I. GRUNDLAGEN DER THEORIE

Wir wollen im ersten Kapitel die zu dem Ausbau der Theorie notwendigen Tatsachen zusammenstellen. Allgemein bekannte Tatsachen werden in kurzgefaßter Form und im Fall von Sätzen ohne Beweise angeführt. Wir möchten dem Leser versichern, daß er alle zu besprechenden Situationen durch vorangehende Erläuterungen sorgfältig vorbereitet finden wird, ohne daß bei dem Lesen dieses Buches Langeweile zu befürchten wäre.

A. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER GEWÖHNLICHEN LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

§ 1. Einleitung

1. Vorbereitung. Wir werden uns in diesem Buch mit gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung vorwiegend von der Form

$$y'' = q(t)\, y \tag{q}$$

befassen. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktion q, die wir gelegentlich der Kürze halber auch als den *Träger* der Differentialgleichung (q) bezeichnen wollen, in einem offenen beschränkten oder unbeschränkten Intervall $j = (a, b)$ definiert ist und der Klasse C_0 angehört. Nach Bedarf werden natürlich von der Funktion q zusätzliche Eigenschaften gefordert. Mit C_0 bzw. C_k $(k = 1, 2, \dots)$ bezeichnen wir, wie üblich, die Klasse derjenigen Funktionen, die in dem betrachteten Intervall stetig sind bzw. eine stetige Ableitung k-ter Ordnung besitzen.

Differentialgleichungen von der Form (q) werden als *Sturm-Liouvillesche* oder auch *Jacobische Differentialgleichungen* bezeichnet. Wir wollen uns der letzteren (kürzeren) Benennung anschließen.

Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form

$$Y'' + a(x)\, Y' + b(x)\, Y = 0, \tag{a}$$

deren Koeffizienten a, b in einem Intervall J definiert sind und der Klasse C_0 angehören, kann vermöge einer mit beliebigen Zahlen $x_0 \in J$, t_0, $t_0' \neq 0$ gebildeten Transformation der unabhängigen Veränderlichen von der Form

$$t = t_0 + t_0' \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(- \int\limits_{x_0}^{\sigma} a(\tau)\, d\tau\right) d\sigma \tag{1}$$

auf die Jacobische Form (q) gebracht werden. Der Koeffizient q ist in dem durch den Wertevorrat der Funktion $t(x)$, $x \in J$, gebildeten Intervall j definiert und stetig:

$$q(t) = -\frac{1}{t_0'^2} b(x) \cdot \exp 2 \int_{x_0}^{x} a(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Der Zusammenhang zwischen Lösungen der Differentialgleichungen (a), (q) ist durch die Formel

$$Y(x) = y(t) \tag{3}$$

gegeben, in der x, t stets als zwei homologe, d. h. im Sinne der Beziehung (1) einander zugeordnete Werte $x \in J$, $t \in j$ zu nehmen sind: Ist $Y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a), so stellt die vermöge (3) definierte Funktion $y(t)$ eine solche der Differentialgleichung (q) dar, und umgekehrt.

Eine weitere Möglichkeit, die Differentialgleichung (a) auf die Jacobische Form zu bringen, besteht dann, wenn der Koeffizient a der Klasse C_1 angehört. In diesem Falle führt die Transformation der abhängigen Veränderlichen

$$Y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(\tau)\, d\tau\right) \cdot y$$

auf die Jacobische Differentialgleichung (q) mit dem Träger

$$q(x) = \frac{1}{4} a^2(x) + \frac{1}{2} a'(x) - b(x)$$

in dem Intervall J.

Unter einer Lösung der Differentialgleichung (q) verstehen wir jede in einem Intervall $i \subset j$ definierte und daselbst der Differentialgleichung (q) genügende Funktion $y \in C_2$. Im Fall $i = j$ wenden wir in der Regel anstatt Lösung die Benennung *Integral* an.

Es ist bekannt, daß durch einen beliebigen Punkt (t_0, y_0), $t_0 \in j$, in jeder beliebigen Richtung y_0' stets genau ein Integral y der Differentialgleichung (q) hindurchgeht: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$.

Das identisch verschwindende Integral der Differentialgleichung (q) wird gewöhnlich von den Betrachtungen ausgeschlossen.

Gelegentlich übertragen wir (aus Sprachgründen) die für die Differentialgleichung (q) erklärten Begriffe auf den Träger q. Beispielsweise sprechen wir von Lösungen bzw. Integralen des Trägers q.

2. Zu einer zweigliedrigen Folge von Lösungen u, v der Differentialgleichung (q) mit demselben Definitionsintervall $i \subset j$ gehört die Wronskische Determinante $w = uv' - u'v$, deren Wert stets konstant ist. Die Lösungen u, v sind voneinander (linear) unabhängig oder abhängig, je nachdem, ob die Wronskische Determinante der zweigliedrigen Folge u, v bzw. v, u von Null verschieden oder gleich Null ist. Die Lösungen u, v sind voneinander abhängig genau dann, wenn sie oder ihre (ersten) Ableitungen eine gemeinsame Nullstelle besitzen. In diesem Fall haben die Lösungen u, v alle Nullstellen gemeinsam, und dasselbe gilt von den Ableitungen u', v'.

Zwei im Intervall j definierte Funktionen u, v der Klasse C_2 stellen voneinander unabhängige Integrale einer Differentialgleichung (q) dar, wenn die Funktion $w = uv' - u'v$ konstant und von Null verschieden ist, und nur in diesem Fall. Die Funktion q ist dann

$$q = -\frac{1}{w}(u'v'' - u''v'). \tag{4}$$

Wenn eine Lösung u der Differentialgleichung (q) stets von Null verschieden ist, so stellt die Funktion

$$v(t) = u(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{d\sigma}{u^2(\sigma)} \qquad (t_0 \in j) \tag{5}$$

eine weitere Lösung von (q) dar. Die Lösungen u, v sind voneinander unabhängig: $w = 1$.

3. Basen. Die Menge aller Integrale der Differentialgleichung (q) ist ein zweidimensionaler linearer Raum, der sogenannte *Integralraum* r der Differentialgleichung (q). Jede zweigliedrige Folge von voneinander unabhängigen Integralen u, v der Differentialgleichung (q) bildet eine *Basis* (u, v) von r: Ein beliebiges Integral $y \in r$ hat in bezug auf die Basis (u, v) eindeutig bestimmte konstante Koordinaten c_1, c_2, also $y = c_1 u + c_2 v$, und umgekehrt gehört zu jeder zweigliedrigen Folge von Konstanten c_1, c_2 genau ein Integral y der Differentialgleichung (q) mit den Koordinaten c_1, c_2. Eine Basis von r nennen wir auch Basis der Differentialgleichung (q). Die Basen (u, v), (v, u) werden als zueinander invers bezeichnet. Zwei Basen (u, v), (ku, kv), wobei k $(\neq 0)$ eine beliebige Konstante ist, heißen proportional.

4. Integralkurven. Eine Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) bestimmt eine ebene Kurve mit den parametrischen Koordinaten $u(t)$, $v(t)$. Die Kurve kann also in bezug auf ein festes Koordinatensystem mit dem Ursprung O vermöge der Parameterdarstellung $x_1 = u(t)$, $x_2 = v(t)$ definiert werden. Eine solche Kurve wollen wir *Integralkurve* der Differentialgleichung (q) nennen. Wird die Veränderliche t als die Zeit gedeutet, so kann die Integralkurve als die Bahnkurve des Punktes $P(t) = P[u(t), v(t)]$ angesehen werden. Die vom Radiusvektor $\overrightarrow{OP}$ in dem Zeitabschnitt $t_1 < t_2$ beschriebene Fläche ist gleich $\frac{1}{2} w(t_2 - t_1)$, wobei natürlich w die Wronkische Determinante von (u, v) bedeutet. Integralkurven der Differentialgleichung (q) werden durch Transformationen der zweidimensionalen linearen homogenen Gruppe, d. h. durch zentroaffine ebene Transformationen, wieder in solche Integralkurven übergeführt. Die bei einer Integralkurve der Differentialgleichung (q) auftretenden und gegenüber den erwähnten Transformationen invarianten Eigenschaften kommen bei allen Integralkurven von (q) vor und sind durch gewisse Eigenschaften des Trägers q der Differentialgleichung (q) gekennzeichnet. Umgekehrt haben die durch spezielle Eigenschaften des Trägers q bedingten Eigenschaften der Integralkurven der Differentialgleichung (q) einen gegenüber den zentroaffinen ebenen Transformationen invarianten Charakter.

5. Kinematische Deutung von Integralen. Gelegentlich ist es vorteilhaft, den Wert $u(t)$ eines Integrals u der Differentialgleichung (q) als den orientierten Abstand eines auf einer orientierten Geraden G beweglichen Punktes P von einem festen Punkt (Nullpunkt) O der Geraden G zu deuten: In jedem Augenblick t ($\in j$) ist der Punkt P vom Nullpunkt O um $u(t)$ Längeneinheiten entfernt, und zwar in der positiven oder negativen Richtung der Geraden G, je nachdem, ob $u(t) > 0$ oder < 0 ist. Die Durchgänge von P durch den Nullpunkt O erfolgen genau zu den durch die Nullstellen von u gegebenen Zeiten. Wir sagen, daß die Bewegung des Punktes P entsprechend dem Integral u der Differentialgleichung (q) erfolgt.

6. Typen von Differentialgleichungen (q). Alle Integrale der Differentialgleichung (q) haben denselben oszillatorischen Charakter, d. h., alle zugleich haben entweder endlich oder unendlich viele Nullstellen im Intervall j. Im ersten Fall heißt die Differentialgleichung (q) *von endlichem Typus* oder *nichtoszillatorisch.* Sie heißt genauer *vom Typus* (m) ($m \geqq 1$, ganz), wenn sie Integrale mit m, nicht aber solche mit $m + 1$ Nullstellen im Intervall j zuläßt. Im zweiten Fall heißt die Differentialgleichung (q) *von unendlichem Typus* und genauer *links-* bzw. *rechtsseitig oszillatorisch* oder schlechtweg *oszillatorisch*, je nachdem, ob sich die Nullstellen ihrer Integrale nur gegen den linken bzw. rechten Endpunkt oder gegen beide Endpunkte des Intervalls j häufen. Man spricht auch von einer Differentialgleichung (q) von unendlichem Typus *von der 1. bzw. 2. oder 3. Gattung.*

Später (§ 3, Nr. 6, 10, § 7, Nr. 2) werden wir die Differentialgleichungen (q) von endlichen Typen (m), $m \geqq 1$, in allgemeine und spezielle Differentialgleichungen unterteilen. Unter der *Art* einer Differentialgleichung (q) verstehen wir bei endlichem Typus, ob sie allgemein oder speziell ist, und bei unendlichem Typus ihre Gattung.

Alle Nullstellen von Integralen der Differentialgleichung (q) liegen isoliert.

7. Die Schwarzsche Ableitung. Wir gehen von einer im dreidimensionalen reellen Koordinatenraum S_3 definierten birationalen Transformation T aus. Dieselbe ist durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{1}{\dot{x}}, & \dot{x} &= \frac{1}{X'}, \\ X'' &= -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}, & \ddot{x} &= -\frac{X''}{X'^3}, \\ X''' &= 3\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^5} - \frac{\dddot{x}}{\dot{x}^4}, & \dddot{x} &= 3\frac{X''^2}{X'^5} - \frac{X'''}{X'^4} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

erklärt und ordnet also im Sinne dieser Formeln je zwei Punkte X' ($\neq 0$), X'', X'''; $\dot{x}$ ($\neq 0$), $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ des Raumes S_3 einander zu.

Die Transformation T läßt die Funktion

$$K(X) = \frac{X''^2}{X'^3} \tag{7}$$

invariant:

$$K(X) = K(x). \tag{8}$$

Die sogenannte Schwarzsche Funktion

$$S(X) = \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2} \tag{9}$$

wird so transformiert:

$$\frac{S(X)}{X'} + \frac{S(x)}{\dot{x}} = 0. \tag{10}$$

Die Transformation T kommt insbesondere bei der Betrachtung von Beziehungen zwischen den Werten von zwei zueinander inversen Funktionen einer Veränderlichen und ihren Ableitungen vor.

Es seien $X(t), x(T)$ zwei zueinander inverse Funktionen, deren Definitionsintervalle wir mit i, I bezeichnen wollen. Wir setzen natürlich voraus, daß die Funktionen X, x in den Intervallen $i = x(I)$, $I = X(i)$ eigentlich monoton sind. Aus sprachlichen Gründen nennen wir je zwei den Formeln $T = X(t)$, $t = x(T)$ entsprechende Zahlen t, T homolog; gelegentlich wird die Zahl t (T) als die mit T (t) homologe Zahl bezeichnet.

Wir nehmen an, die Funktionen X, x seien in den Intervallen i, I dreimal differenzierbar. Dann ergeben die Differentiationsregeln für je zwei homologe Zahlen $t \in i$, $T \in I$ die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} X'\dot{x} &= 1\,, \\ X''\dot{x} + X'^2\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{x}X' + \dot{x}^2 X'' &= 0\,, \\ X'''\dot{x}^2 + 3X''\ddot{x} + \dddot{x}X'^2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir sehen, daß bei der birationalen Transformation T die Werte der Ableitungen von zwei zueinander inversen Funktionen X, x an homologen Stellen ineinander übergehen.

8. Es sei $X(t)$ eine dreimal differenzierbare Funktion im Intervall j, deren Ableitung X' stets von Null verschieden ist: $X'(t) \neq 0$ für $t \in j$.

