[\chi(t)]],$$

wobei natürlich q^{-1} die zu q inverse Funktion bedeutet. Aus diesen Formeln folgt, daß die Funktionen X, Y im Intervall j stetig sind.

B. SPEZIELLE PROBLEME ÜBER ZENTRALDISPERSIONEN

Dieses Kapitel ist Untersuchungen über spezielle Probleme aus der Theorie linearer oszillatorischer Differentialgleichungen 2. Ordnung gewidmet. Es handelt sich um Probleme, die mit dem Begriff der Zentraldispersionen zusammenhängen und unter Anwendung der in dem vorherigen Kapitel 1 entwickelten Theorie gelöst werden können.

§ 14. Verlängerung von Lösungen einer Differentialgleichung (q) und ihrer Ableitungen

In diesem Paragraphen behalten wir die bisherigen Voraussetzungen: (q) oszillatorisch, $j = (a, b)$, $q < 0$ für alle $t \in j$ bei. Diese letzte Voraussetzung wird jedoch in Nr. 1 (über Verlängerung von Lösungen) nicht benötigt, sondern erst in Nr. 2 (über Verlängerung der Ableitungen von Lösungen).

1. Verlängerung von Lösungen der Differentialgleichung (q). Die elementare Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung lehrt, daß für jedes Integral v von (q) die in einer Umgebung einer von jeder Nullstelle des Integrals v

verschiedenen Zahl $x \in j$ definierte Funktion $v(t) \cdot \int\limits_x^t d\sigma : v^2(\sigma)$ eine von v unabhängige Lösung der Differentialgleichung (q) darstellt (§ 1, Nr. 2). Wir wollen nun diese Lösung auf das ganze Intervall j verlängern, und zwar vermöge von Werten des Integrals v.

Es sei also v ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (q). t_0 sei eine Nullstelle von v. Wir bezeichnen mit

$$\cdots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \tag{1}$$

die sämtlichen Nullstellen von v. Dann gilt in der üblichen Schreibweise $v(t_\nu) = 0$, $t_\nu = \varphi_\nu(t_0)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es sei $j_\nu = (t_\nu, t_{\nu+1})$.

Ferner sei $x_0 \in j_0$ eine beliebige Zahl und $x_\nu = \varphi_\nu(x_0)$; wir haben also $x_\nu \in j_\nu$.

Nun definieren wir im Intervall j die Funktion u, die wir gelegentlich mit

$$v(t) \int\limits_{(x)}^t \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)} \tag{2}$$

bezeichnen:

$$u(t) = \begin{cases} v(t) \displaystyle\int\limits_{x_\nu}^t \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)} & \text{für} \quad t \in j_\nu, \\ -\dfrac{1}{v'(t_\nu)} & \text{für} \quad t = t_\nu. \end{cases} \tag{3}$$

Zunächst sehen wir, daß die Funktion u in jedem Intervall j_ν eine Lösung der Differentialgleichung (q) darstellt, und zwar die Lösung mit den Anfangswerten

$$u(x_\nu) = 0, \qquad u'(x_\nu) = \frac{1}{v(x_\nu)}. \tag{4}$$

Ferner bestehen offenbar die Beziehungen

$$\lim_{t \to t_\nu -} u(t) = -\frac{1}{v'(t_\nu)} = \lim_{t \to t_\nu +} u(t).$$

Wie wir sehen, ist die Funktion u überall stetig und stellt in jedem Intervall j_ν die durch die Anfangswerte (4) festgelegte Lösung der Differentialgleichung (q) dar.

Nun sei $U(t)$, $t \in j$, das durch die Anfangswerte

$$U(x_0) = 0, \qquad U'(x_0) = \frac{1}{v(x_0)}$$

bestimmte Integral der Differentialgleichung (q).

Dann haben wir an jeder Stelle x_ν

$$U(x_\nu) = 0$$

und ferner wegen § 13, (5)

$$U'(x_\nu) = U'[\varphi_\nu(x_0)] = (-1)^\nu \frac{U'(x_0)}{\sqrt{\varphi_\nu'(x_0)}} = \frac{1}{(-1)^\nu\, v(x_0)\, \sqrt{\varphi_\nu'(x_0)}} = \frac{1}{v[\varphi_\nu(x_0)]} = \frac{1}{v(x_\nu)} .$$

Folglich hat das Integral U und seine Ableitung U' an der Stelle x_ν dieselben Werte wie die Funktionen u, u'. Daraus schließen wir, daß die Funktionen u und U in jedem Intervall j_ν übereinstimmen. Es gilt also $u(t) = U(t)$ im ganzen Intervall j, mit eventuellen Ausnahmen an den Stellen t_ν. Nun folgt aber aus der Stetigkeit der Funktionen u, U im Intervall j die Gültigkeit dieser Gleichheit auch an jeder Stelle t_ν. Damit ist gezeigt, daß die Funktion u ein Integral der Differentialgleichung (q) im Intervall j darstellt.

Wir fassen zusammen:

Die Funktion

$$u(t) = v(t) \int\limits_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)}$$

stellt im Intervall j das durch die Anfangswerte $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = \frac{1}{v(x_0)}$ bestimmte Integral der Differentialgleichung (q) *dar. Die Integrale u, v sind unabhängig; die Wronskische Determinante der Basis (u, v) ist gleich -1.*

Zu diesem Resultat sei folgendes bemerkt:

Jede (erste) Phase α der Basis (u, v) erfüllt im Intervall j, mit Ausnahme der Zahlen t_ν, die Beziehung

$$\tan \alpha(t) = \int\limits_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)} .$$

Betrachten wir insbesondere die Phase α_0 mit der Nullstelle x_0.

Dieselbe ist offenbar durch die Formeln

$$\alpha_0(t) = \operatorname{Arctan} \int\limits_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)} , \qquad \alpha_0(t_\nu) = (2\nu - 1)\frac{\pi}{2}$$

gegeben; Arctan bedeutet in dem Intervall j_ν denjenigen Zweig dieser Funktion, der an der Stelle x_ν den Wert $\nu\pi$ annimmt.

Die Anfangswerte der Phase α_0 an der Stelle x_0 sind

$$\alpha_0(x_0) = 0, \quad \alpha_0'(x_0) = \frac{1}{v^2(x_0)}, \quad \alpha_0''(x_0) = -2\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)} .$$

Die Formel § 5, (18) ergibt

$$q(t) = -\left\{ \int\limits_{(x)} \frac{d\sigma}{v^2(\sigma)}, t \right\} .$$

2. Verlängerung der Ableitungen von Lösungen der Differentialgleichung (q). Es sei wieder v ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (q). t_0' sei eine Nullstelle seiner Ableitung v'. Analog den obigen Überlegungen definieren wir $v'(t_\nu') = 0$, $t_\nu' = \psi_\nu(t_0')$; $j_\nu' = (t_\nu', t_{\nu+1}')$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Wir wählen eine Zahl $x_0' \in j_0'$ und setzen $x_\nu' = \psi_\nu(x_0')$. Unsere Voraussetzung $q < 0$ für alle $t \in j$ enthält $x_\nu' \in j_\nu'$.

Wir definieren im Intervall j die Funktion u', die wir gelegentlich mit

$$v'(t) \int\limits_{(x')}^{t} \frac{q(\sigma)}{v'^2(\sigma)}\, d\sigma$$

bezeichnen:

$$u'(t) = \begin{cases} v'(t) \displaystyle\int\limits_{x_\nu'}^{t} \frac{q(\sigma)}{v'^2(\sigma)}\, d\sigma & \text{für} \quad t \in j_\nu', \\ -\dfrac{1}{v(t_\nu')} & \text{für} \quad t = t_\nu'. \end{cases}$$

Ähnlich wie oben beweist man:

Die Funktion

$$u'(t) = v'(t) \int\limits_{(x')}^{t} \frac{q(\sigma)}{v'^2(\sigma)}\, d\sigma$$

stellt im Intervall j die Ableitung des durch die Anfangswerte $u(x_0') = \dfrac{1}{v'(x_0')}$, $u'(x_0') = 0$ *bestimmten Integrals u von* (q) *dar. Die Integrale u, v sind unabhängig; die Wronskische Determinante der Basis* (u, v) *ist gleich* 1.

§ 15. Differentialgleichungen mit denselben Zentraldispersionen 1. Art

In § 13, Nr. 12 haben wir gesagt, daß zu jeder im Intervall $(j =)$ $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion φ mit den Eigenschaften § 13, (42) unendlich viele (von der Mächtigkeit $\aleph$) oszillatorische Differentialgleichungen (q) existieren, deren Fundamentaldispersion 1. Art genau die Funktion φ ist.

Die Menge aller in einem Intervall $j = (a, b)$ definierten und oszillatorischen Differentialgleichungen (q) zerfällt in Klassen, wobei jede von allen Differentialgleichungen (q) mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art gebildet wird. Nun entsteht bei jeder oszillatorischen Differentialgleichung (q) jede 1-Zentraldispersion φ_ν durch Iteration der zugehörigen Fundamentaldispersion 1. Art oder deren inversen Funktion, also $\varphi_\nu = \varphi_1^\nu$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (§ 12, (2)). Daraus folgt, daß für alle in einer Klasse enthaltenen Differentialgleichungen (q) die 1-Zentraldispersionen φ_ν die gleichen sind.

Im folgenden werden wir uns mit Differentialgleichungen (q) mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art befassen. Der Kürze halber sprechen wir gelegentlich anstatt von Differentialgleichungen (q), ($\bar{q}$) mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art von Trägern q, $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion. Statt φ_1 schreiben wir kürzer φ.

Es sei nun (q) eine oszillatorische Differentialgleichung im Intervall $j = (a, b)$.

1. Integralstreifen. Es sei φ eine im Intervall j definierte Funktion mit den Eigenschaften § 13, (42).

Mit $Q\varphi$, kürzer: Q, wollen wir die Menge aller Träger mit derselben Fundamentaldispersion φ und mit ($Q\varphi$), kürzer: (Q), die Menge aller Differentialgleichungen (q), $q \in Q\varphi$, bezeichnen. Alle Differentialgleichungen (q) $\in$ (Q) haben also jede 1-Zentraldispersion φ_ν gemeinsam.

Ferner sei $J\varphi$, kürzer: J, die aus allen Integralen der in der Menge (Q) enthaltenen Differentialgleichungen (q) bestehende Menge. Da diese Differentialgleichungen (q) jede 1-Zentraldispersion φ_ν gemeinsam haben, besteht J aus Funktionen mit denselben Nullstellen. Damit ist folgendes gemeint: Zwei beliebige Integrale $y, \bar{y} \in J$, die eine Nullstelle gemeinsam haben, haben alle ihre Nullstellen gemeinsam.

Es sei $c \in j$ eine beliebige Zahl. Unter dem *Integralstreifen* der Menge (Q) mit dem Knoten c, kürzer: Integralstreifen (c), verstehen wir die von allen an der Stelle c verschwindenden Elementen von J gebildete Menge, die wir mit Bc bezeichnen. Der Integralstreifen Bc besteht also aus allen an der Stelle c verschwindenden Integralen aller Differentialgleichungen (q), deren Fundamentaldispersion 1. Art φ ist. Die Elemente von Bc haben also dieselben Nullstellen; diese Nullstellen heißen die *Knotenpunkte* des Integralstreifens Bc. Wie wir sehen, ist der Integralstreifen Bc durch jeden seiner Knotenpunkte c' eindeutig bestimmt: $Bc = Bc'$.

2. Wir sind nun in der Lage, den Inhalt dieses Paragraphen genauer zu beschreiben. Er besteht im wesentlichen in der Untersuchung folgender Fragen:

1. Eigenschaften der Integralstreifen der Menge ($Q\varphi$).
2. Gegenseitige Beziehungen zwischen Trägern mit derselben Fundamentaldispersion φ, d. h. zwischen Funktionen $q, \bar{q} \in Q\varphi$.
3. Explizite Formeln für Träger mit derselben Fundamentaldispersion φ.
4. Mächtigkeit der Menge $Q\varphi$ im Fall $j = (-\infty, \infty)$.