Unter der *Schwarzschen Ableitung* der Funktion X versteht man die mit den Ableitungen X', X'', X''' gebildete Schwarzsche Funktion $S(X)$. Der Wert der Schwarzschen Ableitung von X an der Stelle $t \in j$ wird mit $\{X, t\}$ bezeichnet, also

$$\{X, t\} = \frac{1}{2}\,\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}\,. \tag{12}$$

Eine leichte Rechnung ergibt die Beziehung

$$\{X, t\} = -\sqrt{|X'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)''\,, \tag{13}$$

wobei rechts der Wert der angeführten Funktion an der Stelle t zu nehmen ist.

Schwarzsche Ableitungen kommen insbesondere bei linearen Transformationen von Funktionen zur Geltung. Grundlegend ist der folgende

Satz. *Die Schwarzschen Ableitungen $\{X, t\}$, $\{Y, t\}$ von zwei Funktionen $X, Y \in C_3$ in einem Intervall j sind dann und nur dann identisch, wenn die X, Y projektiv zusammenhängen:*

$$Y(t) = \frac{c_{11}X(t) + c_{10}}{c_{21}X(t) + c_{20}}\,, \tag{14}$$

$t \in j$; $c_{10}, c_{11}, c_{20}, c_{21} = \text{const.}$

Beweis. Die Bedingung für das Zusammenfallen der Schwarzschen Ableitungen ist hinreichend, wie dies durch die Berechnung dieser letzteren festgestellt werden kann. Wir haben also die Notwendigkeit der Bedingung nachzuweisen.

Es sei im Intervall j: $\{X, t\} = \{Y, t\}$. Wir wollen die hier beiderseits stehende stetige Funktion mit $q(t)$ bezeichnen. Dann zeigt die Formel (13), daß die Funktionen $1: \sqrt{|X'|}$, $1: \sqrt{|Y'|}$ Integrale der Differentialgleichung (—q) darstellen. Da diese Funktionen stets von Null verschieden sind, sind (nach (5)) auch $X: \sqrt{|X'|}$, $Y: \sqrt{|Y'|}$ Integrale derselben Differentialgleichung (—q), wobei die Integrale $1: \sqrt{|X'|}$, $X: \sqrt{|X'|}$ und desgleichen $1: \sqrt{|Y'|}$, $Y: \sqrt{|Y'|}$ voneinander unabhängig sind. Folglich gibt es Konstante c_{10}, c_{11}; c_{20}, c_{21} derart, daß

$$\frac{Y}{\sqrt{|Y'|}} = c_{11}\frac{X}{\sqrt{|X'|}} + c_{10}\frac{1}{\sqrt{|X'|}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{|Y'|}} = c_{21}\frac{X}{\sqrt{|X'|}} + c_{20}\frac{1}{\sqrt{|X'|}}$$

gilt, und daraus folgt die Beziehung (14).

Wir wollen noch zwei weitere Eigenschaften der Schwarzschen Ableitungen erwähnen, die für unsere späteren Betrachtungen von Bedeutung sind.

Es seien $X(t)$, $x(T)$ dreimal differenzierbare und zueinander inverse Funktionen in den Intervallen i, I.

1. Zunächst gelten an beliebigen Stellen $t \in i$, $T \in I$, wie leicht nachzurechnen ist, die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\{X, t\}}{X'} &= \frac{1}{4}\frac{X''^2}{X'^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X'}\right)'', \\ \frac{\{x, T\}}{\dot{x}} &= \frac{1}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Sind insbesondere die Zahlen t, T homolog, so bestehen Formeln wie (6), (8), und man erhält das folgende Resultat:

An je zwei homologen Stellen $t \in i$, $T \in I$ besteht die symmetrische Beziehung:

$$\frac{\{X, t\}}{X'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X'}\right)'' = \frac{\{x, T\}}{\dot{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot}. \tag{16}$$

2. Es sei Z eine dreimal differenzierbare Funktion in einem Intervall h, wobei $Z(t) \subset i$ und $Z'(t) \neq 0$ für $t \in h$ ist.

Dann existiert im Intervall h die zusammengesetzte Funktion XZ sowie ihre Schwarzsche Ableitung, und es gilt

$$\{XZ, t\} = \{X, Z(t)\}\, Z'^2(t) + \{Z, t\}. \tag{17}$$

9. Begleitende Differentialgleichungen. In dieser Nr. wollen wir annehmen, daß der Träger q der Differentialgleichung (q) im Intervall j stets von Null verschieden ist und der Klasse C_2 angehört.

In diesem Fall definiert man im Intervall j die sogenannte *erste begleitende Differentialgleichung* $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ *von* (q),

$$y_1'' = \hat{q}_1(t)\, y_1, \tag{$\hat{\mathrm{q}}_1$}$$

und zwar vermöge der Formel

$$\hat{q}_1(t) = q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)''. \tag{18}$$

Die Funktion $\hat{q}_1$, der sogenannte *erste begleitende Träger von* q, kann offenbar in der Form

$$\hat{q}_1(t) = q(t) - \frac{1}{2}\frac{q''(t)}{q(t)} + \frac{3}{4}\frac{q'^2(t)}{q^2(t)} \tag{19}$$

oder auch in der Form

$$\hat{q}_1(t) = q(t) - \left\{\int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, d\sigma, t\right\} \quad (t_0 \in j) \tag{20}$$

geschrieben werden.

Die innere Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (q), $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ besteht darin, daß für jedes Integral y der Differentialgleichung (q) die Funktion

$$y_1(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{|q(t)|}} \tag{21}$$

ein Integral der Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ darstellt. Aber es gilt auch umgekehrt:

Für jedes Integral y_1 der Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ stellt die Funktion $y_1\sqrt{|q(t)|}$ die Ableitung y' genau eines Integrals y von (q) dar.

Beweis. Es sei y_1 ein Integral von $(\hat{\mathrm{q}}_1)$. Wir wählen eine beliebige Zahl $t_0 \in j$.

a) Wir nehmen an, es gäbe ein Integral y der Differentialgleichung (q) so, daß im Intervall j die Beziehung

$$y_1\sqrt{|q|} = y' \tag{22}$$

gilt. Das Integral y und seine Ableitung y' haben offenbar an der Stelle t_0 die Werte

$$y_0 = \frac{1}{q(t_0)}\left[y_1\sqrt{|q|}\right]'_{t=t_0}; \qquad y_0' = y_1(t_0)\sqrt{|q(t_0)|}. \tag{23}$$

Wir sehen, daß es höchstens ein der Beziehung (22) genügendes Integral y von (q) gibt, wobei nur das durch die Anfangswerte (23) bestimmte Integral von (q) in Frage kommt.

b) Wir definieren nun im Intervall j die Funktion y so:

$$y(t) = \frac{1}{q(t_0)}\left[y_1\sqrt{|q|}\right]'_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t} y_1(\sigma)\sqrt{|q(\sigma)|}\, d\sigma.$$

Die Funktion y und ihre Ableitung haben offenbar an der Stelle t_0 die Werte (23). Außerdem besteht im Intervall j die Beziehung (22). Aus dieser letzteren folgt im Hinblick darauf, daß y_1 die Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ befriedigt, und unter Anwendung der Formel (19) die Beziehung

$$y''' - y''\frac{q'}{q} - y'q = 0$$

und ferner

$$\left[\frac{y'' - qy}{q}\right]' = 0.$$

Wir haben also

$$y'' - qy = kq \quad (k = \text{const}),$$

und (22) und die Anfangswerte (23) ergeben $k = 0$. Die Funktion y ist also ein Integral der Differentialgleichung (q), und damit ist der Beweis beendet.

Die Abbildung P des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum r_1 von $(\hat{\mathrm{q}}_1)$, in der jedes Integral $y \in r$ auf das Integral $y_1 = y' : \sqrt{|q|} \in r_1$ abgebildet wird, nennen wir die *Projektion* des Integralraumes r auf den Integralraum r_1. Wir sagen auch: $y_1 (= Py)$ sei die Projektion von y und nennen die Integrale y, y_1 (miteinander) *assoziiert*.

Der Leser möge nachrechnen, daß die Wronskischen Determinanten zweier Basen (u, v), (Pu, Pv) von r bzw. r_1 zusammenfallen.

Die Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ stellt die erste begleitende Differentialgleichung von (q) dar. Die *n-te begleitende Differentialgleichung* $(\hat{\mathrm{q}}_n)$ *von* (q) wird als die erste begleitende Differentialgleichung von $(\hat{\mathrm{q}}_{n-1})$ definiert $(n \geqq 2)$.

Beispielsweise ist die zu der Besselschen Differentialgleichung

$$y'' = -\left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{t^2}\right) y \quad (j = (0, \infty), \ \nu = \text{const}) \tag{24}$$

gehörige erste begleitende Differentialgleichung

$$y'' = -\left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{t^2} + \frac{3(1 - 4\nu^2)}{(t^2 + 1 - 4\nu^2)^2}\right) y. \tag{25}$$

§ 2. Elementare Eigenschaften von Integralen der Differentialgleichung (q)

1. Gegenseitige Lage von Nullstellen eines Integrals und seiner Ableitung. Zwischen zwei Nullstellen eines Integrals y der Differentialgleichung (q) liegt stets wenigstens eine Nullstelle seiner Ableitung y'. Zwischen zwei Nullstellen der Ableitung y' liegt stets wenigstens eine Nullstelle von y oder eine Nullstelle von q. Daraus folgt:

Zwischen zwei benachbarten Nullstellen eines Integrals y der Differentialgleichung (q) liegt genau eine Nullstelle von y', wenn in diesem Intervall überall $q \neq 0$ ist. Zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Ableitung y' liegt genau eine Nullstelle von y, wenn in diesem Intervall überall $q \neq 0$ ist.

In diesen Aussagen kann ohne Verlust an Allgemeinheit die Ungleichung $q \neq 0$ durch $q < 0$ ersetzt werden. Dies geht hervor aus dem folgenden

Satz. *Wenn zwischen zwei benachbarten Nullstellen eines Integrals y der Differentialgleichung* (q) *bzw. seiner Ableitung y' oder des Integrals y und seiner Ableitung y' die Funktion q nicht verschwindet, so ist sie daselbst negativ*: $q < 0$.

Beweis. Offenbar genügt es, den dritten Fall zu betrachten. Es seien t_1, x_1 Zahlen im Intervall j, etwa $t_1 < x_1$, und z. B. $y(t_1) = y'(x_1) = 0$, $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$ für $t \in (t_1, x_1)$. Im Gegensatz zu unserer Behauptung wollen wir im Intervall (t_1, x_1) $q > 0$ annehmen. Dann gilt in diesem Intervall $(y')' > 0$, die Funktion y' wächst und ist wegen $y'(x_1) = 0$ negativ. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme.

2. Verhältnisse von Integralen und ihren Ableitungen. Für zwei Integrale u, v der Differentialgleichung (q) gelten im Intervall j, mit Ausnahme von Nullstellen der entsprechenden Nenner, die Formeln

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{w}{v^2}, \quad \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{wq}{v'^2}, \quad \left(\frac{uu'}{vv'}\right)' = w\,\frac{quv - u'v'}{v^2v'^2} \tag{1}$$

$$(w = uv' - u'v).$$

Man sieht folgendes: Sind die Integrale u, v voneinander unabhängig, so stellt das Verhältnis $u : v$ in jedem Teilintervall $i \subset j$, in dem keine Nullstellen von v vorkommen, eine wachsende oder abnehmende Funktion dar, je nachdem, ob $w < 0$ oder $w > 0$ ist. Unter derselben Voraussetzung gilt von der Funktion $u' : v'$, daß sie in jedem von Nullstellen der Funktion v' freien Intervall $i \subset j$ wächst oder abnimmt, je nachdem, ob daselbst überall $wq > 0$ oder $wq < 0$ ist. Ähnliches gilt auch von der Funktion $uu' : vv'$.

Durch Integration der obigen Formeln in einem Intervall $(t, x) \subset j$, in dem die entsprechenden Nenner von Null verschieden sind, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(t)}{v(t)} = -w\int_t^x \frac{d\sigma}{v^2}, \qquad \frac{u'(x)}{v'(x)} - \frac{u'(t)}{v'(t)} = w\int_t^x \frac{q\,d\sigma}{v'^2}, \\ &\frac{u(x)\,u'(x)}{v(x)\,v'(x)} - \frac{u(t)\,u'(t)}{v(t)\,v'(t)} = w\int_t^x \frac{quv - u'v'}{v^2v'^2}\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sind die Zahlen t, x Nullstellen der Funktion u bzw. u' oder ist eine von ihnen eine Nullstelle von u und die andere eine solche von u', so sind die entsprechenden Integrale rechts in diesen Formeln gleich Null.

3. Die Ordnungssätze. Die Lage der Nullstellen von zwei unabhängigen Integralen der Differentialgleichung (q) und ihren Ableitungen weist gewisse Gesetzmäßigkeiten auf. Wir wollen diese letzteren in vier Sätzen, den sogenannten *Ordnungssätzen*, beschreiben. Die betreffenden Beweise folgen aus den obigen Formeln (2).

Es seien u, v unabhängige Integrale der Differentialgleichung (q) *und $t_1 < x_1$ Zahlen im Intervall j.*

1. *Ist $u(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, x_1)$, so hat das Integral v genau eine Nullstelle im Intervall (t_1, x_1).*

Ferner sei $q(t) \neq 0$ *für* $t \in j$.

2. *Ist* $u'(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u'(t) \neq 0$ *für* $t \in (t_1, x_1)$, *so hat die Funktion* v' *genau eine Nullstelle im Intervall* (t_1, x_1).

3. *Es sei* $u'(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ *für* $t \in (t_1, x_1)$. *Ist* $t_2 < t_1$, $v'(t_2) = 0$, *so hat das Integral* v *eine Nullstelle* $x_2 \in (t_2, x_1)$. *Ist* $x_2 > x_1$, $v(x_2) = 0$, *so hat die Funktion* v' *eine Nullstelle* $t_2 \in (t_1, x_2)$.

4. *Es sei* $u(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ *für* $t \in (t_1, x_1)$. *Ist* $t_2 < t_1$, $v(t_2) = 0$, *so hat die Funktion* v' *eine Nullstelle* $x_2 \in (t_2, x_1)$. *Ist* $x_2 > x_1$, $v'(x_2) = 0$, *so hat das Integral* v *eine Nullstelle* $t_2 \in (t_1, x_2)$.

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis etwa des ersten Teiles in 3. beschränken.

Im Gegensatz zu unserer Behauptung wollen wir annehmen: $v(t) \neq 0$ für $t \in (t_2, x_1)$. Dann gilt $v(t)\, v'(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, x_1)$ und sogar für $t \in [t_1, x_1]$. Wir dürfen offenbar die letzte Formel (2) auf die Integrale u, v im Intervall $[t_1, x_1]$ anwenden. Es folgt

$$\int_{t_1}^{x_1} \frac{quv - u'v'}{v^2 v'^2}\, d\sigma = 0.$$

Offenbar können wir $v'(t_1) < 0$, $u'(x_1) < 0$ voraussetzen. Dann haben wir im Intervall (t_1, x_1): $u > 0$, $u' < 0$; $v > 0$, $v' < 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der obigen Integralbeziehung, und der Beweis ist beendet.

4. Die (Riemannschen) Integrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}, \int_{x_0}^{x_1} \frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)}\, d\sigma$ **in der Nähe von singulären Stellen.** Es sei y ein Integral der Differentialgleichung (q) mit einer Nullstelle c.

Wir betrachten eine links- bzw. rechtsseitige Umgebung j_{-1} bzw. j_0 von c, in der das Integral y nicht verschwindet, und wählen vorerst eine Zahl $x_0 \in j_{-1}$. Wir wollen das Verhalten des Integrals $\int_{x_0}^{t} d\sigma / y^2(\sigma)$, $t \in j_{-1}$, in der Nähe der singulären Stelle c untersuchen.

Offenbar gilt für $\sigma \in j_{-1}$

$$y(\sigma) = y'(c)\,(\sigma - c) + \frac{(\sigma - c)^2}{2}\, y''(\tau)$$

mit $\sigma < \tau < c$. Daraus folgt

$$y^2(\sigma) = y'^2(c)\,(\sigma - c)^2 \left[1 + \frac{\sigma - c}{2} \cdot \frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2$$

und ferner

$$\frac{1}{y^2(\sigma)} = \frac{1}{y'^2(c)\,(\sigma - c)^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{\sigma - c}{2} \cdot \frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2}.$$

Nun gilt aber nach der Taylorschen Formel

$$\frac{1}{\left[1+\frac{\sigma-c}{2}\cdot\frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2} = 1-(\sigma-c)\frac{y''(\tau)}{y'(c)} + \frac{(\sigma-c)^2}{4}\cdot\frac{y''^2(\tau)}{y'^2(c)}\cdot\frac{3}{\left[1+\Theta\frac{\sigma-c}{2}\cdot\frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^4}$$

mit $0 < \Theta < 1$. Wir haben also

$$\frac{1}{y^2(\sigma)} = \frac{1}{y'^2(c)}\left[\frac{1}{(\sigma-c)^2} - \frac{q(\tau)}{y'(c)}\cdot\frac{\tau-c}{\sigma-c}\cdot\frac{y(\tau)-y(c)}{\tau-c}\right] + O(1),$$

wobei sich das Symbol O natürlich auf die linksseitige Umgebung von c bezieht.

Es sei für $\sigma \in j_{-1}$

$$g(\sigma) = \frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c)}\cdot\frac{1}{(\sigma-c)^2}. \tag{3}$$

Wir haben

$$g(\sigma) = -\frac{q(\tau)}{y'^3(c)}\cdot\frac{\tau-c}{\sigma-c}\cdot\frac{y(\tau)-y(c)}{\tau-c} + O(1). \tag{4}$$

Nach der Formel (3) ist die Funktion g im Intervall j_{-1} stetig, während die Formel (4) zeigt, daß sie dort beschränkt ist. Daraus folgt die Existenz des (Riemannschen) Integrals $\int_{x_0}^{c} g(\sigma)\,d\sigma$.

Wir dehnen nun die Definition der Funktion g auf das Intervall j_0 aus, und zwar im Sinne der Formel (3). Eine der obigen analoge Überlegung führt zu der Erkenntnis, daß für jede Zahl $x_1 \in j_0$ das Integral $\int_{c}^{x_1} g(\sigma)\,d\sigma$ existiert.

Für je zwei Zahlen $x_0 \in j_{-1}$, $x_1 \in j_0$ existiert das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} g(\sigma)\,d\sigma = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c)}\cdot\frac{1}{(\sigma-c)^2}\right]d\sigma.$$

Es seien nun $x_0 < x_m$ beliebige Zahlen im Intervall j, die keine Nullstellen des Integrals y sind und zwischen denen genau m ($\geqq 1$) Nullstellen $c_1, \ldots, c_m$ dieses Integrals liegen: $x_0 < c_1 < \cdots < c_m < x_m$.

Wir definieren im Intervall $[x_0, x_m]$, mit Ausnahme der Zahlen c_μ, die Funktion g_m folgendermaßen:

$$g_m(\sigma) = \frac{1}{y^2(\sigma)} - \sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{y'^2(c_\mu)}\cdot\frac{1}{(\sigma-c_\mu)^2}.$$

Wir wählen in jedem Intervall $(c_\mu, c_{\mu+1})$ eine Zahl x_μ; $\mu = 1, \ldots, m-1$.

Nach dem obigen Resultat existiert für $\nu = 1, \ldots, m$ das Integral

$$\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g_m(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \left[\frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c_\nu)} \cdot \frac{1}{(\sigma - c_\nu)^2}\right] d\sigma$$

$$+ \sum_{\nu \neq \mu = 1}^{m} \frac{1}{y'^2(c_\mu)} \left[\frac{1}{x_\nu - c_\mu} - \frac{1}{x_{\nu-1} - c_\mu}\right].$$

Daraus findet man durch Summation die Formel

$$\int\limits_{x_0}^{x_m} g_m(\sigma)\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \left[\frac{1}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{y'^2(c_\nu)} \cdot \frac{1}{(\sigma - c_\nu)^2}\right] d\sigma$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{y'^2(c_\mu)} \left[\frac{1}{c_\mu - x_{\mu-1}} + \frac{1}{x_\mu - c_\mu}\right]$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{y'^2(c_\mu)} \left[\frac{1}{c_\mu - x_0} + \frac{1}{x_m - c_\mu}\right].$$

5. Wir setzen nun voraus, daß die Funktion q im Intervall j nicht verschwindet und der Klasse C_2 angehört. Dann können wir die obigen Resultate auf die erste begleitende Differentialgleichung $(\hat{\mathrm{q}}_1)$ von (q) anwenden (§ 1, Nr. 9).

Es sei y ein Integral von (q) und $e \in j$ eine Nullstelle seiner Ableitung y'. Wir setzen für σ in einer Umgebung von e, $\sigma \neq e$

$$h(\sigma) = \frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \frac{1}{q(e)\,y^2(e)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e)^2}.$$

Dann existiert für je zwei Zahlen $x_0, x_1 \in j$, die keine Nullstellen der Ableitung y' sind und zwischen denen genau die Nullstelle e von y' liegt, das Integral

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} h(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \frac{1}{q(e)\,y^2(e)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e)^2}\right] d\sigma.$$

Allgemeiner gilt:

Es seien $x_0 < x_m$ beliebige Zahlen im Intervall j, die keine Nullstellen der Ableitung y' sind und zwischen denen genau m $(\geqq 1)$ Nullstellen $e_1, \ldots, e_m$ von y' liegen: $x_0 < e_1 < \cdots < e_m < x_m$.

Wir definieren im Intervall $[x_0, x_m]$, mit Ausnahme der Zahlen e_μ, die Funktion h_m folgendermaßen:

$$h_m(\sigma) = \frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{q(e_\mu)\,y^2(e_\mu)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e_\mu)^2}$$

und wählen in jedem Intervall $(e_\mu, e_{\mu+1})$ eine Zahl x_μ; $\mu = 1, \ldots, m-1$.

Dann existiert das zwischen den Grenzen x_0, x_m genommene Integral der Funktion h_m, und es gilt die Formel

$$\int_{x_0}^{x_m} h_m(\sigma)\, d\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \left[\frac{q(\sigma)}{y'^2(\sigma)} - \frac{1}{q(e_\nu)\, y^2(e_\nu)} \cdot \frac{1}{(\sigma - e_\nu)^2}\right] d\sigma$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{q(e_\mu)\, y^2(e_\mu)} \left[\frac{1}{e_\mu - x_{\mu-1}} + \frac{1}{x_\mu - e_\mu}\right]$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{q(e_\mu)\, y^2(e_\mu)} \left[\frac{1}{e_\mu - x_0} + \frac{1}{x_m - e_\mu}\right].$$

6. Basenfunktionen. Wir betrachten nun zwei Differentialgleichungen

$$y'' = q(t)\, y, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)\, Y \tag{Q}$$

in ihren Definitionsintervallen j, J: $t \in j$, $T \in J$. Dabei wird das Zusammenfallen dieser Differentialgleichungen nicht ausgeschlossen.

Es sei (u, v), (U, V) eine aus beliebigen Basen von (q), (Q) bestehende (zweigliedrige) Folge.

Unter einer zu dieser Basenfolge gehörigen *Basenfunktion* verstehen wir die durch einen der folgenden Ausdrücke 1. bis 4. in dem Gebiet $j \times J$ definierte Funktion $F(t, T)$:

1. $u(t)\, V(T) - v(t)\, U(T)$, 2. $u'(t)\, \dot{V}(T) - v'(t)\, \dot{U}(T)$,

3. $u(t)\, \dot{V}(T) - v(t)\, \dot{U}(T)$, 4. $u'(t)\, V(T) - v'(t)\, U(T)$.

Es gibt also vier zu der betrachteten (und folglich zu jeder) Basenfolge der Differentialgleichungen (q), (Q) gehörige Basenfunktionen.

Wenn Differentialgleichungen (q), (Q) zusammenfallen, so spricht man von *Basenfunktionen der Differentialgleichung* (q).

Wir betrachten eine Basenfunktion $F(t, T)$. Es seien $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ beliebige Zahlen, für die $F(t_0, X_0) = 0$ und in den Fällen 2. und 3. überdies $Q(X_0) \neq 0$ ist.

Wir wollen zeigen, daß *es genau eine in einer Umgebung von t_0 definierte Funktion $X(t)$ gibt, die an der Stelle t_0 den Wert X_0 annimmt, in ihrem Definitionsintervall stetig ist und daselbst die Gleichung $F[t, X(t)] = 0$ befriedigt. Ferner hat die Funktion X in ihrem Definitionsintervall die stetige Ableitung*

$$X'(t) = -\frac{F'[t, X(t)]}{\dot{F}[t, X(t)]}.$$

In den einzelnen Fällen ist also die Ableitung $X'(t)$ durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$1.\quad -\frac{u'(t)\,V[X(t)] - v'(t)\,U[X(t)]}{u(t)\,\dot{V}[X(t)] - v(t)\,\dot{U}[X(t)]},$$

$$2.\quad -\frac{q(t)}{Q[X(t)]}\cdot\frac{u(t)\,\dot{V}[X(t)] - v(t)\,\dot{U}[X(t)]}{u'(t)\,V[X(t)] - v'(t)\,U[X(t)]},$$

$$3.\quad -\frac{1}{Q[X(t)]}\cdot\frac{u'(t)\,\dot{V}[X(t)] - v'(t)\,\dot{U}[X(t)]}{u(t)\,V[X(t)] - v(t)\,U[X(t)]},$$

$$4.\quad -q(t)\,\frac{u(t)\,V[X(t)] - v(t)\,U[X(t)]}{u'(t)\,\dot{V}[X(t)] - v'(t)\,\dot{U}[X(t)]}.$$

Der Beweis verläuft z. B. für

$$F(t, T) = u(t)\,V(T) - v(t)\,U(T)$$

in folgender Weise:

Nach unserer Annahme ist $F(t_0, X_0) = 0$, und die Funktion F besitzt offenbar in jedem Punkt $(t, T) \in j \times J$ stetige partielle Ableitungen

$$F'(t, T) = u'(t)\,V(T) - v'(t)\,U(T),$$

$$\dot{F}(t, T) = u(t)\,\dot{V}(T) - v(t)\,\dot{U}(T).$$

Ferner ist $\dot{F}(t_0, X_0) \neq 0$. In der Tat, andernfalls haben wir

$$(F(t_0, X_0) =)\quad u(t_0)\,V(X_0) - v(t_0)\,U(X_0) = 0,$$

$$(\dot{F}(t_0, X_0) =)\quad u(t_0)\,\dot{V}(X_0) - v(t_0)\,\dot{U}(X_0) = 0,$$

und durch diese Beziehungen wird in Hinblick auf $u^2(t_0) + v^2(t_0) \neq 0$ die gegenseitige Unabhängigkeit der Integrale U, V von (Q) in Abrede gestellt.