3. Eigenschaften der Integralstreifen der Menge ($Q\varphi$). Es sei Bc ein Integralstreifen der Menge ($Q\varphi$).

Zunächst wollen wir zeigen, daß *für jedes Integral $y \in Bc$ die folgenden Formeln bestehen:*

$$\int_x^{\varphi(x)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma = \frac{1}{c - x} + \frac{1}{\varphi(x) - c}; \tag{1}$$

$$\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma = \frac{1 + \varphi'(c)}{\varphi(c) - c} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)}; \tag{2}$$

dabei ist x eine beliebige den Ungleichungen $x < c < \varphi(x)$ genügende Zahl.

In der Tat, es sei $(q) \in (Q\varphi)$ eine beliebige Differentialgleichung.

Die Formel (1) haben wir schon früher abgeleitet (§ 5, (45)). Es ist also nur noch (2) zu beweisen.

Es sei $y \in Bc$ ein Integral der Differentialgleichung (q). Wir wählen eine beliebige Zahl t so, daß $c < t < \varphi(c)$ ist, und wenden die Formeln § 5, (43), (42) auf die Intervalle $[c, t]$ und $[t, \varphi(c)]$ an:

$$\int_c^t \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma = -\cot \alpha_0(t) + \frac{1}{t-c},$$

$$\int_t^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2\varphi(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma = \cot \alpha_1(t) - \frac{1}{t - \varphi(c)};$$

α_0 und α_1 sind die durch die folgenden Anfangswerte bestimmten ersten Phasen der Differentialgleichung (q):

$$\alpha_0(c) = 0, \quad \alpha_0'(c) = 1, \quad \alpha_0''(c) = 0; \quad \alpha_1\varphi(c) = 0, \quad \alpha_1'\varphi(c) = 1, \quad \alpha_1''\varphi(c) = 0.$$

Aus der abelschen Funktionalgleichung $\alpha_1\varphi = \alpha_1 + \pi$ und aus ihren Ableitungen sehen wir, daß die Funktionen α_1, α_1', α_1'' an der Stelle c folgende Werte annehmen: $\alpha_1(c) = -\pi$, $\alpha_1'(c) = \varphi'(c)$, $\alpha_1''(c) = \varphi''(c)$.

Folglich besteht nach § 5, (39) zwischen den Phasenwerten $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ die Beziehung

$$-\cot \alpha_0(t) + \varphi'(c) \cdot \cot \alpha_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)}. \tag{3}$$

Die obigen Formeln, die sich auch in der Form

$$\int_c^t \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma$$
$$= -\cot \alpha_0(t) + \frac{1}{t-c} + \varphi'(c)\left[\frac{1}{t-\varphi(c)} - \frac{1}{c - \varphi(c)}\right],$$

$$\int_t^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma$$
$$= \varphi'(c)\left[\cot \alpha_1(t) - \frac{1}{t - \varphi(c)}\right] + \frac{1}{\varphi(c) - c} - \frac{1}{t-c}$$

schreiben lassen, ergeben nach Addition

$$\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma$$
$$= -\cot \alpha_0(t) + \varphi'(c) \cdot \cot\alpha_1(t) + \frac{1}{\varphi(c) - c}[1 + \varphi'(c)].$$

Daraus erhalten wir wegen (3) die Formel (2).

Zu diesem Resultat wollen wir bemerken, daß man auf Grund der Beziehungen § 5, (46) bzw. (49) Formeln herleiten kann, die die obigen Beziehungen (1), (2) für 1-Zentraldispersionen φ_ν mit beliebigen Indizes ν $(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ verallgemeinern bzw. analoge Formeln für die 2-Zentraldispersionen ψ_ν darstellen. Wir wollen uns jedoch damit nicht weiter befassen, da die Beziehungen (1), (2) für unsere Zwecke ausreichen.

Die auf den linken Seiten der Formeln (1), (2) *auftretenden* (*Riemannschen*) *Integrale hängen von den Elementen y des Integralstreifens Bc nicht ab.* Mit anderen Worten: Diese Integrale sind in bezug auf die Elemente y des Integralstreifens Bc invariant.

Eine weitere Eigenschaft des Integralstreifens Bc besteht darin, daß *das Verhältnis der Ableitungen y', $\bar{y}'$ von zwei beliebigen Elementen y, $\bar{y}$ des Integralstreifens Bc in allen Knotenpunkten dieses letzteren denselben Wert* $(= k)$ *besitzt.*

In der Tat, es sei c' ein beliebiger Knotenpunkt von Bc. Dann haben wir $c' = \varphi_\nu(c)$, ν ganz, und die Formel § 13, (5) ergibt

$$(-1)^\nu \frac{y'(c)}{y'(c')} = \sqrt{\varphi_\nu'(c)} = (-1)^\nu \frac{\bar{y}'(c)}{\bar{y}'(c')}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ferner zeigen wir:

Für je zwei Elemente y, $\bar{y}$ des Integralstreifens Bc besteht im Intervall j die Beziehung

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{\bar{y}'^2(c)}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0. \tag{4}$$

Zunächst sieht man aus (1) und (2), daß die Formel (4) richtig ist, wenn die Zahl t $(= x)$ den Ungleichungen $t \leqq c < \varphi(t)$ entspricht. Es sei nun $t \in j$ eine beliebige Zahl. Offenbar gibt es einen den Ungleichungen $t \leqq c' < \varphi(t)$ entsprechenden Knotenpunkt c' von Bc. Folglich gilt die mit c' statt mit c gebildete Formel (4). Nun hat man nach dem obigen Resultat $y'^2(c') = \lambda y'^2(c)$, $\bar{y}'^2(c') = \lambda \bar{y}'^2(c)$, wobei λ (> 0) eine Zahl ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die obigen Eigenschaften die Integralstreifen der Menge $(Q\varphi)$ charakterisieren und betrachten dazu zwei oszillatorische Differentialgleichungen (q), (q) im Intervall $j = (a, b)$ mit den Fundamentaldispersionen 1. Art φ, $\bar{\varphi}$.

Wir nehmen an, daß die Differentialgleichungen (q), $(\bar{\text{q}})$ Integrale y, $\bar{y}$ zulassen, die dieselben Nullstellen haben und so beschaffen sind, daß das Verhältnis ihrer Ableitungen $y' : \bar{y}'$ $(= k)$ an jeder dieser Nullstellen x dasselbe ist. Schließlich sei für alle von den Nullstellen x verschiedenen Werte $t \in j$ wenigstens eine und stets dieselbe der beiden Beziehungen

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0, \qquad \int_t^{\bar{\varphi}(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0 \tag{5}$$

erfüllt.

Dann stimmen die Fundamentaldispersionen φ, $\bar{\varphi}$ überein, $\varphi = \bar{\varphi}$, und folglich sind y, $\bar{y}$ Elemente des Integralstreifens Bx der Menge $(Q\varphi)$.

In der Tat, setzen wir z. B. die Gültigkeit der ersten Beziehung (5) voraus. $t \in j$ sei eine beliebige Zahl.

Ist t eine (gemeinsame) Nullstelle der Integrale $y, \bar{y}$, so folgt aus der Definition von $\varphi, \bar{\varphi} : \varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$. Wir nehmen also $y(t), \bar{y}(t) \neq 0$ an.

Es seien c_{-1}, c, c_1 die durch die Ungleichungen $c_{-1} < t < c < c_1$ bestimmten aufeinanderfolgenden Nullstellen von $y, \bar{y}$. Die Werte $\varphi(t), \bar{\varphi}(t)$ liegen also zwischen c und c_1.

Nach (5) ist

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma = \int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{\bar{y}'^2(c)}{\bar{y}^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma.$$

Aus dieser Beziehung folgt im Hinblick auf die Formel § 5, (44) $\cot \bar{\alpha}\varphi(t) = \cot \bar{\alpha}(t)$; $\bar{\alpha}$ ist die durch die Anfangswerte $\bar{\alpha}(c) = 0$, $\bar{\alpha}'(c) = 1$, $\bar{\alpha}''(c) = 0$ bestimmte Phase der Differentialgleichung $(\bar{q})$. Wir haben also $\bar{\alpha}\varphi(t) = \bar{\alpha}(t) + m\pi$, m ganz. Da aber $\varphi(t)$ zwischen c und c_1 liegt, ist $m = 1$ und folglich $\bar{\alpha}\varphi(t) = \bar{\alpha}(t) + \pi$. Vergleicht man diese Beziehung mit der abelschen Funktionalgleichung $\bar{\alpha}\bar{\varphi}(t) = \bar{\alpha}(t) + \pi$, so erhält man $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

5. Verhältnisse von Elementen eines Integralstreifens. Wir betrachten wiederum einen Integralstreifen Bc der Menge $(Q\varphi)$.

Es seien $y, \bar{y} \in Bc$ beliebige Elemente von Bc und w die „Wronskische Determinante" von $y, \bar{y}$:

$$w = y\bar{y}' - y'\bar{y}. \tag{6}$$

Die Funktion w hat an jeder Stelle $t \in j$ die Ableitung

$$w' = (\bar{q} - q)\, y\bar{y}. \tag{7}$$

Man sieht, daß die Funktionen w, w' an jedem Knotenpunkt $c_\nu \big(= \varphi_\nu(c)\big)$ von Bc verschwinden ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; c_0 = c$):

$$w(c_\nu) = 0, \quad w'(c_\nu) = 0. \tag{8}$$

Ferner haben wir nach § 13, (5) und (7) im Intervall j

$$w\varphi_\nu = w, \tag{9}$$

$$(\bar{q}\varphi_\nu - q\varphi_\nu)\, \varphi_\nu'^2 = \bar{q} - q. \tag{10}$$

Nun definieren wir im Intervall j die Funktion p:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\bar{y}(t)}{y(t)} & \text{für} \quad t \neq c_\nu; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad c_0 = c, \\[2ex] \dfrac{\bar{y}'(c)}{y'(c)} & \text{für} \quad t = c_\nu. \end{cases} \tag{11}$$

Der weitere Inhalt dieses Paragraphen besteht in Untersuchungen über Eigenschaften der Funktion p.

Zunächst gilt nach § 13, (5) im Intervall j

$$p\varphi_\nu(t) = p(t). \tag{12}$$

Ferner sieht man, daß die Funktion p stets positiv oder negativ ist, je nachdem, ob $\bar{y}'(c) : y'(c) > 0$ oder < 0 gilt.

In der Tat, es sei z. B. $\bar{y}'(c) : y'(c) > 0$. Dann sind beide Funktionen $y, \bar{y}$ im Intervall $(c, \varphi(c))$ positiv oder negativ, und folglich ist die Funktion p positiv. Wir haben also $p(t) > 0$ für $t \in [c, \varphi(c)]$ und ferner, nach (12), für alle $t \in j$.

Die Funktion p ist im Intervall j stetig. Dies folgt daraus, daß sie nach Definition an jeder Stelle $t \neq c_\nu$ stetig ist und für $t \to c_\nu$ dem Grenzwert $p(c_\nu)$ $(= p(c))$ zustrebt.