Zur Vollendung des Beweises genügt es, nun den klassischen Satz über implizite Funktionen anzuwenden.

Wir wollen noch folgendes bemerken:

Wenn zwei in einem Intervall $i \subset j$ stetige Funktionen $(z =)\; x, X$ in einem Punkt des Intervalls i denselben Wert annehmen und in diesem Intervall die Gleichung $F(t, z) = 0$ befriedigen, so fallen sie im Intervall i zusammen. In der Tat, andernfalls gibt es im Intervall i Zahlen $t_1 < t_2$ derart, daß z. B. $x(t_1) = X(t_1)$ und $x(t) \neq X(t)$ für $t_1 < t \leqq t_2$ ist. Dies widerspricht jedoch dem obigen Satz.

§ 3. Konjugierte Zahlen

Konjugierte Zahlen, deren Begriff und Eigenschaften in diesem Paragraphen besprochen werden, spielen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung und insbesondere in der Transformationstheorie dieser Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (q).

1. Begriff der konjugierten Zahlen. Es sei $t \in j$ eine beliebige Zahl, und ferner seien u, v beliebige Integrale der Differentialgleichung (q) derart, daß $u(t) = 0$, $v'(t) = 0$ ist.

Wir nennen eine Zahl $x \in j$ $(x \neq t)$ mit der Zahl t *konjugiert* (in bezug auf die Differentialgleichung (q)), und zwar von der

1. Art, 2. Art, 3. Art, 4. Art,

je nachdem, ob

$$u(x) = 0, \quad v'(x) = 0, \quad u'(x) = 0, \quad v(x) = 0$$

ist.

Wenn die Zahl x mit t von der $\varkappa$-ten Art konjugiert ist, so nennen wir sie auch *$\varkappa$-konjugiert* mit t; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$.

Eine mit t $\varkappa$-konjugierte Zahl x heißt *links-* bzw. *rechtsseitig konjugiert* (von der $\varkappa$-ten Art), je nachdem, ob $x < t$ bzw. $x > t$ ist.

Man sieht, daß die Zahl x mit t von der 1. bzw. 2., 3., 4. Art konjugiert ist, wenn sie eine Nullstelle der Funktion u bzw. v', u', v darstellt. Ist die Zahl x die n-te $(n \geqq 1)$ links bzw. rechts von t liegende Nullstelle dieser Funktion, so heißt sie die *n-te mit t links-* bzw. *rechtsseitig* (von der entsprechenden Art) *konjugierte Zahl.*

Ist x die n-te mit t linksseitig (rechtsseitig) 1- bzw. 2-konjugierte Zahl, so ist t die n-te mit x rechtsseitig (linksseitig) 1- bzw. 2-konjugierte Zahl. Wegen dieser Symmetrie sprechen wir gelegentlich von 1- bzw. 2-konjugierten Zahlen und insbesondere im Fall $n = 1$ von *benachbarten* 1- bzw. 2-konjugierten Zahlen t, x.

Unter der Annahme, daß zwischen je zwei benachbarten Nullstellen eines Integrals von (q) bzw. seiner Ableitung genau eine Nullstelle dieser Ableitung bzw. des Integrals liegt, gilt ferner:

Ist x die n-te mit t linksseitig (rechtsseitig) 3- bzw. 4-konjugierte Zahl, so ist t die n-te mit x rechtsseitig (linksseitig) 4- bzw. 3-konjugierte Zahl.

Wir wissen, daß zwei Integrale der Differentialgleichung (q), die oder deren Ableitungen eine Nullstelle gemeinsam haben, voneinander abhängig sind und folglich alle ihre Nullstellen sowie die ihrer Ableitungen übereinstimmen. Daraus folgt, daß der Begriff von konjugierten Zahlen eine Angelegenheit der Differentialgleichung (q) ist und nicht von der speziellen Wahl der zu seiner Definition verwendeten Integrale u, v abhängt.

2. Einteilung der Differentialgleichungen (q) in bezug auf konjugierte Zahlen. In bezug auf konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art $(\varkappa = 1, 2, 3, 4)$ zerfallen die Differentialgleichungen (q) in zwei Klassen, je nachdem, ob es im Intervall j konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art gibt oder nicht.

Beispielsweise gibt es für die Differentialgleichung (q) mit dem Träger $q = -1$ in dem (offenen) Intervall j von der Länge $|j|$ im Falle $0 < |j| \leqq \frac{\pi}{2}$ überhaupt keine konjugierten Zahlen, im Falle $\frac{\pi}{2} < |j| \leqq \pi$ konjugierte Zahlen nur von der 3. und 4. Art, während für $\pi < |j|$ konjugierte Zahlen aller Arten existieren.

Differentialgleichungen (q), für die $\varkappa$-konjugierte Zahlen existieren, wollen wir *Differentialgleichungen mit konjugierten Zahlen (Punkten) $\varkappa$-ter Art* oder *Differen-*

tialgleichungen mit $\varkappa$-konjugierten Zahlen (*Punkten*) nennen. Diesen Sachverhalt drücken wir auch so aus, daß die Differentialgleichung (q) konjugierte Zahlen (Punkte) von der $\varkappa$-ten Art oder $\varkappa$-konjugierte Zahlen (Punkte) zulasse bzw. besitze.

Differentialgleichungen (q), für die keine $\varkappa$-konjugierten Zahlen existieren, nennen wir *Differentialgleichungen ohne konjugierte Zahlen* (*Punkte*) *$\varkappa$-ter Art* oder *Differentialgleichungen ohne $\varkappa$-konjugierte Zahlen* (*Punkte*). In diesem Fall sagen wir auch, daß die Differentialgleichung (q) keine konjugierten Zahlen (Punkte) $\varkappa$-ter Art oder keine $\varkappa$-konjugierten Zahlen (Punkte) zulasse bzw. besitze.

3. Eigenschaften der Differentialgleichungen (q) mit $\varkappa$-konjugierten Zahlen. In dieser und in Nr. 4–9 werden wir uns mit Differentialgleichungen ($q_\varkappa$) mit konjugierten Zahlen $\varkappa$-ter Art ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) befassen. In den Fällen $\varkappa = 2, 3, 4$ wollen wir zwecks Vereinfachung unserer Betrachtungen $q_\varkappa(t) < 0$ für $t \in j$ voraussetzen. Diese Voraussetzung erlaubt insbesondere, die Ordnungssätze (§ 2, Nr. 3) im Intervall j anzuwenden.

Es sei ($q_\varkappa$) eine Differentialgleichung mit konjugierten Zahlen $\varkappa$-ter Art.

Zunächst gelten folgende Sätze:

Zu jeder Zahl $x_1 \in j$, die linksseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art zuläßt, gibt es kleinere Zahlen, zu denen ebenfalls linksseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art existieren. Alle im Intervall j liegenden größeren Zahlen als x_1 lassen linksseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art zu.

Zu jeder Zahl $x_1 \in j$, die rechtsseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art zuläßt, gibt es größere Zahlen, zu denen ebenfalls rechtsseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art existieren. Alle im Intervall j liegenden kleineren Zahlen als x_1 lassen rechtsseitig konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art zu.

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis etwa des ersten Satzes beschränken.

Es sei t_1 die erste mit x_1 linksseitig $\varkappa$-konjugierte Zahl. Wir wählen eine beliebige Zahl $t_2 < t_1$, $t_2 \in j$. Nach den Ordnungssätzen gibt es eine mit t_2 rechtsseitig $\varkappa'$-konjugierte Zahl x_2, wobei $\varkappa' = \varkappa$ oder $= \varkappa \pm 1$ ist, die kleiner als x_1 ist: $x_2 < x_1$. Diese Zahl x_2 läßt dann die linksseitig $\varkappa$-konjugierte Zahl t_2 zu. Der zweite Teil unseres Satzes folgt unmittelbar aus den Ordnungssätzen.

4. Grundzahlen. Wir bezeichnen mit $R_\varkappa$ ($S_\varkappa$) die Menge der im Intervall j liegenden Zahlen, die linksseitig (rechtsseitig) konjugierte Zahlen $\varkappa$-ter Art zulassen. Da nach unserer Voraussetzung $\varkappa$-konjugierte Zahlen existieren, sind in den Fällen $\varkappa = 1, 2$ die beiden Mengen $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ nicht leer, während in den Fällen $\varkappa = 3, 4$ wenigstens eine von ihnen diese Eigenschaft besitzt.

Es sei $R_\varkappa \neq \emptyset$ ($S_\varkappa \neq \emptyset$). Ist die Menge $R_\varkappa$ ($S_\varkappa$) von unten (von oben) beschränkt, so besitzt sie eine untere (obere) Grenze $r_\varkappa$ ($s_\varkappa$), die im Intervall j enthalten ist, d. h. $a < r_\varkappa$ ($s_\varkappa < b$), oder mit seinem Endpunkt a (b) zusammenfällt: $a = r_\varkappa$ ($s_\varkappa = b$). Ist die Menge $R_\varkappa$ ($S_\varkappa$) von unten (von oben) unbeschränkt, was offenbar nur im Fall $a = -\infty$ ($b = \infty$) möglich ist, so definieren wir die Zahl $r_\varkappa$ ($s_\varkappa$) so: $r_\varkappa = a = -\infty$ ($s_\varkappa = b = \infty$).

Die Zahl $r_\varkappa$ ($s_\varkappa$) nennen wir die *linksseitige* (*rechtsseitige*) *Grundzahl $\varkappa$-ter Art* oder die *linksseitige* (*rechtsseitige*) *$\varkappa$-Grundzahl* der Differentialgleichung ($q_\varkappa$). Im Fall $a < r_\varkappa$ ($s_\varkappa < b$) nennen wir sie *eigentlich*, im Fall $a = r_\varkappa$ ($s_\varkappa = b$) *uneigentlich*.

Aus den Sätzen in Nr. 3 schließen wir:

Ist die linksseitige (rechtsseitige) $\varkappa$-Grundzahl $r_\varkappa$ ($s_\varkappa$) der Differentialgleichung ($q_\varkappa$) eigentlich, so stellt sie die größte (kleinste) von den im Intervall j liegenden Zahlen, zu denen es keine linksseitig (rechtsseitig) $\varkappa$-konjugierten Zahlen gibt, dar.

In diesem Fall zerfällt das Intervall j in zwei Teilintervalle $(a, r_\varkappa]$, $(r_\varkappa, b)$ $\big((a, s_\varkappa), [s_\varkappa, b)\big)$, von denen das erste (zweite) aus Zahlen besteht, die keine linksseitig (rechtsseitig) $\varkappa$-konjugierten Zahlen zulassen, während es zu jeder Zahl des zweiten (ersten) solche Zahlen gibt.

5. Grundintegrale und Grundfolgen. Es sei $\lambda = 1, 2$. Wir betrachten eine Differentialgleichung (q_λ), deren linksseitige (rechtsseitige) λ-Grundzahl r_λ (s_λ) eigentlich ist: $a < r_\lambda$ ($s_\lambda < b$).

Es sei u_λ (v_λ) ein Integral von (q_λ), welches oder dessen Ableitung an der Stelle r_λ (s_λ) verschwindet, je nachdem, ob $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist: $u_1(r_1) = 0$, $u_2'(r_2) = 0$ $\big(v_1(s_1) = 0$, $v_2'(s_2) = 0\big)$. Ein solches Integral u_λ (v_λ) nennen wir *linksseitiges* (*rechtsseitiges*) *Grundintegral λ-ter Art* oder *linksseitiges* (*rechtsseitiges*) *λ-Grundintegral* von (q_λ).

Offenbar ist jedes vom Integral u_λ (v_λ) abhängige Integral von (q_λ) ebenfalls ein linksseitiges (rechtsseitiges) λ-Grundintegral von (q_λ).

Es sei $\nu = 1, 2, \ldots$.

Im Fall $\lambda = 1$ sei $r_{1,\nu}$ ($s_{1,\nu}$) die ν-te rechts (links) von r_1 (s_1) liegende Nullstelle des Grundintegrals u_1 (v_1) und ferner, wenn im Intervall j stets $q_1(t) < 0$ ist, $r_{4,\nu}$ ($s_{4,\nu}$) die ν-te rechts (links) von r_4 (s_4) liegende Nullstelle der Ableitung u_1' von u_1 (der Ableitung v_1' von v_1), sofern diese Nullstelle existiert. Die Grundzahl r_4 (s_4) existiert (Nr. 7). Wir setzen $r_{1,0} = r_1$, $r_{4,0} = r_4$ ($s_{1,0} = s_1$, $s_{4,0} = s_4$).

Im Fall $\lambda = 2$ sei $r_{2,\nu}$ ($s_{2,\nu}$) die ν-te rechts (links) von r_2 (s_2) liegende Nullstelle der Ableitung u_2' von u_2 (der Ableitung v_2' von v_2) und $r_{3,\nu}$ ($s_{3,\nu}$) die ν-te rechts (links) von r_3 (s_3) liegende Nullstelle des Grundintegrals u_2 (v_2), sofern diese Nullstelle existiert. Die Grundzahl r_3 (s_3) existiert (Nr. 7). Wir setzen $r_{2,0} = r_2$, $r_{3,0} = r_3$ ($s_{2,0} = s_2$, $s_{3,0} = s_3$).

Die endliche oder unendliche Zahlenfolge im Intervall j,

$$r_{\varkappa,0} < r_{\varkappa,1} < r_{\varkappa,2} < \cdots \quad (s_{\varkappa,0} > s_{\varkappa,1} > s_{\varkappa,2} > \cdots),$$

heißt die *linksseitige* (*rechtsseitige*) *Grundfolge $\varkappa$-ter Art* oder die *linksseitige* (*rechtsseitige*) *$\varkappa$-Grundfolge* der betreffenden Differentialgleichung; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. Bezeichnung: $R_\varkappa$ ($S_\varkappa$).