Die Funktion p gehört sogar der Klasse C_2 an. Offenbar ist sie an jeder Stelle $t \neq c_\nu$ zweimal stetig differenzierbar:

$$p' = \frac{w}{y^2}, \tag{13}$$

$$p'' = (\bar{q} - q)\, p - 2\frac{y'}{y} p'. \tag{14}$$

Ferner haben wir nach der Regel von DE L'HOSPITAL

$$\lim_{t \to c_\nu} p'(t) = 0, \quad \lim_{t \to c_\nu} p''(t) = \frac{1}{3}[\bar{q}(c_\nu) - q(c_\nu)]\, p(c_\nu). \tag{15}$$

Daraus schließen wir, daß die Funktionen p, p' an der Stelle c_ν Ableitungen $p'(c_\nu)$, $p''(c_\nu)$ besitzen, die gleich den Grenzwerten (15) sind. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nach (4) und (11) gilt im Intervall j

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right] \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0. \tag{16}$$

Schließlich bemerken wir:

Die in (16) unter dem Integralzeichen stehende Funktion, deren Wert an jeder Stelle c_ν als der Grenzwert (17) definiert wird, ist im Intervall j stetig:

$$\lim_{\sigma \to c_\nu} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right] \frac{1}{y^2(\sigma)} = -\frac{p''(c_\nu)}{p^3(c_\nu)\, y'^2(c_\nu)}. \tag{17}$$

Wir fassen zusammen:

Die Funktion p hat folgende Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l}
1^0.\ p \neq 0 \quad \text{für} \quad t \in j; \\
2^0.\ p\varphi(t) = p(t) \quad \text{für} \quad t \in j; \\
3^0.\ p \in C_2; \\
4^0.\ p'(c) = 0; \\
5^0.\ \displaystyle\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right] \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0.
\end{array}\right\} \tag{18}$$

6. Gegenseitige Beziehungen zwischen Trägern mit derselben Fundamentaldispersion φ. Wir betrachten beliebige Elemente $q, \bar{q}$ der Menge $Q\varphi$: $q, \bar{q} \in Q\varphi$. Die Differentialgleichungen (q), ($\bar{\text{q}}$) haben also dieselbe Fundamentaldispersion φ.

Wir setzen zur Vereinfachung der Schreibweise $\Delta = \bar{q} - q$.

Es sei $c \in j$ eine beliebige Zahl. Wir wollen uns mit der Anzahl der zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten des Integralstreifens Bc liegenden Nullstellen der Funktion Δ befassen. Dabei schließen wir den Fall einer unendlichen Anzahl nicht aus.

Die Formel (10) zeigt: Aus $\Delta(c) = 0$ folgt für jeden Knotenpunkt c_ν von Bc: $\Delta(c_\nu) = 0$. Mit anderen Worten: Haben die Träger $q, \bar{q}$ an der Stelle c denselben Wert, so haben sie dieselben Werte in jedem Knotenpunkt von Bc.

Ferner zeigen wir: Die Anzahl der zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten von Bc liegenden Nullstellen von Δ ist stets dieselbe. In der Tat, es seien $c, \varphi(c)$ und $c', \varphi(c')$ zwei benachbarte Knotenpunkte von Bc und z. B. $c < c'$. Dann ist $c' = \varphi_\nu(c)$, $\varphi(c') = \varphi_\nu\varphi(c)$ mit einem geeigneten positiven Index ν. Da die Funktion φ_ν wächst, bildet sie das Intervall $(c, \varphi(c))$ auf $(c', \varphi(c'))$ schlicht ab. Die Formel (10) zeigt, daß bei dieser Abbildung Nullstellen von Δ auf Nullstellen abgebildet werden. Daraus folgt die Behauptung.

Man sieht, daß die Anzahl der zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten des Integralstreifens Bc liegenden Stellen, an denen die Träger $q, \bar{q}$ gleiche Werte annehmen, stets dieselbe ist und folglich von der Wahl dieser Knotenpunkte nicht abhängt.

Nun wollen wir den folgenden merkwürdigen Satz beweisen:

Satz. *Die Anzahl der in einem beliebigen Intervall* $[c, \varphi(c))$, $c \in j$, *liegenden Nullstellen der Funktion* Δ *ist stets* $\geqq 4$.

Beweis. Es seien $y, \bar{y} \in Bc$ beliebige Elemente von Bc und p die im Sinne der Formel (11) im Intervall j definierte Funktion.

Zunächst zeigen die Beziehungen (18), 1^0, 5^0, daß die Funktion p an einer Stelle $x \in (c, \varphi(c))$ den Wert $p(c)$ annimmt. Folglich hat die Funktion p an den Stellen $c < x < \varphi(c)$ denselben Wert $p(c)$. Daraus schließen wir, daß ihre Ableitung p' wenigstens an zwei Stellen $x_1' \in (c, x)$, $x_2' \in (x, \varphi(c))$ verschwindet. Nun sind nach (13) die Zahlen x_1', x_2' Nullstellen der Funktion w. Folglich hat die Funktion w an den Stellen $c < x_1' < x_2' < \varphi(c)$ denselben Wert 0. Daraus schließen wir, daß ihre Ableitung w' wenigstens an drei Stellen $x_1 \in (c, x_1')$, $x_2 \in (x_1', x_2')$, $x_3 \in (x_2', \varphi(c))$ verschwindet. Nach (7) sind die Zahlen x_1, x_2, x_3 Nullstellen der Funktion Δ. Dies ist der erste Teil unseres Beweises. Im zweiten Teil zeigen wir: Ist die Funktion Δ an der Stelle c (und folglich auch $\varphi(c)$) von Null verschieden, so ist die Anzahl ihrer im Intervall $(c, \varphi(c))$ liegenden Nullstellen $\geqq 4$.

In der Tat, nehmen wir an, es sei $\Delta(c) \neq 0$, und es gäbe genau drei im Intervall $(c, \varphi(c))$ liegende Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3$ von Δ. Dann gilt

$$c < x_1 < x_2 < x_3 < \varphi(c) < \varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(x_3),$$

wobei zwischen je zwei benachbarten Zahlen dieser achtgliedrigen Folge die Funktion Δ stets von Null verschieden ist. Betrachten wir nun den Integralstreifen Bx_1. Man sieht, daß zwischen den benachbarten Knotenpunkten x_1, $\varphi(x_1)$ von Bx_1 genau zwei Nullstellen x_2, x_3 von Δ liegen.

Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann unser Resultat auch folgendermaßen formulieren:

Zwei beliebige Träger q, $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art φ nehmen in jedem Intervall $[c, \varphi(c))$, $c \in j$, wenigstens an vier Stellen dieselben Werte an.

Wir werden bald zeigen (Nr. 8), daß dieser Satz nicht verbessert werden kann und folglich endgültig ist: *Es gibt Träger q, $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion φ, bei denen die erwähnte untere Grenze 4 tatsächlich erreicht ist.*

7. Explizite Formel für Träger mit derselben Fundamentaldispersion φ. Es sei q der Träger einer oszillatorischen Differentialgleichung (q) im Intervall $j = (a, b)$ und φ seine Fundamentaldispersion 1. Art.

Ferner sei $c \in j$ eine beliebige Zahl und $y \in Bc$ ein beliebiges Element des Integralstreifens Bc der Menge $(Q\varphi)$. y ist also ein an der Stelle c verschwindendes Integral einer Differentialgleichung aus der Menge $(Q\varphi)$; seine Nullstellen, also die Knotenpunkte von Bc, sind folglich $c_\nu = \varphi_\nu(c)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $c_0 = c$.

Es gilt der folgende

Satz. *Alle Träger $\bar{q}$ mit der Fundamentaldispersion φ sind genau durch die Formel*

$$\bar{q} = q + \frac{p''}{p} + 2\frac{y'}{p} \cdot \frac{p'}{y} \tag{19}$$

gegeben. p ist eine beliebige Funktion im Intervall j mit den Eigenschaften (18), *und der Wert des letzten Gliedes an jeder Stelle c_ν ist definiert durch $2p''(c_\nu) : p(c)$.*

Beweis. a) Es sei $\bar{q}$ ein beliebiger Träger mit der Fundamentaldispersion φ, also $q, \bar{q} \in Q\varphi$.

Ferner sei $\bar{y}$ ein in dem Integralstreifen Bc enthaltenes Integral der Differentialgleichung $(\bar{q})$ und p die im Sinne von (11) im Intervall j definierte Funktion. Die Funktion p hat also die Eigenschaften (18), und es besteht an jeder Stelle $t \in j$ die Beziehung (14). Daraus folgt die Formel (19).

b) Es sei nun $\bar{q}$ eine im Sinne von (19) im Intervall j definierte Funktion. p ist natürlich eine Funktion mit den Eigenschaften (18), und der Wert des letzten Gliedes an jeder Stelle c_ν ist wie oben erklärt.

Durch elementare Berechnungen stellt man fest, daß die Funktion

$$\bar{y}(t) = p(t)\, y(t)$$

ein, und zwar das durch die Anfangswerte $\bar{y}(c) = 0$, $\bar{y}'(c) = p(c)\, y'(c)$ bestimmte Integral der Differentialgleichung $(\bar{q})$ ist. Die Funktionen y, $\bar{y}$ haben offenbar dieselben Nullstellen $c_\nu = \varphi_\nu(c)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ c_0 = c)$ und man sieht im Hinblick auf die Beziehung $\bar{y}' = p'y + py'$, daß das Verhältnis $y' : \bar{y}'$ ihrer Ableitungen an allen diesen Nullstellen dasselbe ist, und zwar gleich $1 : p(c)$.

Es sei nun $F(\sigma)$ die im Intervall j durch den unter dem Integralzeichen in (18), 5^0 stehenden Ausdruck erklärte Funktion; ihr Wert an jeder Stelle c_ν ist als der Grenzwert (17) erklärt.

Die Funktion F ist im Intervall j stetig. Ferner erkennt man an Hand von (18), 2^0 und § 13, (5), daß für alle $t \in j$ die Beziehung

$$F[\varphi(t)]\, \varphi'(t) = F(t)$$

gilt. Daraus folgt

$$\left[\int_t^{\varphi(t)} F(\sigma)\, d\sigma\right]' = 0$$

und ferner nach (18), 5⁰

$$\int_t^{\varphi(t)} F(\sigma)\, d\sigma = \int_c^{\varphi(c)} F(\sigma)\, d\sigma = 0\,.$$

Es gilt also für alle $t \in j$ die Beziehung

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0 \quad (k = 1 : p(c)).$$

Die Anwendung des Resultates von Nr. 4 ergibt, daß die Fundamentaldispersion 1. Art der Differentialgleichung $(\bar{\text{q}})$ mit φ übereinstimmt.

Damit ist der Beweis beendet.

8. Explizite Formeln für elementare Träger. In § 8, Nr. 4 haben wir alle elementaren Träger in einem Intervall j vermöge der Formel (6) bestimmt. Der Satz von Nr. 7 führt zu weiteren und vielleicht einfacheren expliziten Ausdrücken für elementare Träger, jetzt allerdings im Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Ein elementarer Träger q im Intervall j $\big(= (-\infty, \infty)\big)$ ist dadurch charakterisiert, daß jede seiner (ersten) Phasen α elementar ist, d. h., für alle $t \in j$ ist die Beziehung $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha'$ erfüllt. Wir wollen auch daran erinnern, daß bei Differentialgleichungen (q) mit elementaren Trägern und nur mit solchen die Nullstellen aller ihrer Integrale π-äquidistant verteilt sind.

Man sieht, daß ein im Intervall j definierter Träger q genau dann elementar ist, wenn seine Fundamentaldispersion 1. Art, φ, linear ist, und zwar $\varphi(t) = t + \pi$.

Die elementaren Träger im Intervall j sind also genau die Träger mit der Fundamentaldispersion $\varphi(t) = t + \pi$. Unter ihnen kommt natürlich der Träger -1 vor, dessen Integral y mit den (an einer beliebig gewählten Stelle $c \in j$ gebildeten) Anfangswerten $y(c) = 0$, $y'(c) = 1$ durch die Funktion $y(t) = \sin(t - c)$ gegeben ist.

Wendet man das Resultat von Nr. 7 an, so erhält man den

Satz. *Alle elementaren Träger im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ sind genau die durch die folgende Formel gegebenen Funktionen:*

$$\bar{q}(t) = -1 + \frac{p''(t)}{p(t)} + 2\,\frac{p'(t)}{p(t)} \cot(t - c)\,; \tag{20}$$

c ist eine beliebig gewählte Zahl und p eine Funktion im Intervall j mit den folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &1^0.\ p \neq 0 \quad \text{für} \quad t \in j;\\ &2^0.\ p(t+\pi) = p(t) \quad \text{für} \quad t \in j;\\ &3^0.\ p \in C_2;\\ &4^0.\ p'(c) = 0;\\ &5^0.\ \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right] \frac{d\sigma}{\sin^2(\sigma - c)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Setzt man $p(t) = p(c) \cdot \exp f(t)$, so ergibt die Formel (20)

$$\bar{q}(t) = -1 + f''(t) + f'^2(t) + 2f'(t) \cdot \cot(t - c), \tag{22}$$

wobei f eine Funktion im Intervall $(-\infty, \infty)$ bezeichnet mit den folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} & f(t+\pi) = f(t) \quad \text{für} \quad t \in j; \quad f \in C_2; \quad f(c) = f'(c) = 0; \\ & \int_0^\pi \frac{\exp\bigl(-2f(\sigma)\bigr) - 1}{\sin^2(\sigma - c)}\, d\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(22) ist die Formel von F. Neuman ([53]). Wählt man insbesondere

$$f(t) = -\frac{1}{2}\log\left[1 - \frac{1}{3}\sin 2(t-c)\sin^2(t-c)\right], \tag{24}$$

so erhält man das in § 8, (7) angeführte einparametrige System von elementaren Trägern $q(t \mid c)$.

Dieses Resultat liefert uns auch ein einfaches Beispiel von Trägern q, $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion φ $(= t + \pi)$, bei denen die in dem Satz von Nr. 6 erwähnte untere Grenze 4 tatsächlich erreicht ist. Dies gilt z. B. von den Trägern $q(t) = -1$ und $\bar{q}(t) = q(t \mid 0)$. In diesem Fall ist $\Delta(t) = \bar{q}(t) - q(t) = \sin 4t + \frac{1}{3}\sin^4 t$. Man sieht leicht ein, daß bei jeder Zahl $c \in j$ die Anzahl der in dem Intervall $[c, c + \pi)$ liegenden Nullstellen der Funktion Δ genau 4 ist.

9. Beziehungen zwischen ersten Phasen von Differentialgleichungen mit derselben Fundamentaldispersion φ. Es seien (q), ($\bar{\text{q}}$) oszillatorische Differentialgleichungen im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ und φ, $\bar{\varphi}$ ihre Fundamentaldispersionen 1. Art. Ferner seien α, $\bar{\alpha}$ beliebige (erste) Phasen von (q) bzw. ($\bar{\text{q}}$).

Es gilt der

Satz. *Die Fundamentaldispersionen φ, $\bar{\varphi}$ stimmen genau dann überein, wenn die (zueinander inversen) Phasenfunktionen $\gamma = \alpha\bar{\alpha}^{-1}$, $\gamma^{-1} = \bar{\alpha}\alpha^{-1}$ elementar sind, wenn also für alle $t \in j$*

$$\gamma(t + \pi) = \gamma(t) + \eta\pi, \quad \gamma^{-1}(t+\pi) = \gamma^{-1}(t) + \eta\pi$$

$$\bigl(\eta = \operatorname{sgn}\gamma' = \operatorname{sgn}(\gamma^{-1})'\bigr)$$

gilt.

Beweis. a) Es sei $\varphi = \bar{\varphi}$. Dann bestehen im Intervall j die abelschen Funktionalgleichungen

$$\alpha\varphi = \alpha + \varepsilon\pi, \quad \bar{\alpha}\bar{\varphi} = \bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}\pi \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn}\alpha', \bar{\varepsilon} = \operatorname{sgn}\bar{\alpha}')$$

und ihre Folgerungen

$$\bar{\alpha}^{-1}(\bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}\pi) = \alpha^{-1}(\alpha + \varepsilon\pi),$$

$$\gamma(\bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}\pi) = \alpha + \varepsilon\pi,$$

$$\gamma(t + \bar{\varepsilon}\pi) = \gamma(t) + \varepsilon\pi \quad (t \in j).$$

Die letzte Formel ergibt
$$\gamma(t+\pi) = \gamma(t) + \varepsilon\bar{\varepsilon}\pi,$$
und man sieht im Hinblick auf $\operatorname{sgn}\gamma' = \varepsilon\bar{\varepsilon}$, daß die Phasenfunktion γ elementar ist. Dasselbe gilt natürlich von der Phasenfunktion γ^{-1}.

b) Die Phasenfunktionen γ, γ^{-1} seien elementar. Dann haben wir im Intervall j
$$\alpha = \gamma\bar{\alpha},$$
$$\alpha\bar{\varphi} = \gamma\bar{\alpha}\bar{\varphi} = \gamma(\bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}\pi) = \gamma\bar{\alpha} + \varepsilon\pi = \alpha + \varepsilon\pi = \alpha\varphi,$$
und daraus folgt $\varphi = \bar{\varphi}$.

Wir wollen nun den soeben bewiesenen Satz zur Herleitung einer weiteren expliziten Formel für Träger mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art anwenden.

Es seien q, $\bar{q} \in Q\varphi$ beliebige Träger mit derselben Fundamentaldispersion φ im Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Wählen wir beliebige erste Phasen α, $\bar{\alpha}$ von (q) bzw. ($\bar{\text{q}}$), dann gilt nach dem obigen Satz die Beziehung
$$\bar{\alpha} = \bar{\gamma}\alpha \tag{25}$$
mit einer geeigneten elementaren Phasenfunktion $\bar{\gamma}$. Diese letztere ist offenbar von der Klasse C_3 und stellt folglich eine erste Phase einer Differentialgleichung ($\mathfrak{g}$) dar. Da $\bar{\gamma}$ elementar ist, ist auch der Träger $\bar{g}$ elementar.

Aus der Beziehung (25) folgt vermöge Bildung von Schwarzschen Ableitungen an beliebiger Stelle $t \in j$
$$\{\tan\bar{\alpha}, t\} = \{\tan\bar{\gamma}, \alpha\}\,\alpha'^2 + \{\alpha, t\},$$
und daraus ergibt sich, im Hinblick auf § 5, (16), (18),
$$\bar{q} = q + [1 + \bar{g}\alpha]\,\alpha'^2.$$

Nun wenden wir die Formel (22) an (wobei wir t statt $t - c$ und $f(t)$ statt $f(t+c)$ schreiben) und erhalten
$$\bar{q} = q + [f''\alpha + f'^2\alpha + 2f'\alpha\cdot\cot\alpha]\,\alpha'^2. \tag{26}$$
Offenbar gilt:

Alle Träger $\bar{q}$ mit der Fundamentaldispersion φ sind genau durch die Formel (26) *gegeben. Dabei ist q ein* (*fester*) *Träger mit der Fundamentaldispersion φ, α eine* (*feste*) *erste Phase der Differentialgleichung* (q) *und f eine beliebige im Intervall j mit π periodische Funktion von der Klasse C_2 mit den Eigenschaften*
$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \int_0^\pi \left[\exp\left(-2f(\sigma)\right) - 1\right] d\sigma : \sin^2\sigma = 0.$$

10. Mächtigkeit der Menge $Q\varphi$. Wir wollen nun die Mächtigkeit der Menge $Q\varphi$ bestimmen. Zu diesem Zweck kehren wir zu den Erkenntnissen aus § 10 zurück. Dort haben wir die algebraische Struktur der Phasengruppe $\mathfrak{G}$ untersucht.

Wie wir wissen, bilden alle elementaren Phasen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Die Mächtigkeit der Menge aller Träger, deren erste Phasen in ein und demselben Element der rechtsseitigen Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ liegen, ist für alle Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ dieselbe und gleich der Mächtigkeit des Kontinuums $\aleph$.

Nun sei q ein Träger und φ seine Fundamentaldispersion 1. Art. Ferner sei α eine erste Phase der Differentialgleichung (q). Aus dem Satz in Nr. 9 folgt: Die ersten Phasen von Differentialgleichungen ($\bar{\text{q}}$) mit der Fundamentaldispersion φ sind genau die Phasen $\bar{\alpha} = \bar{\gamma}\alpha$, wobei $\bar{\gamma}$ alle elementaren Phasen, also alle Elemente der Untergruppe $\mathfrak{H}$, durchläuft. Mit anderen Worten: Die ersten Phasen mit der Fundamentaldispersion φ sind genau die in der rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ liegenden Elemente von $\mathfrak{G}$. Folglich sind alle Träger $\bar{q}$ mit der Fundamentaldispersion φ genau diejenigen Träger, deren erste Phasen $\bar{\alpha}$ in der Nebenklasse $\mathfrak{H}\alpha$ liegen. Nach dem Obigen ist die Mächtigkeit der Menge aller dieser Träger $\bar{q}$ gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.

Somit gilt der folgende

S a t z. *Die Mächtigkeit der Menge aller oszillatorischen Differentialgleichungen* (q) *im Intervall* $j = (-\infty, \infty)$ *mit derselben Fundamentaldispersion* 1. *Art* φ *ist von der Wahl dieser letzteren unabhängig und ist gleich der Mächtigkeit des Kontinuums* $\aleph$.

Zu diesem Resultat wollen wir die folgende Bemerkung hinzufügen:

In der numerischen Praxis der Differentialgleichungen kommt gelegentlich die Berechnung der Nullstellen von Integralen einer konkreten Differentialgleichung (q) vor. Solche Berechnung hängt natürlich von dem Träger q ab und kann sich unter Umständen sehr schwierig gestalten. Es liegt nun nahe, den Träger q durch einen „Repräsentanten" $\bar{q}$, d. h. einen Träger $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion 1. Art zu ersetzen. Dann haben die Integrale der Differentialgleichung ($\bar{\text{q}}$) dieselben Nullstellen wie diejenigen von (q). Man wird natürlich bestrebt sein, den Repräsentanten $\bar{q}$ in einer Weise zu wählen, daß sich die Berechnung der Nullstellen seiner Integrale möglichst einfach durchführen lasse. Das obige Resultat sichert, daß es stets unendlich viele Repräsentanten $\bar{q}$, und zwar sogar mit der Mächtigkeit $\aleph$ gibt, durch die der gegebene Träger q ersetzt werden kann. Somit kommt man zu dem folgenden Problem: Ausarbeitung von Methoden zur Ermittlung rechnerisch vorteilhafter Repräsentanten gegebener Träger.

§ 16. Differentialgleichungen mit zusammenfallenden Zentraldispersionen $\varkappa$-ter und ($\varkappa + 1$)-ter Art ($\varkappa = 1, 3$)

In diesem Paragraphen werden wir uns mit oszillatorischen Differentialgleichungen (q), deren Zentraldispersionen 1. und 2. Art φ_ν und ψ_ν bzw. 3. und 4. Art χ_ϱ und ω_ϱ übereinstimmen ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \varrho = \pm 1, \pm 2, \ldots$), befassen. Beispiele solcher Differentialgleichungen stellen offenbar die Differentialgleichungen (q) mit konstanten negativen Trägern q im Intervall $(-\infty, \infty)$ dar. Einen Träger q mit der Eigenschaft $\varphi_\nu = \psi_\nu$ bzw. $\chi_\varrho = \omega_\varrho$ wollen wir kurz *F*- bzw. *R-Träger* nennen.

Wir betrachten eine oszillatorische Differentialgleichung (q) in einem Intervall $j = (a, b)$ und setzen $q < 0$ für alle $t \in j$ voraus. Mit φ, ψ, χ, ω wollen wir die Fundamentaldispersionen der entsprechenden Arten bezeichnen; dieselben sind also im ganzen Intervall j definiert.

Einen bequemen Zugang zu der Theorie der F- und R-Träger bieten die Eigenschaften der normierten Polarfunktionen (§ 6).