Offenbar ist der Begriff von Grundfolgen eine Angelegenheit der betreffenden Differentialgleichung und hängt nicht etwa von der speziellen Wahl der zu seiner Definition verwendeten Grundintegrale ab.

Die in den Grundfolgen $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ enthaltenen und im Intervall j liegenden Zahlen heißen *ausgezeichnete Zahlen $\varkappa$-ter Art* der betreffenden Differentialgleichung.

Je zwei voneinander und eventuell von r_3 bzw. s_3 verschiedene Glieder jeder der Grundfolgen R_1, R_3; S_1, S_3 sind miteinander 1-konjugiert; je zwei voneinander und eventuell von r_4 bzw. s_4 verschiedene Glieder jeder der Grundfolgen R_2, R_4; S_2, S_4 sind miteinander 2-konjugiert.

Das Teilintervall von j,

$$i_{\varkappa,\nu} = (r_{\varkappa,\nu-1}, b) \quad \big(j_{\varkappa,\nu} = (a, s_{\varkappa,\nu-1})\big)$$
$$(\varkappa = 1, 2, 3, 4; \qquad \nu = 1, 2, \ldots),$$

besteht genau aus denjenigen Zahlen $t \in j$, welche die ν-te linksseitig (rechtsseitig) $\varkappa$-konjugierte Zahl zulassen.

6. Wir knüpfen an die obigen Betrachtungen an.

Es sei (q_λ) eine Differentialgleichung, bei der die beiden Grundzahlen r_λ und s_λ eigentlich sind ($\lambda = 1, 2$). Dann ist die Differentialgleichung (q_λ) von endlichem Typus (m) (natürlich mit $m \geqq 2$). In der Tat, sind die Grundzahlen r_λ, s_λ eigentlich, so hat das linksseitige (rechtsseitige) λ-Grundintegral u_λ (v_λ) links (rechts) von r_λ (s_λ) keine oder höchstens eine Nullstelle, je nachdem, ob $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist.

Im allgemeinen sind die Grundzahlen r_λ, s_λ nicht miteinander λ-konjugiert. In diesem Fall heißt die Differentialgleichung (q_λ) *allgemein* oder *nichtspeziell von der Art* λ, kürzer: λ-*allgemein* oder λ-*nichtspeziell*. Bei einer λ-allgemeinen Differentialgleichung (q_λ) sind die zwei λ-Grundintegrale u_λ und v_λ voneinander unabhängig, und die beiden $\varkappa$-Grundfolgen $\mathsf{R}_\varkappa$, $\mathsf{S}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3, 4$, haben keine im Intervall j liegenden Glieder gemeinsam.

Wenn die Grundzahlen r_λ, s_λ miteinander λ-konjugiert sind, so heißt die Differentialgleichung (q_λ) *speziell von der Art* λ, kürzer: λ-*speziell*. Bei einer λ-speziellen Differentialgleichung (q_λ) sind die zwei λ-Grundintegrale u_λ und v_λ voneinander abhängig, und die beiden Grundfolgen R_λ, S_λ fallen in eine einzige, die sogenannte *Grundfolge von der Art* λ, kürzer: die λ-*Grundfolge* der Differentialgleichung (q_λ) zusammen.

7. Beziehungen zwischen konjugierten Zahlen verschiedener Arten. Wir wollen nun Beziehungen zwischen konjugierten Zahlen verschiedener Arten bei ein und derselben Differentialgleichung (q) betrachten.

Wir nehmen $q(t) < 0$ für $t \in j$ an und legen den Symbolen $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ die in Nr. 4 beschriebene Bedeutung zu; $\varkappa = 1, 2, 3, 4$.

Ist $t \in R_1$ $(t \in S_1)$, so besitzt jedes in t verschwindende Integral u von (q) eine erste links (rechts) von t gelegene Nullstelle x, und zwischen t, x gibt es genau eine Nullstelle x' von u'. Die Zahl x' ist offenbar linksseitig (rechtsseitig) 3-konjugiert mit t, und t ist rechtsseitig (linksseitig) 4-konjugiert mit x'. Es gilt also

$$R_1 \subset R_3, \quad S_1 \subset S_3$$

und ferner: Aus $R_1 \neq \emptyset$ oder $S_1 \neq \emptyset$ folgt $R_\varkappa \neq \emptyset$, $S_\varkappa \neq \emptyset$ für $\varkappa = 1, 3, 4$.

Ähnlich erhalten wir

$$R_2 \subset R_4, \quad S_2 \subset S_4$$

und ferner: Aus $R_2 \neq \emptyset$ oder $S_2 \neq \emptyset$ folgt $R_\varkappa \neq \emptyset$, $S_\varkappa \neq \emptyset$ für $\varkappa = 2, 3, 4$.

Besitzt also die Differentialgleichung (q) konjugierte Zahlen von der 1. bzw. 2. Art, so existieren alle Grundzahlen $r_\varkappa$, $s_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 3, 4$ bzw. $\varkappa = 2, 3, 4$.

Wir nehmen nun an, die Differentialgleichung (q) besitze konjugierte Zahlen von allen vier Arten.

Zunächst ergeben die obigen Beziehungen zwischen den Mengen $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ die folgenden Beziehungen zwischen den Grundzahlen:

$$r_3 \leqq r_1, \quad r_4 \leqq r_2; \quad s_1 \leqq s_3, \quad s_2 \leqq s_4. \tag{1}$$

Man sieht: Ist r_1 bzw. r_2 (s_1 bzw. s_2) uneigentlich, so ist auch r_3 bzw. r_4 (s_3 bzw. s_4) uneigentlich.

Ferner gilt der folgende

Satz. *Ist eine der beiden Grundzahlen r_λ (s_λ), $\lambda = 1, 2$, uneigentlich, so sind die linksseitigen (rechtsseitigen) Grundzahlen aller vier Arten uneigentlich. In diesem Fall stellt das linke (rechte) Ende a (b) des Intervalls j einen Häufungspunkt von Nullstellen der einzelnen Integrale von* (q) *dar.*

Ist eine der beiden Grundzahlen r_λ (s_λ), $\lambda = 1, 2$, eigentlich, so gilt dies auch von der anderen. In diesem Fall ist das linke (rechte) Ende a (b) von j kein Häufungspunkt von Nullstellen der einzelnen Integrale von (q).

Beweis. a) Es sei z. B. r_1 (s_1) uneigentlich. Wir betrachten ein Integral u von (q). Ist a (b) kein Häufungspunkt von Nullstellen der einzelnen Integrale von (q), so besitzt u eine kleinste (größte) Nullstelle $x \in j$. Dann gibt es zu keinem Wert $t \in (a, x)$ ($t \in (x, b)$) eine linksseitig (rechtsseitig) 1-konjugierte Zahl. Wir haben also im Widerspruch zu unserer Annahme $a < x \leqq r_1$ ($s_1 \geqq x > b$). Wir sehen: In jeder Umgebung rechts (links) von a (b) liegen unendlich viele Nullstellen von u und folglich (§ 2, Nr. 1) auch von u'. Daraus ergibt sich $r_2 = a$ ($s_2 = b$).

b) Der erste Teil der zweiten Aussage folgt aus a). Ferner sieht man: Ist a (b) ein Häufungspunkt von Nullstellen der einzelnen Integrale von (q), so gibt es in jeder Umgebung rechts (links) von a (b) Werte, die linksseitig (rechtsseitig) konjugierte Zahlen von der Art λ zulassen; daraus folgt $r_\lambda = a$ ($s_\lambda = b$); $\lambda = 1, 2$.

8. Wir wollen nun eine Differentialgleichung (q) mit eigentlichen λ-Grundzahlen r_λ (s_λ), $\lambda = 1, 2$, betrachten. Insbesondere hat also jedes Integral von (q) wenigstens eine Nullstelle. Wir erinnern an die Voraussetzung $q(t) < 0$ für $t \in j$.

Es sei u_λ (v_λ) ein linksseitiges (rechtsseitiges) λ-Grundintegral von (q).

Wir zeigen:

1. *Ist die Grundzahl r_4 (s_4) eigentlich, also $a < r_4$ ($s_4 < b$), so hat die Ableitung u_1' (v_1') von u_1 (v_1) links von r_1 (rechts von s_1) genau eine Nullstelle, und diese letztere ist r_4 (s_4).*

Ist die Grundzahl r_4 (s_4) uneigentlich, also $a = r_4$ ($s_4 = b$), so hat die Ableitung u_1' (v_1') von u_1 (v_1) links von r_1 (rechts von s_1) keine Nullstelle. In diesem Fall ist $r_3 = r_1$ ($s_3 = s_1$), und die erste rechts von r_1 (links von s_1) liegende Nullstelle von u_1' (v_1') ist die Grundzahl r_2 (s_2). Es ist also $r_1 < r_2$ ($s_1 > s_2$), und die beiden Grundintegrale u_1, u_2 (v_1, v_2) sind voneinander abhängig.

2. *Ist die Grundzahl r_3 (s_3) eigentlich, also $a < r_3$ ($s_3 < b$), so hat das Grundintegral u_2 (v_2) links von r_2 (rechts von s_2) genau eine Nullstelle, und diese letztere ist r_3 (s_3).*

Ist die Grundzahl r_3 (s_3) uneigentlich, also $a = r_3$ ($s_3 = b$), so hat das Grundintegral u_2 (v_2) links von r_2 (rechts von s_2) keine Nullstelle. In diesem Fall ist $r_4 = r_2$ ($s_4 = s_2$), und die erste rechts von r_2 (links von s_2) liegende Nullstelle von u_2 (v_2) ist *die Grundzahl r_1 (s_1). Es ist also $r_2 < r_1$ ($s_2 > s_1$), und die beiden Grundintegrale u_1, u_2 (v_1, v_2) sind voneinander abhängig.*

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis z. B. der ersten Aussage beschränken.

a) Es sei die Grundzahl r_4 (s_4) eigentlich.

Man betrachte eine Zahl $t_1 \in (a, r_4)$ $\big(t_1 \in (s_4, b)\big)$ und ein Integral u von (q), dessen Ableitung in t_1 verschwindet: $u'(t_1) = 0$. Wegen $t_1 < r_4$ ($t_1 > s_4$) hat das Integral u links (rechts) von t_1 keine Nullstellen. Es hat also Nullstellen rechts (links) von t_1. Wir betrachten die kleinste (größte) von ihnen, x_1. Es ist $x_1 \leqq r_1$ ($x_1 \geqq s_1$), weil es sonst eine mit x_1 linksseitig (rechtsseitig) 1-konjugierte Zahl und folglich eine links (rechts) von t_1 liegende Nullstelle von u geben würde. Ist $x_1 = r_1$ ($x_1 = s_1$), so sind die beiden Integrale u, u_1 (u, v_1) voneinander abhängig, und folglich haben ihre Ableitungen u', u_1' (u', v_1') dieselben Nullstellen. In diesem Fall hat also u_1' (v_1') links von r_1 (rechts von s_1) wenigstens die Nullstelle t_1. Ist $x_1 < r_1$ ($x_1 > s_1$), so haben wir die folgende Situation: $t_1 < x_1$, $u'(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, x_1)$; $r_1 > x_1$, $u_1(r_1) = 0$ $\big(x_1 < t_1$, $u(x_1) = u'(t_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ für $t \in (x_1, t_1)$; $s_1 < x_1$, $v_1(s_1) = 0\big)$. Daraus schließen wir nach dem 3. (4.) Ordnungssatz: Die Funktion u_1' (v_1') hat links von r_1 (rechts von s_1) eine Nullstelle.

Die Funktion u_1' (v_1') hat links von r_1 (rechts von s_1) höchstens eine Nullstelle. In der Tat, verschwindet sie links von r_1 (rechts von s_1) mehr als einmal, so liegt links von r_1 (rechts von s_1) wenigstens eine Nullstelle von u_1 (v_1), was jedoch dem Begriff von u_1 (v_1) widerspricht.

Wir sehen: Die Funktion u_1' (v_1') hat links von r_1 (rechts von s_1) genau eine Nullstelle, t_2.

Wir betrachten eine Zahl $t \in (a, r_1)$ $\big(t \in (s_1, b)\big)$ und ein Integral u (v) von (q), dessen Ableitung u' in t verschwindet: $u'(t) = 0$. Ähnlich wie oben findet man unter Anwendung des 3. (4.) Ordnungssatzes: Ist $t > t_2$ ($t < t_2$), so hat das Integral u eine Nullstelle links (rechts) von t, ist aber $t < t_2$ ($t > t_2$), so hat das Integral u keine Nullstelle links (rechts) von t. Daraus folgt $t_2 = r_4$ ($t_2 = s_4$).

b) Es sei die Grundzahl r_4 (s_4) uneigentlich.

In diesem Fall hat jedes Integral der Differentialgleichung (q) links (rechts) von einer Nullstelle seiner Ableitung wenigstens eine Nullstelle. Hat also die Ableitung u_1' (v_1') des Grundintegrals u_1 (v_1) eine Nullstelle links von r_1 (rechts von s_1), so hat auch u_1 (v_1) eine solche Nullstelle. Das Grundintegral u_1 (v_1) hat aber links von r_1 (rechts von s_1) keine Nullstelle. Man sieht: Die Ableitung u_1' (v_1') von u_1 (v_1) hat links von r_1 (rechts von s_1) keine Nullstelle.