Es sei $\vartheta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ eine Polarfunktion des Trägers q, und $h(\alpha)$, $-k(\beta)$, $p(\zeta)$ seien die entsprechenden 1-, 2-, 3-normierten Polarfunktionen. Die Funktionen h, $-k$, p sind also im Intervall $J = (-\infty, \infty)$ definiert, und es bestehen an jeder Stelle $t \in j$ die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(t) + h\alpha(t), & \alpha(t) &= \beta(t) + k\beta(t), \\ \beta(t) - \alpha(t) &= p\zeta(t), & \zeta(t) &= \alpha(t) + \beta(t), \\ n\pi < h\alpha(t) &= -k\beta(t) = p\zeta(t) < (n+1)\,\pi; & & n \text{ ganz}. \end{aligned}\right| \tag{1}$$

I. Theorie der F-Träger

1. Charakteristische Eigenschaften. Zunächst folgt aus den Formeln § 12, (2), (3): q ist dann und nur dann ein F-Träger, wenn seine Fundamentaldispersionen 1. und 2. Art übereinstimmen: $\varphi = \psi$ für alle $t \in j$.

In der nun folgenden Weiterführung dieser Theorie werden wir uns in der Regel auf Eigenschaften der 1-normierten Polarfunktion h stützen. Man könnte zu denselben Zwecken methodisch ebensogut Eigenschaften der 2- oder 3-normierten Polarfunktion $-k$ bzw. p anwenden. Wir werden uns diesbezüglich bei Gelegenheit mit einigen Bemerkungen begnügen.

Satz. *Der Träger q ist dann und nur dann ein F-Träger, wenn die 1-normierte Polarfunktion h mit π periodisch ist.*

Beweis. a) Es sei q ein F-Träger. Dann haben wir im Intervall j: $\varphi(t) = \psi(t)$. Daraus folgt im Hinblick auf (1)

$$\begin{aligned} h[\alpha(t) + \varepsilon\pi] = h\alpha\varphi(t) &= \beta\varphi(t) - \alpha\varphi(t) = \beta\psi(t) - \alpha\varphi(t) \\ &= (\beta(t) + \varepsilon\pi) - \big(\alpha(t) + \varepsilon\pi\big) = h\alpha(t) \end{aligned}$$

$$(\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'),$$

also $h(\alpha + \pi) = h(\alpha)$ für $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

b) Es sei die Polarfunktion h mit π periodisch, also $h(\alpha + \pi) = h(\alpha)$ für $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Dann haben wir an jeder Stelle $t \in j$

$$\beta\varphi(t) = \alpha\varphi(t) + h\alpha\varphi(t) = \alpha(t) + \varepsilon\pi + h[\alpha(t) + \varepsilon\pi] = \alpha(t) + \varepsilon\pi + h\alpha(t) = \beta(t) + \varepsilon\pi,$$

und daraus folgt $\psi(t) = \varphi(t)$.

Somit haben wir alle F-Träger bestimmt:

Die F-Träger sind genau durch die im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten mit π periodischen 1-normierten Polarfunktionen h bestimmt, und zwar im Sinne der Formel § 6, (29) $(h' > -1)$.

Ähnlich können die F-Träger durch π- bzw. 2π-Periodizität der 2- bzw. 3-normierten Polarfunktionen $-k$ bzw. p charakterisiert werden.

Ferner gilt der folgende

Satz (von M. Laitoch [41]). *Der Träger q ist dann und nur dann ein F-Träger, wenn seine Fundamentaldispersion 1. Art φ linear ist:*

$$\varphi(t) = ct + k \quad (c > 0,\ k = \text{const}). \tag{2}$$

Dies folgt unmittelbar aus dem vorherigen Satz und der Formel § 13, (32).

2. Wir wollen nun die Definitionsintervalle der F-Träger bestimmen.

Es sei q ein F-Träger. Die 1-normierte Polarfunktion h ist also mit π periodisch, und es besteht die Formel (2).

Aus § 13, (31) erhalten wir

$$c = \exp 2 \int_0^\pi \cot h(\varrho)\, d\varrho. \tag{3}$$

Nun ergibt die Formel (2) für die ν-te Zentraldispersion $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\varphi_\nu(t) = c^\nu t + k \frac{c^\nu - 1}{c - 1} \quad \text{oder} \quad \varphi_\nu(t) = t + \nu k, \tag{4}$$

je nachdem, ob $c \neq 1$ oder $c = 1$ ist.

Aus $\varphi_\nu(t) \to b$ bzw. $\varphi_\nu(t) \to a$ für $\nu \to \infty$ bzw. $\nu \to -\infty$ folgt (aus (4))

im Fall $c > 1$

$$b = \infty, \quad a = -k : (c - 1), \quad \text{also} \quad j = (a, \infty), \qquad a \text{ endlich};$$

im Fall $c < 1$

$$b = k : (1 - c), \quad a = -\infty, \quad \text{also} \quad j = (-\infty, b), \quad b \text{ endlich};$$

im Fall $c = 1$

$$k > 0, \quad a = -\infty, \quad b = \infty.$$

Somit haben wir die Definitionsintervalle aller F-Träger bestimmt:

Das Definitionsintervall j des F-Trägers q ist von einer oder von beiden Seiten unbeschränkt, je nachdem, ob

$$\int_0^\pi \cot h(\varrho)\, d\varrho \neq 0 \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist.

3. Elementare Träger. Zunächst sei daran erinnert, daß mit diesem Namen Träger bezeichnet werden, deren erste Phasen elementar sind (§ 8, Nr. 4).

Wir zeigen:

Der Träger q ist dann und nur dann elementar, wenn die 1-normierte Polarfunktion h mit π periodisch ist und die folgenden Beziehungen erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \cot h(\varrho)\, d\varrho = 0, \quad \int_0^{\varepsilon\pi} \left(\exp 2 \int_0^\sigma \cot h(\varrho)\, d\varrho\right) d\sigma = \pi \cdot \alpha_0'. \\ &\qquad\qquad \left(\alpha_0' = \alpha'[\alpha^{-1}(0)]; \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha_0'\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In der Tat, ist der Träger q elementar, so hat seine Fundamentaldispersion 1. Art $\varphi(t)$ die Form (2) mit $c = 1$, $k = \pi$. Dann ist also die 1-normierte Polarfunktion h mit π periodisch, und es bestehen nach § 13, (31), (30) die Beziehungen (5). Ähnlich beweist man auch den zweiten Teil der obigen Behauptung.

Somit haben wir alle elementaren Träger bestimmt:

Die elementaren Träger q sind genau durch die im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten mit π periodischen und den Beziehungen (5) *genügenden* 1-*normierten Polarfunktionen h bestimmt, und zwar im Sinne der Formel* § 6, (29) $(h^\backslash > -1)$.

Ähnlich können die elementaren Träger vermöge 2- bzw. 3-normierter Polarfunktionen $-k$ bzw. p ausgedrückt werden, und zwar im Sinne der Formeln § 6, (36) bzw. (41).

4. Kinematische Eigenschaften der F-Träger. Wir machen von der in § 1, Nr. 5 beschriebenen kinematischen Deutung von Integralen der Differentialgleichung (q) im Falle eines F-Trägers q Gebrauch.

Es sei q ein F-Träger.

Wir betrachten zwei auf der (orientierten) Geraden G bewegliche Punkte P, P', deren Bewegungen nach Integralen u, v der Differentialgleichung (q) erfolgen. Da die Differentialgleichung (q) oszillatorisch ist, sind diese Bewegungen Schwingungen um den festen Punkt (Nullpunkt) O der Geraden G. Wir nehmen an, daß in einem Augenblick t_0, in dem der Punkt P durch O hindurchgeht, der Punkt P' mit O nicht zusammenfällt und seine Geschwindigkeit Null ist. Der Punkt P' befindet sich also im Augenblick t_0 von dem Nullpunkt O (relativ am weitesten entfernt. Die Zeiten, zu denen der Punkt P den Nullpunkt O passiert, sind offenbar $\varphi_\nu(t_0)$, und diejenigen, zu denen sich der Punkt P' am weitesten von O befindet, sind $\psi_\nu(t_0)$; $\nu = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ Da q ein F-Träger ist, gilt $\varphi_\nu(t_0) = \psi_\nu(t_0)$.

Wir sehen also:

Die Schwingungen der Punkte P, P' um den Nullpunkt O erfolgen so, daß der Punkt P stets genau dann den Nullpunkt O passiert, wenn der Punkt P' von diesem am weitesten entfernt ist.

II. Theorie der R-Träger.

5. Charakteristische Eigenschaften der R-Träger. Nach den Formeln in § 12, Nr. 4 haben wir für alle $t \in j$

$$\left.\begin{aligned} \chi\omega = \psi, \qquad & \omega\chi = \varphi, \\ \omega_n = \varphi^{n-1}\omega, \qquad & \omega_{-n} = \varphi_{-1}^{n-1}\chi^{-1}, \\ \chi_n = \psi^{n-1}\chi, \qquad & \chi_{-n} = \psi_{-1}^{n-1}\omega^{-1} \\ (n = 1, 2, \ldots; \quad & \varphi_{-1} = \varphi^{-1}, \psi_{-1} = \psi^{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir sehen: Aus $\chi = \omega$ folgt $\varphi = \psi$ und $\chi_\varrho = \omega_\varrho$ für $\varrho = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dies ergibt:

q ist dann und nur dann ein R-Träger, wenn seine Fundamentaldispersionen 3. und 4. Art übereinstimmen: $\chi = \omega$ für $t \in j$.

Ein R-Träger ist stets ein F-Träger.

Satz. *Der Träger q ist dann und nur dann ein R-Träger, wenn die* 1-*normierte Polarfunktion h im Intervall $J = (-\infty, \infty)$ die folgende Beziehung erfüllt:*

$$h\alpha + h[\alpha + h\alpha - n\pi] = (2n + 1)\,\pi. \tag{7}$$

Beweis. Ist die Beziehung (7) erfüllt, so folgt, wenn man sie an der Stelle $\alpha + h\alpha - n\pi$ bildet, die π-Periodizität von h:

$$h(\alpha + \pi) = h\alpha. \tag{8}$$

Nun wollen wir den Beweis zuerst für den Fall $n = 0$ angeben. In diesem Fall haben wir $0 < \beta - \alpha < \pi$, und folglich bestehen die entsprechenden abelschen Funktionalgleichungen § 13, (18), (20).

a) Es sei q ein R-Träger, also $\chi = \omega$. Dann gilt im Intervall j

$$\beta\chi(t) = \alpha\chi(t) + h\alpha\chi(t)$$

und ferner, nach § 13, (18), (20),

$$\alpha(t) + \pi = \beta(t) + h\left[\beta(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\,\pi\right].$$

Da aber q ein F-Träger ist, ist die Funktion h mit π periodisch, und die letzte Beziehung ergibt im Hinblick auf (1) die Formel (7) ($n = 0$).

b) Es sei nun die Beziehung (7) erfüllt ($n = 0$).

Dann ist nach (8) die Funktion h mit π periodisch.

Nach (1) und § 13, (20) ist

$$\begin{aligned}\beta\omega(t) &= \alpha\omega(t) + h\alpha\omega(t) = \beta(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\,\pi + h\left[\beta(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\,\pi\right]\\ &= \alpha(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)\,\pi - \pi + h\alpha(t) + h\left[\alpha(t) + h\alpha(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\,\pi\right].\end{aligned}$$

Da die Funktion h die Beziehung (7) befriedigt und mit π periodisch ist, ist der letztere Ausdruck nach § 13, (18) gleich $\beta\chi(t)$. Wir haben also $\chi = \omega$ für $t \in j$.

Die Ausdehnung des Beweises auf den allgemeinen Fall (n ganz) ist einfach. Wir setzen

$$h\alpha = h_0\alpha + n\pi. \tag{9}$$

Dann ist h_0 eine 1-normierte Polarfunktion des Trägers q mit der Eigenschaft $0 < h_0 < \pi$.

Ist q ein R-Träger, so erfüllt (nach a)) die Funktion h_0 die Beziehung

$$h_0\alpha + h_0[\alpha + h_0\alpha] = \pi; \tag{10}$$

aus ihr folgt wegen (9) die Beziehung (7).

Ist umgekehrt die Beziehung (7) erfüllt, so gilt (10); daraus schließen wir (nach b)), daß q ein F-Träger ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Somit haben wir alle R-Träger bestimmt:

Die R-Träger sind genau durch die im Intervall $(-\infty, \infty)$ *definierten und der Beziehung* (7) *genügenden* 1-*normierten Polarfunktionen h bestimmt*; *sie können im Sinne der Formel* § 6, (29) *ausgedrückt werden* $(h^\backslash > -1)$.

Ähnlich können die R-Träger durch 2- bzw. 3-normierte und den Beziehungen

$$k\beta + k[\beta + k\beta + n\pi] = -(2n+1)\pi \tag{11}$$

bzw.

$$p\zeta + p(\zeta + \pi) = (2n+1)\pi \tag{12}$$

genügende Polarfunktionen $-k$ bzw. p bestimmt und im Sinne der Formeln § 6, (36) bzw. (41) ausgedrückt werden.

6. Weitere Eigenschaften der R-Träger. Einen tiefgreifenden Vorstoß zu Eigenschaften der R-Träger bildet die folgende Betrachtung.

Es sei q ein R-Träger im Intervall j $\big(= (a, b)\big)$.

Wir betrachten eine Integralkurve $\mathfrak{K}$ der Differentialgleichung (q) mit den parametrischen Koordinaten $u(t)$, $v(t)$, wobei etwa $w = uv' - u'v < 0$ sein soll. Mit O bezeichnen wir den Ursprung des Koordinatensystems.

Es seien $P, \tilde{P} \in \mathfrak{K}$ die durch die Parameterwerte t, $\chi(t)$ ($t \in j$ beliebig) bestimmten Punkte. *Wir interessieren uns für den Inhalt Δ des Dreiecks $PO\tilde{P}$.*

Es ist offenbar

$$2\Delta = r(t) \cdot r\chi(t) \cdot \sin\vartheta(t); \tag{13}$$

$r(t)$, $r\chi(t)$ sind die Moduln der Vektoren $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{O\tilde{P}}$ und $\vartheta(t)$ der von diesen letzteren gebildete Winkel.

Es sei α eine eigentliche erste Phase der Basis (u, v). Wegen $-w > 0$ haben wir $\alpha' > 0$; zugleich gilt $\chi(t) > t$. Folglich ist $\alpha\chi(t) > \alpha(t)$ und ferner wegen $0 \leqq \vartheta(t) < 2\pi$

$$\vartheta(t) = \alpha\chi(t) - \alpha(t) + 2n\pi, \quad 0 \geqq n \text{ ganz}. \tag{14}$$

Ferner sei β die zu α benachbarte eigentliche zweite Phase von (u, v), also $0 < \beta - \alpha < \pi$.

Wir schreiben die Beziehung (14) wie folgt:

$$\vartheta(t) = [\alpha\chi(t) - \beta(t)] + [\beta(t) - \alpha(t)] + 2n\pi$$

und wenden die Formel § 13, (20) an. Wegen $\varepsilon = 1$ und $0 < \beta - \alpha < \pi$ ist

$$\vartheta(t) = \beta(t) - \alpha(t). \tag{15}$$

Wir sehen: ϑ ist die zwischen 0 und π liegende Polarfunktion der Basis (u, v) mit der Erzeugenden α.

Als Weiterführung der eingangs erwähnten Betrachtung wollen wir die folgenden Formeln anführen:

$$\vartheta\chi = -\vartheta + \pi, \qquad \alpha' = \beta'\chi \cdot \chi', \qquad \beta' = \alpha'\chi \cdot \chi' \quad [\S\ 13,\ (18),\ (20)]; \tag{16}$$

$$r\chi \cdot r'\chi = -rr' \quad [(16) \text{ und } \S\ 6,\ (8)]; \tag{17}$$

$$\alpha' = \frac{w \cdot q\chi}{s^2\chi}\chi', \qquad \beta' = \frac{-w}{r^2\chi}\chi' \quad [(16) \text{ und } \S\ 5,\ (14),\ (23)]. \tag{18}$$

Nun folgt aus (13) durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{r'}{r} + \frac{r'\chi}{r\chi}\chi' + \cot\vartheta \cdot \vartheta',$$

und die Formeln § 6, (8), § 5, (14) und ferner (17), (18) ergeben

$$\cot\vartheta \cdot \vartheta' = -\frac{1}{w} rr'(\beta' - \alpha') = -\frac{1}{w} rr' \cdot \beta' - \frac{r'}{r} = -\frac{r'\chi}{r\chi}\chi' - \frac{r'}{r}.$$

Also ist $\Delta' = 0$, und es gilt der

Satz. *Der Inhalt Δ des Dreiecks $PO\tilde{P}$ ist entlang der Kurve $\mathfrak{K}$ konstant.*

7. Aus den Beziehungen [(16), § 5, (28)]

$$rs \cdot \sin\vartheta = -w, \quad r\chi \cdot s\chi \cdot \sin\vartheta = -w \tag{19}$$

folgt im Hinblick auf (13)

$$r\chi = \frac{2\Delta}{-w}s, \qquad s\chi = \frac{-w}{2\Delta}r. \tag{20}$$

Ferner haben wir nach § 13, (20) und (18)

$$\mathrm{W}\alpha\chi = \mathrm{W}\beta, \qquad \mathrm{W}\beta\chi = \mathrm{W}\alpha \pm \pi, \tag{21}$$

wobei das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem, ob $0 \leqq \mathrm{W}\alpha < \pi$ oder $\pi \leqq \mathrm{W}\alpha < 2\pi$ ist.

Wir üben nun auf die Integralkurve $\mathfrak{K}$ die Transformation R (§ 6, Nr. 1), bestehend aus der Polarkorrelation $K_{\sqrt{2\Delta}}$, gefolgt von der Vierteldrehung um O im positiven Sinne aus.

Dann wird die Kurve $\mathfrak{K}$ in eine Kurve $\bar{\mathfrak{K}}$ transformiert: Der Punkt $P \in \mathfrak{K}$ geht in den Punkt $\bar{P} \in \bar{\mathfrak{K}}$ über, während die zugehörigen Amplituden $\bar{r}$, s und Winkel $\mathrm{W}\alpha$, $\mathrm{W}\beta$; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ wie folgt transformiert werden [§ 6, (5)]:

$$\bar{r} = \frac{2\Delta}{-w}s, \quad \bar{\alpha} = \mathrm{W}\beta, \quad \bar{\beta} = \mathrm{W}\alpha \pm \pi, \tag{22}$$

wobei das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem, ob $0 \leqq \mathrm{W}\alpha < \pi$ oder $\pi \leqq \mathrm{W}\alpha < 2\pi$ ist.

Vergleich mit (20), (21) ergibt

$$\bar{r} = r\chi, \quad \bar{\alpha} = \mathrm{W}\alpha\chi, \quad \bar{\beta} = \mathrm{W}\beta\chi. \tag{23}$$

Wie wir sehen, geht bei der Transformation R die Kurve $\mathfrak{K}$ in sich über. *Die Integralkurven eines R-Trägers sind Radonsche Kurven.*

8. Die zweite Formel (18) zusammen mit § 5, (23) ergibt im Intervall j

$$\frac{\chi'}{r^2\chi} = -\frac{q}{s^2} \tag{24}$$

und ferner, mit Hinblick auf (20),

$$\chi' = -d^2 q \quad \left(d = \frac{2\Delta}{-w}\right). \tag{25}$$

Dies ist eine Formel von E. BARVÍNEK ([2]).

Daraus folgt für t_0, $t \in j$

$$\chi(t) = \chi(t_0) - d^2 \int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, d\sigma. \tag{26}$$

Ähnlich folgt aus der ersten Formel (18) zusammen mit § 5, (14)

$$\chi' = -\frac{1}{d^2} \frac{1}{q\chi}. \tag{27}$$

Also gilt für t_0, $t \in j$

$$\chi(t) = \chi(t_0) - \frac{1}{d^2} \int_{t_0}^{t} \frac{d\sigma}{q\chi(\sigma)}. \tag{28}$$

Aus (25) und (27) sehen wir, daß die Werte des R-Trägers q an je zwei Stellen t, $\chi(t) \in j$ ein konstantes Produkt ergeben:

$$q(t)\, q\chi(t) = \frac{1}{d^4}. \tag{29}$$

Die Formel (26) ergibt

$$\chi\chi(t) = \chi(t_0) - d^2 \int_{t_0}^{\chi(t_0)} q(\sigma)\, d\sigma - d^2 \int_{\chi(t_0)}^{\chi(t)} q(\sigma)\, d\sigma.$$

Transformiert man das letzte Integral vermöge der Substitution $\sigma = \chi(\tau)$ und wendet man die Formeln (25) und (29) an, so erhält man

$$(\varphi(t) =)\ \chi\chi(t) = t + k \tag{30}$$

mit einer bestimmten Konstanten k (>0). Da aber $\chi\chi = \varphi$ ist, zeigt diese Formel, daß *jeder R-Träger zu den im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ definierten F-Trägern gehört* (Nr. 2; $c = 1$).

9. Kinematische Eigenschaften der *R*-Träger. Es sei q ein R-Träger.

Wir betrachten zwei auf der (orientierten) Geraden G bewegliche Punkte P, P', deren Bewegungen nach Integralen u, v der Differentialgleichung (q) erfolgen. Die Lage der Punkte P, P' in einem Augenblick t_0 sei so, daß der Punkt P durch den Nullpunkt O hindurchgeht, während P' von ihm (relativ) am weitesten entfernt ist. Da q ein (R- und folglich) F-Träger ist, hat man die in Nr. 4 beschriebene Situation. Nun sind die Zeiten, zu denen der Punkt P von O am weitesten entfernt ist bzw. der Punkt P' den Nullpunkt O passiert: $\chi_\varrho(t_0)$ bzw. $\omega_\varrho(t_0)$; $\varrho = \ldots, -1, 1, \ldots$ Da q ein R-Träger ist, gilt $\chi_\varrho(t_0) = \omega_\varrho(t_0)$.

Die Schwingungen der Punkte P, P' um den Nullpunkt O erfolgen so, daß jeder von ihnen stets genau dann den Nullpunkt passiert, wenn der andere von ihm am weitesten entfernt ist.

§ 17. Büschelkurven und Radonsche Kurven

Bei den Betrachtungen über Polarfunktionen sind wir ebenen Kurven mit speziellen zentroaffinen Eigenschaften, darunter den Radonschen Kurven, begegnet (§ 6, Nr. 1). Es handelt sich dabei um Kurven, die von Geraden eines Büschels stets wenigstens in zwei Punkten geschnitten werden, wobei ihre Tangenten in den Schnittpunkten untereinander parallel sind. Wir wollen diesen Paragraphen Untersuchungen über diese Kurven vom geometrischen Standpunkt aus widmen. Es wird sich zeigen, daß diese Kurven in enger Beziehung zu den F- bzw. R-Trägern stehen, deren Integralkurven sie darstellen. Unser Ziel besteht in der Auffindung von geometrischen Eigenschaften und der Ableitung endlicher Gleichungen der erwähnten Kurven. Dabei wird natürlich unser analytischer Apparat wesentlich zur Anwendung kommen.

1. Grundbegriffe. Wir beginnen mit der Definition der zu untersuchenden Kurven, die wir als Büschelkurven bezeichnen wollen.

Es sei (F) ein Geradenbüschel mit dem Mittelpunkt O.

Unter einer *Büschelkurve in bezug auf* (F), kürzer: *Büschelkurve*, verstehen wir eine ebene Kurve $\mathfrak{F}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Die Kurve $\mathfrak{F}$ wird von jeder Geraden des Büschels (F) wenigstens in zwei (verschiedenen) Punkten geschnitten, und zwar so, daß die Kurventangenten in allen Schnittpunkten untereinander parallel sind.

Unter dem *Pol* der Kurve $\mathfrak{F}$ verstehen wir den Mittelpunkt O von (F).

Im Hinblick auf die anzuwendenden Methoden wollen wir uns auf reguläre (lokal konvexe und wendepunktfreie) Kurven $\mathfrak{F}$ beschränken. Außerdem nehmen wir an: Jede Kurve $\mathfrak{F}$ kann vermöge parametrischer Koordinaten U, V in bezug auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O bestimmt werden; die Funktionen U, V sind in einem offenen Intervall erklärt und gehören der Klasse C_2 an.