Wir übernehmen die obige Bedeutung der Symbole $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$).

Es sei $t \in R_3$ ($t \in S_3$). Man betrachte ein in t verschwindendes Integral u von (q): $u(t) = 0$. Die Ableitung u' von u hat eine links (rechts) von t liegende Nullstelle x. Wegen $a = r_4$ ($s_4 = b$) haben wir $x \in R_4$ ($x \in S_4$). Das Integral u hat also eine links (rechts) von x liegende Nullstelle t_1, und diese ist offenbar linksseitig (rechtsseitig) 1-konjugiert mit t. Daraus folgt $R_3 \subset R_1$ ($S_3 \subset S_1$) und ferner $r_3 \geqq r_1$ ($s_3 \leqq s_1$). Dies ergibt zusammen mit (1) $r_3 = r_1$ ($s_3 = s_1$).

Es sei x die erste rechts (links) von r_1 (s_1) liegende Nullstelle der Ableitung u_1' (v_1') von u_1 (v_1). Wir betrachten eine Zahl $t \in j$ und ein Integral u von (q), dessen Ableitung in t verschwindet: $u'(t) = 0$. Da $t \in R_4$ ($t \in S_4$) ist, besitzt u eine größte (kleinste) links (rechts) von t liegende Nullstelle t_1. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob $t > x$ ($t < x$) oder $t < x$ ($t > x$) ist.

Im ersten Fall haben wir nach dem 4. (3.) Ordnungssatz $t_1 > r_1$ $(t_1 < s_1)$, woraus wegen $r_3 = r_1$ $(s_3 = s_1)$ folgt: $t_1 \in R_3$ $(t_1 \in S_3)$. Die Funktion u' hat also links (rechts) von t_1 wenigstens eine Nullstelle, die offenbar mit t linksseitig (rechtsseitig) 2-konjugiert ist. Also ist $t \in R_2$ $(t \in S_2)$.

Im zweiten Fall haben wir nach dem 4. (3.) Ordnungssatz: $t_1 < r_1$ $(t_1 > s_1)$, woraus wegen $r_3 = r_1$ $(s_3 = s_1)$ folgt: $t_1 \notin R_3$ $(t_1 \notin S_3)$. Die Funktion u' hat also links (rechts) von t_1 keine Nullstelle. Also ist $t \notin R_2$ $(t \notin S_2)$.

Wir fassen zusammen: Die Menge R_2 (S_2) fällt mit dem Intervall (x, b) $\big((a, x)\big)$ zusammen. Daraus folgt $x = r_2$ $(x = s_2)$.

Damit ist der Beweis beendet.

9. Ausgezeichnete Basen. Mit dem Begriff von Grundintegralen hängt derjenige von ausgezeichneten Basen einer Differentialgleichung (q) zusammen.

Es sei (q_λ) eine Differentialgleichung mit λ-konjugierten Zahlen, $\lambda = 1, 2$, und (u, v) eine Basis von (q_λ).

Wir nennen die Basis (u, v) *linksseitige* (*rechtsseitige*) *Hauptbasis* λ*-ter Art*, kürzer: *linksseitige* (*rechtsseitige*) λ*-Hauptbasis*, wenn das erste Glied u ein linksseitiges (rechtsseitiges) λ-Grundintegral von (q_λ) ist.

Wir nennen die Basis (u, v) *Hauptbasis* λ*-ter Art*, kürzer: λ*-Hauptbasis*, wenn das erste Glied u ein links- oder rechtsseitiges und zugleich v ein rechts- bzw. linksseitiges λ-Grundintegral von (q_λ) ist.

Bei Betrachtung von Hauptbasen ist also darauf zu achten, ob u ein links- und v ein rechtsseitiges λ-Grundintegral ist oder umgekehrt.

Die linksseitigen, rechtsseitigen Hauptbasen sowie die Hauptbasen werden als *ausgezeichnete Basen* der Differentialgleichung (q_λ) bezeichnet.

Bei λ-allgemeinen Differentialgleichungen (q_λ) von endlichen Typen mit λ-konjugierten Zahlen kommen sowohl links- und rechtsseitige Hauptbasen als auch Hauptbasen λ-ter Art vor. Bei λ-speziellen Differentialgleichungen (q_λ) kommen links- und rechtsseitige Hauptbasen λ-ter Art vor, und zwar ist jede links- bzw. rechtsseitige Hauptbasis λ-ter Art zugleich eine rechts- bzw. linksseitige Hauptbasis λ-ter Art. Bei linksseitig (rechtsseitig) oszillatorischen Differentialgleichungen (q_λ) kommen nur rechtsseitige (linksseitige) Hauptbasen λ-ter Art vor. Bei oszillatorischen Differentialgleichungen (q_λ) gibt es keine ausgezeichneten Basen.

Man kann ohne Schwierigkeiten das aus allen linksseitigen (rechtsseitigen) λ-Hauptbasen bzw. aus allen λ-Hauptbasen der Differentialgleichung (q_λ) bestehende System überblicken.

Es sei u ein linksseitiges (rechtsseitiges) λ-Grundintegral der Differentialgleichung (q_λ). Dann sind die mit beliebigen Konstanten ϱ $(\neq 0)$ gebildeten Funktionen ϱu genau alle linksseitigen (rechtsseitigen) λ-Grundintegrale der Differentialgleichung (q_λ). Alle linksseitigen (rechtsseitigen) λ-Hauptbasen sind also genau die folgenden: $(\varrho u, \bar{v})$, wobei $\bar{v}$ ein von u unabhängiges Integral von (q_λ) bedeutet. Wählt man ein von u unabhängiges Integral v von (q_λ), so kann $\bar{v}$ vermöge geeigneter Konstanten σ $(\neq 0)$, $\bar{\sigma}$ ausgedrückt werden: $\bar{v} = \sigma v + \bar{\sigma} u$. Man sieht: Die linksseitigen (rechtsseitigen) λ-Hauptbasen der Differentialgleichung (q_λ) bilden das dreiparametrige System: $(\varrho u, \sigma v + \bar{\sigma} u)$; $\varrho\sigma \neq 0$. Ist die Differentialgleichung (q_λ) von endlichem Typus und λ-allgemein, so kann für v ein rechtsseitiges (linksseitiges) λ-Grundintegral von (q_λ) gewählt werden. Dann sind die mit beliebigen Konstanten σ $(\neq 0)$ gebildeten Funktionen σv genau alle rechtsseitigen (linksseitigen) λ-Grundintegrale von (q_λ), und man sieht: Alle λ-Hauptbasen der Differentialgleichung (q_λ) bilden zwei zweiparametrige Systeme: $(\varrho u, \sigma v)$; $\varrho\sigma \neq 0$, je nachdem, ob u ein links- und v ein rechtsseitiges λ-Grundintegral von (q_λ) ist oder umgekehrt.

10. Differentialgleichungen (q) mit 1-konjugierten Zahlen. In diesem Abschnitt wollen wir auf Grund der obigen Erkenntnisse einen Überblick über die Differentialgleichungen (q) mit 1-konjugierten Zahlen geben. Zwecks Vereinfachung unserer Ausdrucksweise werden wir hier das Attribut 1- überall fortlassen; wir werden also schlechtweg z. B. von konjugierten Zahlen, Grundfolgen, Hauptbasen usw. statt von 1-konjugierten Zahlen, 1-Grundfolgen, 1-Hauptbasen usw. sprechen.

Die Differentialgleichungen (q) mit konjugierten Zahlen sind entweder von einem endlichen Typus (m) mit $m \geqq 2$ oder von unendlichem Typus.

I. Es sei (q) eine Differentialgleichung von einem endlichen Typus (m), $m \geqq 2$.

Die Differentialgleichung (q) läßt also Integrale mit m, nicht aber solche mit $m + 1$ Nullstellen im Intervall j zu. In diesem Fall sind offenbar die Enden a, b von j keine Häufungspunkte von Nullstellen der einzelnen Integrale von (q); daraus folgt, daß die beiden Grundzahlen r_1 und s_1 eigentlich sind. Die Differentialgleichung (q) besitzt also links- und rechtsseitige Grundintegrale und ferner die links- und rechtsseitige Grundfolge, von denen jede, wie leicht einzusehen ist, aus $m - 1$ Gliedern besteht. Wegen Vereinfachung unserer Bezeichnung wollen wir hier diese Grundfolgen mit

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1}; \quad b_{-1} > b_{-2} > \cdots > b_{-m+1}$$

bezeichnen ($a_1 = r_1$; $b_{-1} = s_1$). $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$; $b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-m+1}$ sind die ausgezeichneten Zahlen von (q).

Zwischen den Zahlen a_μ, $b_{-\mu}$ ($\mu = 0, 1, \ldots, m-1$; $a_0 = a$, $b_0 = b$) bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} a < b_{-m+1} \leqq a_1 < b_{-m+2} \leqq \cdots \leqq a_r < b_{-m+r+1} \\ \leqq a_{r+1} < \cdots \leqq a_{m-2} < b_{-1} \leqq a_{m-1} < b. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei gelten entweder stets die Ungleichheitszeichen oder stets die Gleichheitszeichen. Im ersten Fall ist die Differentialgleichung (q) allgemein, im zweiten speziell.

a) Die Differentialgleichung (q) sei allgemein.

Die Differentialgleichung (q) besitzt links- und rechtsseitige Grundintegrale. Ein links- und ein rechtsseitiges Grundintegral sind stets voneinander unabhängig. Die Differentialgleichung (q) läßt Hauptbasen zu.

Jedes Integral von (q), welches in einem der Intervalle $(a_\mu, b_{-m+\mu+1})$ verschwindet, hat in allen diesen Intervallen stets genau eine Nullstelle; folglich hat ein solches Integral im Intervall j genau m Nullstellen. Alle anderen Integrale von (q) haben im Intervall j stets genau $m - 1$ Nullstellen.

b) Die Differentialgleichung (q) sei speziell.

Die Differentialgleichung (q) besitzt links- und rechtsseitige Grundintegrale, und zwar fallen die links- mit den rechtsseitigen Grundintegralen zusammen. Die

Differentialgleichung (q) läßt links- und rechtsseitige Hauptbasen zu; jede links- bzw. rechtsseitige Hauptbasis ist zugleich eine rechts- bzw. linksseitige Hauptbasis von (q).

Jedes von einem Grundintegral unabhängige Integral von (q) hat genau m und jedes Grundintegral genau $m - 1$ Nullstellen im Intervall j.

II. Es sei nun (q) eine Differentialgleichung von unendlichem Typus.

In diesem Fall ist die Differentialgleichung (q) links- oder rechtsseitig oszillatorisch oder oszillatorisch.

Ist die Differentialgleichung (q) linksseitig (rechtsseitig) oszillatorisch, so ist ihre linksseitige (rechtsseitige) Grundzahl r_1 (s_1) uneigentlich, während die rechtsseitige (linksseitige) eigentlich ist. In dieser Situation besitzt also die Differentialgleichung (q) rechtsseitige (linksseitige) Grundintegrale und die rechtsseitige (linksseitige) Grundfolge

$$b_{-1} > b_{-2} > \cdots \quad (a_1 < a_2 < \cdots), \tag{3}$$

die jetzt allerdings unendlich ist; $b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ ($a_1, a_2, \ldots$) sind die ausgezeichneten Zahlen der Differentialgleichung (q).

Die Differentialgleichung (q) läßt rechtsseitige (linksseitige) Hauptbasen zu.

Jedes von einem rechtsseitigen (linksseitigen) Grundintegral unabhängige Integral von (q) hat in jedem Intervall $(b_{-\mu}, b_{-\mu-1})$ $\big((a_\mu, a_{\mu+1})\big)$ genau eine Nullstelle; $\mu = 0, 1, \ldots$; $b_0 = b$ ($a_0 = a$).

Ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so sind beide Grundzahlen r_1, s_1 von (q) uneigentlich; folglich gibt es in diesem Fall keine Grundintegrale und natürlich auch keine Grundfolgen und ausgezeichnete Basen.

Zusammenfassend sehen wir, daß unter allen Typen die allgemeinen Differentialgleichungen (q) von endlichen Typen (m) mit $m \geqq 2$ die einzigen sind, bei denen voneinander unabhängige Grundintegrale (natürlich stets ein links- und rechtsseitiges) und folglich auch Hauptbasen existieren.

11. Differentialgleichungen (q) mit konjugierten Zahlen von allen vier Arten. In dieser Nr. wollen wir Eigenschaften von Differentialgleichungen (q) mit konjugierten Zahlen von allen vier Arten, die für unsere weiteren Betrachtungen von Wichtigkeit sind, zusammenfassen.

Es sei (q) eine Differentialgleichung mit konjugierten Zahlen von allen vier Arten. Wir setzen $q(t) < 0$ für $t \in j$ voraus.