Offenbar stellen die Ellipsen sowie die logarithmischen Spiralen Beispiele von Büschelkurven dar.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Büschelkurve mit den parametrischen Koordinaten U, V in dem Intervall J.

Zunächst sehen wir im Hinblick auf die Definition der Büschelkurven, daß die Funktionen U, V (linear) unabhängig sind. Daraus folgt: Die Funktionen U, V sind Integrale einer linearen Differentialgleichung (a) mit stetigen Koeffizienten $\bar{a}$, $\bar{b}$:

$$Y'' + \bar{a}Y' + \bar{b}Y = 0. \tag{a}$$

Ferner sehen wir, daß die beschriebenen Eigenschaften der Kurve F zentroaffin invariant sind und folglich bei jeder Parametertransformation (§ 4, Nr. 1) erhalten bleiben. Wählt man insbesondere den Kurvenparameter im Sinne der Formel § 1, (1), so erhält die Differentialgleichung (a) die Jacobische Form (q).

Somit kommen wir zu der Erkenntnis, daß bei geeigneter Wahl des Kurvenparameters die Büschelkurve $\mathfrak{F}$ Integralkurve einer Differentialgleichung (q) ist. Wir nennen *q Träger der Büschelkurve* $\mathfrak{F}$.

2. Bestimmung der Büschelkurventräger. Wir wollen nun die Träger q der Büschelkurven bestimmen.

Da wir nur reguläre Büschelkurven betrachten, können wir vom Anfang an $q(t) \neq 0$ für $t \in j$ (§ 4, Nr. 6) annehmen.

Es sei (q) eine Differentialgleichung im Intervall j, $q(t) \neq 0$ für $t \in j$, und $\mathfrak{K}$ eine Integralkurve von (q) mit den parametrischen Koordinaten $u(t)$, $v(t)$ in bezug auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O.

Es sei $P(t) \in \mathfrak{K}$, $t \in j$ ein beliebiger Punkt und $\tau(t)$ die Tangente von $\mathfrak{K}$ im Punkt $P(t)$. Ferner sei $p(t)$ die Gerade $OP(t)$.

Grundlegend für die weiteren Ausführungen ist der

Satz. *Zwei Punkte $P(t_1)$, $P(t_2) \in \mathfrak{K}$, $t_1 \neq t_2$, liegen dann und nur dann auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden, wenn die Zahlen t_1, t_2 miteinander 1-konjugiert sind.*

Zwei Tangenten $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ von $\mathfrak{K}$, $t_1 \neq t_2$, sind dann und nur dann zueinander parallel, wenn die Zahlen t_1, t_2 miteinander 2-konjugiert sind.

Die Tangente $\tau(t_2)$ von $\mathfrak{K}$ und die Gerade $p(t_1)$ sind dann und nur dann zueinander parallel, wenn t_2 mit t_1 3- und folglich t_1 mit t_2 4-konjugiert ist.

Beweis. Zwei Punkte $P(t_1)$, $P(t_2) \in \mathfrak{K}$, $t_1 \neq t_2$, liegen genau dann auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden, wenn $u(t_1)\, v(t_2) - u(t_2)\, v(t_1) = 0$ ist.

Zwei Tangenten $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ von $\mathfrak{K}$, $t_1 \neq t_2$, sind genau dann zueinander parallel, wenn $u'(t_1)\, v'(t_2) - u'(t_2)\, v'(t_1) = 0$ ist.

Die Tangente $\tau(t_2)$ von $\mathfrak{K}$ und die Gerade $p(t_1)$ sind genau dann zueinander parallel, wenn $u'(t_2)\, v(t_1) - v'(t_2)\, u(t_1) = 0$ ist.

Die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelbar aus diesen Tatsachen und dem Satz von § 3, Nr. 12.

Wir sehen:

Die Tangenten $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ der Kurve $\mathfrak{K}$, $t_1 \neq t_2$, in zwei Schnittpunkten dieser letzteren mit einer durch den Punkt O gehenden Geraden sind dann und nur dann zueinander parallel, wenn die Zahlen t_1, t_2 miteinander zugleich 1- und 2-konjugiert sind.

Die Tangenten $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ der Kurve $\mathfrak{K}$ und die durch den Punkt O und ihre Berührungspunkte $P(t_1)$, $P(t_2)$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$ gehenden Geraden $p(t_1)$, $p(t_2)$ sind wechselweise parallel dann und nur dann, wenn jede Zahl t_1, t_2 mit der anderen zugleich 3- und 4-konjugiert ist.

Es sei nun q Träger der Büschelkurve $\mathfrak{F}$; $q \neq 0$ für $t \in j$.

Es sei $t_1 \in j$ eine beliebige Zahl und $P(t_1) \in \mathfrak{F}$ der entsprechende Punkt von $\mathfrak{F}$. Nach der Definition von Büschelkurven hat die durch den Punkt O gehende Gerade $OP(t_1)$ mit der Kurve $\mathfrak{F}$ noch wenigstens einen Punkt $P(t_2)$ $\big(\neq P(t_1)\big)$ gemeinsam. Offenbar ist t_2 von t_1 verschieden und nach dem obigen Satz mit t_1 1-konjugiert. Folglich gibt es zu jeder Zahl $t_1 \in j$ 1-konjugierte Zahlen. Daraus schließen wir, daß jedes Integral von (q) im Intervall j wenigstens zweimal verschwindet.

Wir sehen, daß die Differentialgleichung (q) entweder von endlichem Typus (m), $m \geqq 3$, oder von unendlichem Typus ist. Daraus folgt zunächst $q < 0$ für $t \in j$. Ferner schließen wir, daß die Differentialgleichung (q) die Fundamentaldispersionen 1. und 2. Art φ, ψ zuläßt. Diese sind in gewissen Intervallen $i \subset j$, $i' \subset j$ definiert.

Es sei nun $t \in i$ eine beliebige Zahl. Da $\varphi(t)$ mit t 1-konjugiert ist, liegen die Punkte $P(t)$, $P\varphi(t)$ auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden. Da ferner $\mathfrak{F}$

eine Büschelkurve ist, sind die Tangenten $\tau(t)$, $\tau\varphi(t)$ zueinander parallel. Daraus schließen wir, mit Hinblick auf den obigen Satz, daß $\varphi(t)$ mit t 2-konjugiert ist. Folglich ist $\varphi(t) = \psi_\nu(t)$, $\nu \geqq 1$ ganz. Es gibt also ein Integral y von (q), dessen Ableitung y' an den Stellen t, $\varphi(t)$ und eventuell noch an weiteren zwischen t und $\varphi(t)$ liegenden Stellen $x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ verschwindet. Da nun die Funktion q im Intervall j stets negativ ist, gibt es in jedem Intervall $(t, x_1), \ldots, \big(x_{\nu-1}, \varphi(t)\big)$ genau eine und folglich zwischen t und $\varphi(t)$ genau ν Nullstellen von y. Daraus schließen wir $\nu = 1$ und ferner $\varphi(t) = \psi(t)$, d. h., es ist $i \subset i'$ und $\varphi(t) = \psi(t)$ für $t \in i$.

Wir wollen nun zeigen, daß auch umgekehrt $i' \subset i$ und $\psi(t') = \varphi(t')$ für $t' \in i'$ ist. In der Tat, es sei $t' \in i'$ aber $t' \notin i$. Dann ist die Zahl $(t' <)\, \bar{t} = \psi(t')$ $(\in j)$ definiert, aber es gibt keine mit t' rechtsseitig 1-konjugierte Zahl. Wir wissen, daß die Gerade $OP(\bar{t})$ die Kurve $\mathfrak{F}$ wenigstens zweimal schneidet. Daraus folgt die Existenz von Zahlen $\varphi_\nu(\bar{t})$ $(\in j)$, ν ganz, die mit $\bar{t}$ 1-konjugiert sind. Da es ferner keine mit t' und folglich auch mit $\bar{t}$ $(> t')$ rechtsseitig 1-konjugierte Zahl gibt, ist $\nu < 0$, und wir sehen, daß die Zahl $\varphi_{-1}(\bar{t})$ $(= t)$ existiert. Nun sind aber die Kurventangenten in den Punkten $P(\bar{t})$, $P(t) \in \mathfrak{F}$ zueinander parallel, und daraus schließen wir, daß t mit $\bar{t}$ 2-konjugiert ist. Wir haben also $\varphi_{-1}(\bar{t}) = \psi_{-n}(\bar{t})$, $n \geqq 1$ ganz, und aus dieser Beziehung finden wir ähnlich wie oben $\varphi_{-1}(\bar{t}) = \psi_{-1}(\bar{t})$ $(= t')$. Es ist also $t' = \varphi_{-1}(\bar{t})$, und daraus folgt $\bar{t} = \varphi(t')$; dies widerspricht der obigen Annahme $t' \notin i$. Damit ist das Erwünschte bewiesen.

Wir fassen zusammen:

Der Träger q der Büschelkurve $\mathfrak{F}$ ist stets <0; ferner ist die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus (m), $m \geqq 3$, oder von unendlichem Typus, und ihre Fundamentaldispersionen 1. und 2. Art φ, ψ stimmen überein.

Wir überlassen es dem Leser, sich von der Richtigkeit der Umkehrung zu überzeugen: Jede stetige Funktion q mit diesen Eigenschaften ist Träger einer Büschelkurve.

Somit gilt der

Satz. *Die Büschelkurventräger sind Teilfunktionen der F-Träger.*

Der Träger q einer Büschelkurve kann z. B. in der Form § 6, (29) ausgedrückt werden, wobei h eine beliebige in einem Intervall J, dessen Länge $>2\pi$ ist, definierte Funktion mit den folgenden Eigenschaften bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} 1^0.\ h \in C_1; \\ 2^0.\ n\pi < h < (n+1)\pi, \quad n \text{ ganz}; \\ 3^0.\ h(\alpha+\pi) = h(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha, \alpha+\pi \in J; \\ 4^0.\ h'(\alpha) > -1 \quad \text{für} \quad \alpha \in J. \end{array}\right\} \tag{1}$$

3. Zentroaffine Länge der Büschelkurvenbogen. Es sei $\mathfrak{F}$ eine Büschelkurve mit den parametrischen Koordinaten $u(t)$, $v(t)$, $t \in j$. Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

Zunächst sei daran erinnert, daß der von den Punkten $P(t_1)$, $P(t_2) \in \mathfrak{F}$ bestimmte zentroaffine orientierte Bogen der Kurve $\mathfrak{F}$ durch die Formel § 4, (14) gegeben ist; seine Länge $s(t_1 \mid t_2)$ ist also

$$s(t_1|t_2) = \left|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-q(\sigma)}\, d\sigma\right|. \tag{2}$$

Nun machen wir von den Formeln § 6, (29) und § 13, (31) Gebrauch. Wir erhalten für $t \in i$

$$-q(\varphi(t))\,\varphi'^2(t) = -q(t)$$

und ferner, im Hinblick auf (2),

$$s(\varphi(t_1)|\varphi(t_2)) = s(t_1|t_2). \tag{3}$$

Wir wissen, daß die Punkte $P(t_1)$, $P\varphi(t_1)$ auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden liegen (Nr. 2); dasselbe gilt von $P(t_2)$, $P\varphi(t_2)$.

Die durch zwei beliebige Geraden $OP(t_1)$, $OP(t_2)$ des Büschels (F) ausgeschnittenen Bogen $P(t_1)\,P(t_2)$ und $P\varphi(t_1)\,P\varphi(t_2)$ der Büschelkurve $\mathfrak{F}$ haben dieselbe zentroaffine Länge.

4. Endliche Gleichungen der Büschelkurven. In dieser Nr. wollen wir endliche Gleichungen der Büschelkurven ableiten. Da die Büschelkurventräger Teilfunktionen der F-Träger sind, werden wir uns auf Büschelkurven der F-Träger beschränken. Wir werden also annehmen, daß die Differentialgleichungen (q) der von uns betrachteten Büschelkurven oszillatorisch und folglich in den in § 16, Nr. 2 bestimmten Intervallen definiert sind.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Büschelkurve und q ihr Träger in dem Intervall $j = (a, \infty)$ oder $(-\infty, b)$ oder $(-\infty, \infty)$ (a, b endlich). Ferner seien u, v parametrische Koordinaten der Kurve $\mathfrak{F}$ in bezug auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O; wir nehmen z. B. $(w =)\ uv' - u'v < 0$ an.

Es sei $r(t)$ die Amplitude, $\alpha(t)$ eine erste Phase $(t \in j)$ und $h(\alpha)$ $(\alpha \in (-\infty, \infty))$ eine von der Phase α erzeugte 1-normierte Polarfunktion der Basis (u, v). Die Funktion h hat die obigen Eigenschaften 1^0–4^0, und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit etwa $n = 0$ an.

Nun gehen wir von der Formel § 6, (25) $(\alpha_0 = 0)$ aus:

$$r(t) = r_0 \cdot \exp \int_0^{\alpha} \cot h(\varrho)\, d\varrho. \tag{4}$$

Aus (4) haben wir im Intervall j, im Hinblick auf $\operatorname{sgn}(-w) = \operatorname{sgn} \alpha' = 1$,

$$r\varphi(t) = r_0 \cdot \exp \int_0^{\alpha+\pi} \cot h(\varrho)\, d\varrho$$

und ferner

$$r\varphi(t) = \sqrt{c} \cdot r(t);$$

c (>0) ist der Koeffizient von t in der Fundamentaldispersion $\varphi(t) = ct + k$ der Differentialgleichung (q), und es gilt die Formel § 16, (3).

Nun sehen wir, daß die für $t \in j$ definierte Funktion

$$g(t) = c^{\frac{1}{2\pi}\alpha(t)} \tag{5}$$

bei der Substitution $t \to \varphi(t)$ in derselben Weise wie die Funktion $r(t)$ transformiert wird. Folglich ist die Funktion

$$f(t) = r(t) : g(t) \tag{6}$$

bei dieser Substitution invariant:

$$f\varphi(t) = f(t). \tag{7}$$

Aus (5), (6) folgt

$$r(t) = C^{\alpha(t)} \cdot f(t) \quad \left(C = c^{\frac{1}{2\pi}}\right). \tag{8}$$

Es sei $F(\alpha)$ (>0) die im Sinne der Beziehung

$$f(t) = F(\alpha)$$

im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion; $t = \alpha^{-1}(\alpha) \in j$ und $\alpha = \alpha(t) \in (-\infty, \infty)$ stellen homologe Werte dar.

Vergleicht man die Formeln (4), (8), so ergibt sich

$$F(\alpha) = r_0 \cdot C^{-\alpha} \cdot \exp \int_0^\alpha \cot h(\varrho)\, d\varrho.$$

Wir sehen, daß die Funktion F der Klasse C_2 angehört und mit π periodisch ist. Ferner haben wir

$$h = \operatorname{arccot}\left(\frac{F'}{F} + \log C\right), \tag{9}$$

$$h' = -\frac{FF'' - F'^2}{F^2 + (F' + F \cdot \log C)^2}; \tag{10}$$

arccot bezeichnet den zwischen 0 und π liegenden Zweig der obigen Funktion.

Die Funktion F hat also in ihrem Definitionsintervall $(-\infty, \infty)$ folgende Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &1^0.\ F > 0, \\ &2^0.\ F \in C_2, \\ &3^0.\ F(\alpha + \pi) = F(\alpha), \\ &4^0.\ \frac{F''}{F} < \frac{F'^2}{F^2} + \left(\frac{F'}{F} + \log C\right)^2 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wie wir sehen, ist die Gleichung der Büschelkurve $\mathfrak{F}$ in Polarkoordinaten

$$r = C^\alpha \cdot F(\alpha); \tag{12}$$

C (>0) ist eine Konstante und F eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion mit den Eigenschaften (11).

Umgekehrt kann ohne Schwierigkeiten gezeigt werden: Jede mit einer beliebigen Konstanten C (>0) und einer im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion F mit den Eigenschaften (11) im Sinne der Formel (9) gebildete Funktion h stellt eine 1-normierte und den Beziehungen (1) genügende Polarfunktion eines F-Trägers q dar; und zwar ist dieser Träger vermöge einer Formel wie § 6, (29) definiert.

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz. *Alle Büschelkurven mit F-Trägern sind in Polarkoordinaten genau durch die Gleichung* (12) *gegeben, wobei* C (>0) *eine Konstante und* F *eine im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierte Funktion mit den Eigenschaften* (11) *bezeichnet.*

5. Radonsche Kurven. Es sei q Träger der Büschelkurve $\mathfrak{F}$ in einem Intervall j; ferner sei O der Pol von $\mathfrak{F}$ und (F) das Geradenbüschel mit dem Mittelpunkt O. Wir übernehmen die in Nr. 2 beschriebene Bedeutung von $P(t)$, $p(t)$, $\tau(t)$ $(t \in j)$.

Die Kurve $\mathfrak{F}$ bestimmt eine schlichte Abbildung F des Büschels (F) in sich, die wie folgt definiert ist: Für jede Gerade $p \in (F)$ ist $\mathsf{F}p \in (F)$ die zu den Kurventangenten in den Schnittpunkten von p mit $\mathfrak{F}$ parallele Gerade.

Man nennt $\mathfrak{F}$ *Radonsche Kurve*, wenn die Abbildung F involutorisch ist, d. h., wenn die zusammengesetzte Abbildung FF die identische Abbildung von (F) auf sich darstellt.

Jede Radonsche Kurve hat also die Ellipseneigenschaft (§ 6, Nr. 1): Aus $p' = \mathsf{F}p$ folgt $\mathsf{F}p' = p$.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ eine Radonsche Kurve. Dann sind die Fundamentaldispersionen 1. und 2. Art φ, ψ der Differentialgleichung (q) in einem bestimmten Intervall $i \subset j$ definiert. Daraus schließen wir, daß auch die Fundamentaldispersionen 3. und 4. Art von (q), χ, ω, in bestimmten Intervallen k, $k' \subset i$ existieren. Es ist klar, daß $t < \chi(t) < \varphi(t)$ für $t \in k$ und $t < \omega(t) < \psi(t)$ $\big(= \varphi(t)\big)$ für $t \in k'$ gilt.

Wir wollen zunächst zeigen, daß $k = k'$ und $\chi(t) = \omega(t)$ für $t \in k$ ist.

Es sei $t \in k$ eine beliebige Zahl. Da $\chi(t)$ mit t 3-konjugiert ist, ist die Kurventangente $\tau\chi(t)$ zu der Geraden $p(t)$ parallel. Da $\mathfrak{R}$ Radonsche Kurve ist, ist $\tau(t)$ zu $p\chi(t)$ parallel; folglich (Nr. 2) ist t mit $\chi(t)$ 3- und zugleich $\chi(t)$ mit t 4-konjugiert. Es ist also $\chi(t) = \omega_\varrho(t)$, ϱ ganz. Aus $\chi(t) > t$ folgt $\varrho \geqq 1$. Ist $\varrho \geqq 2$, so gilt $t < \chi(t) < \varphi(t) < \omega_\varrho(t)$, aber dies ist unmöglich. Folglich gilt $\varrho = 1$, also $\chi(t) = \omega(t)$, d. h., es ist $k \subset k'$ und $\chi(t) = \omega(t)$ für $t \in k$. Ähnlich erhält man $k' \subset k$ und $\omega(t) = \chi(t)$ für $t \in k'$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir überlassen es dem Leser, sich von der Richtigkeit der folgenden Umkehrung zu überzeugen: Jeder Büschelkurventräger q mit der Eigenschaft $\chi = \omega$ ist Träger einer Radonschen Kurve.

Somit gilt der

Satz. *Die Träger der Radonschen Kurven sind Teilfunktionen der R-Träger.*

Im folgenden wollen wir uns auf Betrachtung von Radonschen Kurven mit R-Trägern beschränken.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine Radonsche Kurve mit dem R-Träger q. Nach § 16, Nr. 8, ist die Funktion q im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ definiert, und für die Fundamentaldispersion 1. Art φ der Differentialgleichung (q) gilt die Formel $\varphi(t) = t + k$ $\big(c = 1;$ § 16, (30)$\big)$.

Aus (12) folgt die Gleichung der Kurve $\mathfrak{R}$ in Polarkoordinaten:

$$r = F(\alpha); \tag{13}$$

F ist eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion mit den Eigenschaften (11).

Da nach (11), 3^0 die Funktion F mit π periodisch ist und je zwei Punkte $P(\alpha)$, $P(\alpha + \pi) \in \mathfrak{R}$ auf derselben durch O gehenden Geraden liegen, gilt:

Die Kurve $\mathfrak{R}$ *ist geschlossen und zentralsymmetrisch.*

Wir wissen [§ 16, (7)], daß die im Sinne der Formel (9) definierte Funktion h $(C = 1)$, die wir etwa im Intervall $(0, \pi)$ annehmen dürfen, die Beziehung

$h\alpha + h[\alpha + h\alpha] = \pi$ erfüllt. Aus dieser letzteren folgt

$$\frac{F^\backslash\alpha}{F\alpha} + \frac{F^\backslash\left[\alpha + \operatorname{arccot}\dfrac{F^\backslash\alpha}{F\alpha}\right]}{F\left[\alpha + \operatorname{arccot}\dfrac{F^\backslash\alpha}{F\alpha}\right]} = 0. \tag{14}$$

Die Gleichung der Radonschen Kurve $\mathfrak{R}$ in Polarkoordinaten hat somit die Form (13); F ist eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion mit den Eigenschaften (11) und (14), wobei $C = 1$ zu wählen ist.

Umgekehrt kann ohne Schwierigkeiten gezeigt werden: Jede mit einer im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion F mit den obigen Eigenschaften im Sinne der Formel (9) gebildete Funktion h stellt eine 1-normierte und den Beziehungen (1), § 16, (7) $(n = 0)$ genügende Polarfunktion eines R-Trägers dar, und zwar ist dieser Träger vermöge einer Formel wie § 6, (29) definiert.

Wir fassen zusammen:

S a t z. *Alle Radonschen Kurven mit R-Trägern sind in Polarkoordinaten genau durch die Gleichung* (13) *gegeben, wobei F eine im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierte Funktion mit den Eigenschaften* (11) *und* (14) *bezeichnet.*

C. THEORIE DER ALLGEMEINEN DISPERSIONEN

In diesem Kapitel wird eine konstruktive Theorie der sogenannten allgemeinen Dispersionen entwickelt. Dies sind im wesentlichen Lösungen der Kummerschen nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung [§ 11, (1)] im Fall oszillatorischer Differentialgleichungen (Q), (q).

§ 18. Einleitung

1. Dispersionen $\varkappa$-ter Art; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. Nach dem Satz von § 13, Nr. 11, befriedigen alle Zentraldispersionen 1. Art φ_ν einer oszillatorischen Differentialgleichung (q) im Intervall $j = (a, b)$ die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$-\{X, t\} + q(X) \cdot X'^2(t) = q(t), \tag{qq}$$

und ferner, falls der Träger q (< 0) der Klasse C_2 angehört, befriedigen alle Zentraldispersionen 2., 3., 4. Art, ψ_ν, χ_ϱ, ω_ϱ, die mit dem ersten begleitenden Träger $\hat{q}_1$ von q gebildeten Differentialgleichungen $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1 q)$, $(q\hat{q}_1)$.

Unsere weiteren Untersuchungen zielen u. a. dahin, einen Überblick über *alle* regulären (d. h. der Ungleichung $X' \neq 0$ stets genügenden) Integrale X der nichtlinearen Differentialgleichungen 3. Ordnung (qq), $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1 q)$, $(q\hat{q}_1)$ zu ermitteln.