Bei jeder Art $\varkappa$ ($= 1, 2, 3, 4$) bilden diejenigen Zahlen $t \in j$, zu denen die ν-te linksseitig bzw. rechtsseitig $\varkappa$-konjugierte Zahl existiert, ein offenes Intervall $i_{\varkappa,\nu}$ bzw. $j_{\varkappa,\nu}$; $\nu = 1, 2, \ldots$. Wenn sich die Nullstellen von Integralen der Differentialgleichung (q) gegen den linken (rechten) Endpunkt a (b) des Intervalls j häufen, also im Fall einer linksseitig (rechtsseitig) oszillatorischen oder oszillatorischen Differentialgleichung (q), so haben wir $i_{\varkappa,\nu} = j$ ($j_{\varkappa,\nu} = j$) für $\varkappa = 1, 2, 3, 4$ und alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Wenn sich die Nullstellen von Integralen der Differentialgleichung (q) gegen den linken (rechten) Endpunkt a (b) von j nicht häufen, wenn also die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus oder rechtsseitig (linksseitig) oszillatorisch ist, so haben wir bei jedem $\varkappa = 1, 2, 3, 4$

$$i_{\varkappa,\nu} = (r_{\varkappa,\nu-1}, b); \quad a \leqq r_{\varkappa,0} < r_{\varkappa,1} < \cdots < b$$

$$(j_{\varkappa,\nu} = (a, s_{\varkappa,\nu-1}); \quad a < \cdots < s_{\varkappa,1} < s_{\varkappa,0} \leqq b);$$

die Zahlenfolge $\{r_{\varkappa,\nu-1}\}$ ($\{s_{\varkappa,\nu-1}\}$), $\nu = 1, 2, \ldots$, ist endlich, wenn die Differentialgleichung (q) von endlichem Typus ist, während sie unendlich ist im Fall einer rechtsseitig (linksseitig) oszillatorischen Differentialgleichung (q). Ist die Differentialgleichung (q) oszillatorisch, so gibt es zu jeder Zahl $t \in j$ eine linksseitig und eine rechtsseitig $\varkappa$-konjugierte ν-te Zahl für alle $\varkappa = 1, 2, 3, 4$ und alle $\nu = 1, 2, \ldots$.

12. Bilineare Beziehungen zwischen Integralen einer Differentialgleichung (q). In der später zu behandelnden Transformationstheorie spielen gewisse bilineare Beziehungen zwischen Integralen einer Differentialgleichung (q) eine wichtige Rolle.

Wir betrachten eine Differentialgleichung (q).

Grundlegend ist der folgende

Satz. *Für eine beliebige Basis* (u, v) *der Differentialgleichung* (q) *gilt an je zwei voneinander verschiedenen Stellen* $t, x \in j$ *die Beziehung*

$$1.\quad u(t)\, v(x) - u(x)\, v(t) = 0,$$

$$2.\quad u'(t)\, v'(x) - u'(x)\, v'(t) = 0,$$

$$3.\quad u(t)\, v'(x) - u'(x)\, v(t) = 0$$

genau dann, wenn die Zahlen t, x *folgendermaßen zusammenhängen:*

1. t, x *sind miteinander* 1-*konjugiert*,
2. t, x *sind miteinander* 2-*konjugiert*,
3. x *ist* 3-*konjugiert mit* t, *und folglich ist* t 4-*konjugiert mit* x.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis etwa von 1.

a) Es bestehe für gewisse voneinander verschiedene Zahlen $t, x \in j$ die bilineare Beziehung 1. Dann sind die linearen Gleichungen

$$c_1 u(t) + c_2 v(t) = 0, \qquad c_1 u(x) + c_2 v(x) = 0$$

für passende Werte c_1, c_2 mit $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ erfüllt, und folglich stellen die Zahlen t, x Nullstellen des Integrals $y = c_1 u + c_2 v$ von (q) dar. Man sieht, daß die Zahlen t, x miteinander 1-konjugiert sind.

b) Es seien die Zahlen t, x miteinander 1-konjugiert. Dann ist $t \neq x$, und es gibt ein in t und x verschwindendes Integral $y = c_1 u + c_2 v$ von (q) mit $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Daraus folgt die Gültigkeit der bilinearen Beziehung 1.

Der in Frage stehende Satz kann offenbar kurz so formuliert werden: Konjugierte Zahlen der einzelnen Arten stellen Nullpunkte von Basenfunktionen der Differentialgleichung (q) dar.

Die aus den Integralen u, v und deren Ableitungen u', v' einer beliebigen Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) gebildeten Verhältnisse $u : v$ bzw. $u' : v'$ nehmen an zwei verschiedenen Stellen $t, x \in j$ denselben Wert genau dann an, also

$$\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

wenn die Zahlen t, x miteinander 1- bzw. 2-konjugiert sind. Ferner gilt

$$\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

genau dann, wenn x mit t 3-konjugiert und folglich t mit x 4-konjugiert ist.

§ 4. Zentroaffine Differentialgeometrie ebener Kurven

Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung stehen in engem Zusammenhang mit der zentroaffinen Differentialgeometrie der ebenen Kurven. Diese Geometrie ist die Theorie derjenigen Begriffe und Eigenschaften der ebenen Kurven, die gegenüber Transformationen des Kurvenparameters und denjenigen der ebenen linearen homogenen Gruppe invariant sind. Lineare homogene Transformationen bezeichnet man bekanntlich als zentroaffine Transformationen.

1. Darstellungen ebener Kurven. Eine ebene Kurve $\mathfrak{K}$ ist die Menge von Punkten, die durch die Werte einer vektoriellen Funktion $x(t) = [u(t), v(t)]$ mit zwei Komponenten $u(t)$, $v(t)$ gegeben sind. Wir nehmen an, daß die Funktion x, also ihre Komponenten u, v, in einem offenen Intervall j erklärt sind und der Klasse C_2 oder nötigenfalls einer höheren Klasse angehören. Die mit den Ableitungen $x^{(\mu)}$, $x^{(\nu)}$ gebildete Determinante $u^{(\mu)}v^{(\nu)} - u^{(\nu)}v^{(\mu)}$ wollen wir wie üblich mit $(x^{(\mu)}x^{(\nu)})$ bezeichnen.

Die Funktion $x(t)$ bezeichnen wir als eine *Darstellung* der Kurve $\mathfrak{K}$. Ihre Komponenten $u(t)$, $v(t)$ können als parametrische Koordinaten der Kurve $\mathfrak{K}$ in bezug auf ein von zwei Vektoren x_1, x_2 gebildetes Koordinatensystem mit einem Ursprung O gedeutet werden. Ist die Funktion x von der Klasse C_μ, so heißt die Kurve $\mathfrak{K}$ ebenfalls von der Klasse C_μ. Die unabhängige Veränderliche t heißt der Parameter von $\mathfrak{K}$ bei der Darstellung $x(t)$.

Wir betrachten eine ebene Kurve $\mathfrak{K}$ mit der Darstellung $x(t)$.

Die Kurve $\mathfrak{K}$ läßt unendlich viele Darstellungen zu. Wir wollen im weiteren nur solche Darstellungen betrachten, die aus einer Darstellung, z. B. $x(t)$, durch eine Parametertransformation $T = T(t)$ hervorgehen. Wir setzen voraus, daß die Funktion $T(t)$ im Intervall j definiert ist, der Klasse C_2 oder nötigenfalls einer höheren Klasse angehört und daß ihre Ableitung T' stets von Null verschieden ist. In diesm Fall stellt der Wertevorrat der Funktion $T(t)$ ein (offenes) Intervall J dar, und in diesem Intervall existiert die zu $T(t)$ inverse Funktion $t(T)$. Es gilt offenbar $J = T(j)$, $j = t(J)$. Wir nennen je zwei einander im Sinne der Formeln $T = T(t)$, $t = t(T)$ entsprechende Zahlen $t \in j$, $T \in J$ *homolog*. Nun wird die aus $x(t)$ durch die Parametertransformation $T = T(t)$ entstandene Darstellung $X(T) = [U(T), V(T)]$ der Kurve $\mathfrak{K}$ so definiert: Der Wert der Funktion X an jeder Stelle $T \in J$ ist demjenigen $x(t)$ der Funktion x an der homologen Stelle $t \in j$ gleich, also

$$X(T) = x(t) \tag{1}$$

für $T = T(t) \in J$, $t = t(T) \in j$. Man sieht, daß jede der beiden Darstellungen x, X der Kurve $\mathfrak{K}$ durch die andere eindeutig bestimmt ist. Offenbar geht jede Darstellung der Kurve $\mathfrak{K}$ aus jeder anderen durch eine Parametertransformation hervor. Wir betonen: Die Werte von zwei Darstellungen der Kurve $\mathfrak{K}$ an homologen Stellen ergeben denselben Kurvenpunkt.

Die Funktion $X(T)$ gehört offenbar der Klasse C_2 oder einer höheren Klasse an. Wir wollen Ableitungen nach T durch einen Punkt $\dot{}$ andeuten. Dann gilt an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $T \in J$

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}(T) &= x'(t)\,\dot{t}, & x'(t) &= \dot{X}(T)\,T', \\ \ddot{X}(T) &= x''(t)\,\dot{t}^2 + x'(t)\,\ddot{t}, & x''(t) &= \ddot{X}(T)\,T'^2 + \dot{X}(T)\,T'' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} (X\dot{X}) &= (xx')\,\dot{t}, & (xx') &= (X\dot{X})\,T', \\ (X\ddot{X}) &= (xx'')\,\dot{t}^2 + (xx')\,\ddot{t}, & (xx'') &= (X\ddot{X})\,T'^2 + (X\dot{X})\,T'', \\ (\dot{X}\ddot{X}) &= (x'x'')\,\dot{t}^3, & (x'x'') &= (\dot{X}\ddot{X})\,T'^3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus diesen Formeln sehen wir:

Gilt an einer Stelle $t \in j$ die Beziehung $(xx') \neq 0$ bzw. $(xx') = 0$, so gilt an der homologen Stelle $T \in J$ die analoge Beziehung: $(X\dot{X}) \neq 0$ bzw. $(X\dot{X}) = 0$. Im ersten Fall besteht außerdem die Formel

$$\operatorname{sgn} T' = \operatorname{sgn}(xx') \cdot \operatorname{sgn}(X\dot{X}) = \operatorname{sgn} \dot{t}.$$

Dasselbe gilt von den Funktionen $(x'x'')$, $(\dot{X}\ddot{X})$.

2. Zentroaffine Repräsentanten ebener Kurven und ihrer Darstellungen. Wir betrachten nun eine lineare und homogene, also zentroaffine Transformation der Ebene mit der Matrix $C = (c_{ik})$, $(|C| =)\ |c_{ik}| \neq 0$; $i, k = 1, 2$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \bar{x}_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Transformation läßt offenbar den Punkt (0, 0), das sogenannte *Zentrum* der zentroaffinen Ebene, invariant.

Durch die Transformation (4) wird die Funktion $x(t)$ in die Funktion $(Cx(t) =)$ $\bar{x}(t)$ mit den Komponenten $\bar{u}(t) = c_{11}u(t) + c_{12}v(t)$, $\bar{v}(t) = c_{21}u(t) + c_{22}v(t)$ übergeführt. Die durch die Funktion $\bar{x}(t)$ bestimmte Kurve $(C\mathfrak{K} =)\ \bar{\mathfrak{K}}$ bzw. die Darstellung $\bar{x}(t)$ dieser letzteren wollen wir als einen (zentroaffinen) *Repräsentanten*, genauer: den *C-Repräsentanten*, von $\mathfrak{K}$ bzw. $x(t)$ bezeichnen. Zwei Punkte $x(t) \in \mathfrak{K}$, $\bar{x}(t) \in \bar{\mathfrak{K}}$, die durch denselben Wert $t \in j$ des Parameters bestimmt sind, nennen wir (miteinander) *assoziiert*. Insbesondere ist die Kurve $\mathfrak{K}$ bzw. ihre Darstellung $x(t)$ ihr eigener Repräsentant ($c_{11} = c_{22} = 1$, $c_{12} = c_{21} = 0$). Ferner ist die Kurve $\mathfrak{K}$ bzw. ihre Darstellung $x(t)$ ein Repräsentant, genauer: der C^{-1}-Repräsentant, von $\bar{\mathfrak{K}}$ bzw. $\bar{x}(t)$.

Es sei $X(T)$ die aus $x(t)$ vermöge der Parametertransformation $T = T(t)$ entstandene Darstellung der Kurve $\mathfrak{K}$. Die C-Repräsentanten Cx, CX der Darstellungen x, X der Kurve $\mathfrak{K}$ nehmen offenbar an je zwei homologen Stellen t, T denselben Wert an. Folglich ist CX die aus Cx vermöge der Parametertransformation $T = T(t)$ entstandene Darstellung der Kurve $C\mathfrak{K}$. Wir sehen: Die Werte von zwei Darstellungen x, X der Kurve $\mathfrak{K}$ an je zwei homologen Stellen und diejenigen ihrer Repräsentanten Cx, CX an denselben Stellen ergeben assoziierte Punkte der Kurven $\mathfrak{K}$ und $C\mathfrak{K}$.

Die aus einem Repräsentanten $\bar{x}(t) = Cx(t)$ der Funktion $x(t)$ gebildeten Determinanten $(\bar{x}\bar{x}')$, $(\bar{x}'\bar{x}'')$ unterscheiden sich von den (xx'), $(\bar{x}', \bar{x}'')$ um denselben von Null verschiedenen konstanten Faktor, nämlich um die Determinante $|C|$. Daraus folgt:

Gilt an einer Stelle $t \in j$ die Beziehung $(xx') \neq 0$ bzw. $(xx') = 0$, so gilt für jeden Repräsentanten $\bar{x}$ von x an derselben Stelle t die analoge Beziehung $(\bar{x}\bar{x}') \neq 0$ bzw. $(\bar{x}\bar{x}') = 0$. Außerdem ist $\operatorname{sgn}(\bar{x}\bar{x}') = \operatorname{sgn}|C| \cdot \operatorname{sgn}(xx')$.

Dasselbe gilt von den Funktionen $(x'x'')$, $(\bar{x}'\bar{x}'')$.

3. Zentroaffine Invarianten ebener Kurven. Eine mit einer Darstellung $x(t)$ von $\mathfrak{K}$ und einigen ihrer Ableitungen, etwa $x'(t)$, $x''(t)$, gebildete skalare Funktion $f[x(t), x'(t), x''(t)]$ wird als eine (zentroaffine) *relative Invariante* der Kurve $\mathfrak{K}$ bezeichnet, wenn sie bei beliebiger Wahl von Repräsentanten $\bar{x}(t)$, $\bar{X}(T)$ zweier Darstellungen $x(t)$, $X(T)$ der Kurve $\mathfrak{K}$ an je zwei homologen Stellen t, T dieselben oder entgegengesetzte Werte annimmt:

$$f[\bar{x}(t), \bar{x}'(t), \bar{x}''(t)] = \pm f\big[\bar{X}(T), \dot{\bar{X}}(T), \ddot{\bar{X}}(T)\big].$$

Man nennt die Funktion f (zentroaffin) *absolut invariant*, wenn sie bei beliebiger Wahl von $\bar{x}(t)$, $\bar{X}(T)$ an je zwei homologen Stellen t, T dieselben Werte annimmt.

Offenbar stellt der absolute Betrag einer relativen Invariante stets eine absolute Invariante dar.

Zu den einfachsten relativen Invarianten der Kurve $\mathfrak{K}$ gehören die oben erwähnten Funktionen $\operatorname{sgn}(xx')$, $\operatorname{sgn}(x'x'')$. Wir wollen ihre geometrische Bedeutung angeben, ohne hier auf Einzelheiten einzugehen (siehe [80]).

Gilt an einer Stelle $t \in j$ die Beziehung $\operatorname{sgn}(xx') = \pm 1$ bzw. $= 0$, so liegt das Zentrum der zentroaffinen Ebene außerhalb bzw. auf der Tangente an die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte $x(t)$. Gilt $\operatorname{sgn}(x'x'') = \pm 1$ bzw. $= 0$, so liegt die Kurve $\mathfrak{K}$ in der Nachbarschaft des Punktes $x(t)$ auf derselben Seite ihrer Tangente im Punkte $x(t)$ bzw. der Punkt $x(t)$ ist ein Wendepunkt von $\mathfrak{K}$.

4. Reguläre Kurven. Wir nennen die Kurve $\mathfrak{K}$ *regulär*, wenn die beiden Beziehungen $\operatorname{sgn}(xx') = \pm 1$, $\operatorname{sgn}(x'x'') = \pm 1$ überall im Intervall j bestehen.

Ist also die Kurve $\mathfrak{K}$ regulär, so geht keine von ihren Tangenten durch das Zentrum der zentroaffinen Ebene, und die Kurve ist lokal konvex und wendepunktfrei.

Es sei nun $\mathfrak{K}$ eine reguläre Kurve mit der Darstellung $x(t)$, $t \in j$.

Wir ordnen dieser Darstellung die Funktionen

$$a(t) = \frac{(xx'')}{(xx')}, \qquad b(t) = -\frac{(x'x'')}{(xx')} \tag{5}$$

zu. Diese Funktionen sind also von der Klasse C_0 oder von einer höheren Klasse.

Man rechnet leicht nach, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der mit den Koeffizienten (5) gebildeten (vektoriellen) linearen Differentialgleichung 2. Ordnung,

$$x'' = a(t)\, x' + b(t)\, x, \tag{6}$$

darstellt. Das heißt, die Komponenten $u(t)$, $v(t)$ der Funktion $x(t)$ genügen der skalar aufgefaßten Differentialgleichung (6). Umgekehrt sind die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ durch die an die Funktion $x(t)$ gestellte Forderung, sie solle einer Differentialgleichung von der Form (6) genügen, eindeutig im Sinne der Formeln (5) bestimmt. Ferner sieht man, daß die einem Repräsentanten $\bar{x}(t)$ von $x(t)$ zugeordneten Funktionen $\bar{a}(t)$, $\bar{b}(t)$ mit den $a(t)$, $b(t)$ zusammenfallen: $\bar{a}(t) = a(t)$, $\bar{b}(t) = b(t)$; $t \in j$. Mit anderen Worten: Die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ bleiben bei jeder Wahl eines Repräsentanten von x unverändert. Folglich bildet jeder Repräsentant der Darstellung $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (6). Wir nennen die Funktion $a(t)$ bzw. $b(t)$ die *erste* bzw. *zweite zentroaffine Semiinvariante* der Darstellung $x(t)$.

Es seien nun $x(t)$, $t \in j$, und $X(T)$, $T \in J$, zwei Darstellungen der Kurve $\mathfrak{K}$ und $a(t)$, $A(T)$ bzw. $b(t)$, $B(T)$ ihre ersten bzw. zweiten zentroaffinen Semiinvarianten. Aus (5) und (3) finden wir, daß die Werte dieser Funktionen an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $T \in J$ folgendermaßen zusammenhängen:

$$\left.\begin{aligned} A(T) &= a(t)\,\dot{t} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}}, \qquad & B(T) &= b(t)\,\dot{t}^2, \\ a(t) &= A(T)\,T' + \frac{T''}{T'}, \qquad & b(t) &= B(T)\,T'^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus diesen Beziehungen geht hervor, daß das Vorzeichen der zweiten zentroaffinen Semiinvarianten $b(t)$, $B(T)$ der Darstellungen $x(t)$, $X(T)$ an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $T \in J$ dasselbe ist:

$$(\varepsilon =)\ \operatorname{sgn} b(t) = \operatorname{sgn} B(T).$$

Man sieht, daß dieses Vorzeichen ε eine absolute zentroaffine Invariante der Kurve $\mathfrak{K}$ darstellt. Da die Kurve $\mathfrak{K}$ regulär ist, bleibt (nach (5)) ε bei allen Darstellungen der Kurve $\mathfrak{K}$ und denen ihrer Repräsentanten für alle Werte des Parameters dasselbe. Bezüglich der geometrischen Bedeutung von ε wollen wir uns mit der folgenden Bemerkung begnügen: Je nachdem, ob $\varepsilon = -1$ oder $= 1$ ist, liegen das Zentrum der zentroaffinen Ebene und die Kurve $\mathfrak{K}$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden Kurventangente.

5. Es seien $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ beliebig gewählte homologe Werte. Dann haben wir nach (7) an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $T \in J$

$$\operatorname{sgn}(xx') \int_{t_0}^{t} \sqrt{|b(\sigma)|}\, d\sigma = \operatorname{sgn}(X\dot{X}) \int_{T_0}^{T} \sqrt{|B(\sigma)|}\, d\sigma \tag{8}$$

und ferner

$$\frac{\operatorname{sgn}(xx')}{\sqrt{|b(t)|}} \left[a(t) - \frac{1}{2}\,\frac{b'(t)}{b(t)}\right] = \frac{\operatorname{sgn}(X\dot{X})}{\sqrt{|B(T)|}} \left[A(T) - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{B}(T)}{B(T)}\right]. \tag{9}$$

Nun betrachten wir die im Intervall j definierten Funktionen

$$s(t) = \operatorname{sgn}(xx') \int_{t_0}^{t} \sqrt{|b(\sigma)|}\, d\sigma, \qquad k(t) = \frac{\operatorname{sgn}(xx')}{\sqrt{|b(t)|}} \left[a(t) - \frac{1}{2}\,\frac{b'(t)}{b(t)}\right]. \tag{10}$$

Jede der beiden Funktionen $s(t)$, $k(t)$ nimmt nach (8), (9) bei beliebiger Darstellung $X(T)$ von $\mathfrak{K}$ an je zwei homologen Stellen t, T denselben Wert an. Offenbar behält sie auch bei beliebiger Wahl eines Repräsentanten $\bar{x}(t) = Cx(t)$ von $x(t)$ an jeder Stelle t ihren Wert oder nimmt den entgegengesetzten an, je nachdem, ob $\operatorname{sgn} |C| = 1$ oder $= -1$ ist. Folglich sind die Funktionen $s(t)$, $k(t)$ relative Invarianten der Kurve $\mathfrak{K}$. Die Funktion s wird der *zentroaffine orientierte Bogen* der Kurve $\mathfrak{K}$ genannt; ihr Wert $s(t)$ gibt die Länge des zentroaffinen orientierten Kurvenbogens vom Punkte $x(t_0)$ zum Punkte $x(t)$ an. Die Funktion k heißt die *zentroaffine Krümmung* der Kurve $\mathfrak{K}$; ihr Wert $k(t)$ gibt die zentroaffine Krümmung von $\mathfrak{K}$ im Punkte $x(t)$ an.

Nach (5) haben wir

$$k(t) = \frac{\operatorname{sgn}(xx')}{2} \sqrt{\frac{|(xx')|}{|(x'x'')|}} \left[3\,\frac{(xx'')}{(xx')} - \frac{(x'x''')}{(x'x'')} \right]. \tag{11}$$

Die Funktion $s(t)$, $t \in j$, gehört der Klasse C_1 oder einer höheren Klasse an, und ihre Ableitung s' ist stets von Null verschieden. Sie bildet das Intervall j auf ein die Null enthaltendes Intervall i ab: $0 \in i$.

Es sei $Y(s)$, $s \in i$, die vermöge der Parametertransformation $s = s(t)$ entstandene Darstellung der Kurve $\mathfrak{K}$. Dann haben wir an je zwei homologen Stellen $s \in i$, $t \in j$

$$A(s) = k(t), \quad B(s) = \varepsilon.$$

Wir sehen, daß der Wert $A(s)$ $(= K(s))$ der ersten Semiinvariante A an jeder Stelle $s \in i$ die zentroaffine Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte $Y(s)$ angibt, während die zweite Semiinvariante B stets ε $(= \pm 1)$ ist.

Die Darstellung $Y(s)$ von $\mathfrak{K}$ genügt der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{Y} = K(s)\,\dot{Y} + \varepsilon Y. \tag{12}$$

Bezeichnet man $\dot{Y}(s) = Z(s)$, so kann diese Differentialgleichung durch das System von (vektoriellen) Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y} &= Z, \\ \dot{Z} &= \varepsilon Y + K(s)\, Z \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ersetzt werden. Die Differentialgleichungen (13) werden als die *Serret-Frenetschen Formeln* der zentroaffinen ebenen Kurventheorie bezeichnet.

Wir bemerken, daß die Kurve mit der Darstellung $\dot{Y}(s)$ bzw. $\ddot{Y}(s)$, $s \in i$, als die *Tangenten-* bzw. *Krümmungskurve* von $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird.

6. Anwendung der obigen Theorie auf die Integralkurven der Differentialgleichung (q). Wir betrachten eine Differentialgleichung (q), wobei wir annehmen wollen: $q \in C_1$.

Es sei (u, v) eine Basis der Differentialgleichung (q) und $\mathfrak{K}$ die durch diese Basis bestimmte Integralkurve von (q). Die Kurve $\mathfrak{K}$ läßt also die Darstellung $x(t) = [u(t), v(t)]$, $t \in j$, zu.

Die verschiedenen Integralkurven von (q) stellen natürlich die Repräsentanten der Kurve $\mathfrak{K}$ dar.

Offenbar haben wir

$$(xx') = w\ (\neq 0); \quad (xx'') = 0, \quad (x'x'') = -qw, \quad (x'x''') = -q'w.$$

Die Kurve $\mathfrak{K}$ ist genau dann regulär, wenn der Träger q im Intervall j stets von Null verschieden ist: $q(t) \neq 0$ für $t \in j$.

Wir nehmen nun an, die Kurve $\mathfrak{K}$ sei regulär, also $q(t) \neq 0$ für $t \in j$.

Im Fall $q < 0$ bzw. $q > 0$ liegt das Zentrum der zentroaffinen Ebene und die Kurve $\mathfrak{K}$ auf derselben bzw. auf verschiedenen Seiten einer jeden Kurventangente.

Der zentroaffine orientierte Bogen der Kurve $\mathfrak{K}$ und ihre zentroaffine Krümmung sind durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{sgn} w \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{|q(\sigma)|}\, d\sigma, \\ k(t) &= \operatorname{sgn} w \left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

gegeben.

Der Träger q kann vermöge der Funktionen s, k so ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= \operatorname{sgn} q(t_0) \cdot s'^2(t), \\ q(t) &= \frac{q(t_0)}{\left[1 + \operatorname{sgn} w \cdot \sqrt{|q(t_0)|} \int_{t_0}^{t} k(\sigma)\, d\sigma\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die vermöge der Parametertransformation $s = s(t)$ entstandene Darstellung $Y(s)$ der Kurve $\mathfrak{K}$ genügt einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form (12), wobei $\varepsilon = \operatorname{sgn} q$ ist.

Es sei $Q(s)$ der auf die Veränderliche s bezogene Träger $q(t)$ von (q). Die Funktion Q ist also durch die an je zwei homologen Stellen $s \in i$, $t \in j$ geltende Beziehung $Q(s) = q(t)$ definiert.

Nach (14) haben wir

$$\dot{Q}(s) = \operatorname{sgn} w \cdot \frac{q'(t)}{\sqrt{|q(t)|}}$$

und ferner

$$K(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{Q}(s)}{Q(s)}.$$

Wir sehen: Bei der auf den zentroaffinen orientierten Bogen der Kurve $\mathfrak{K}$ bezogenen Darstellung von $\mathfrak{K}$ ist die zentroaffine Krümmung K dieser Kurve durch die folgende Formel gegeben:

$$K(s) = \frac{d}{ds} \log \frac{1}{\sqrt{|Q(s)|}}. \tag{16}$$

Aus (16) folgt an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $s \in i$

$$q(t) = q(t_0) \exp\left(-2 \int_{0}^{s} K(\sigma)\, d\sigma\right). \tag{17}$$