Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie

§ 26. Deformationen und die Isomorphiesätze

In: Otakar Borůvka (author): Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. (German). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960. pp. 175--182.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401518

6. Übungsaufgaben.

1. Die Ordnung jeder Faktorgruppe auf einer endlichen Gruppe von der Ordnung N ist ein Teiler von N.

2. In der vollständigen Gruppe der euklidischen Bewegungen auf der Geraden bzw. in der Ebene ist die aus allen Bewegungen $\boldsymbol{f}[a]$ bzw. $\boldsymbol{f}[\alpha;\, a,\, b]$ bestehende Untergruppe (§ 19,7,1) invariant. Die durch diese Untergruppe bestimmte Faktorgruppe wird von genau zwei Elementen gebildet; das eine setzt sich aus allen Bewegungen $\boldsymbol{f}[a]$ bzw. $\boldsymbol{f}[\alpha;\, a,\, b]$ und das andere aus allen Bewegungen $\boldsymbol{g}[a]$ bzw. $\boldsymbol{g}[\alpha;\, a,\, b]$ zusammen.

3. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und die Untergruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist. Dann sind die Faktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ adjungiert (§ 15, Nr. 3,4; § 23, Nr. 3).

4. Zwei Ketten von Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\{\underline{1}\}$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzen stets isomorphe Verfeinerungen (*Satz von* JORDAN-HÖLDER-SCHREIER) (vgl. § 16, Nr. 4,4).

§ 26. Deformationen und die Isomorphiesätze

1. Deformationen von Gruppen. Wir betrachten beliebige Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ und setzen die Existenz einer Deformation $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ voraus. Wir fragen: Wenn eines der Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe ist, was kann von dem anderen gesagt werden?

1. *Deformationen von Gruppen auf Gruppoide.* Es gilt folgendes: *Wenn $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, so gilt dasselbe von $\mathfrak{G}^*$. Ferner stellt das $\boldsymbol{d}$-Bild des Einselements von $\mathfrak{G}$ das Einselement von $\mathfrak{G}^*$ und das $\boldsymbol{d}$-Bild des zu einem beliebigen Element $a \in \mathfrak{G}$ inversen Elements das zu dem $\boldsymbol{d}$-Bild von a inverse Element dar.*

Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst beachten, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ assoziativ ist (§ 13, Nr. 6,2). Es sei $\underline{1}^*$ das $\boldsymbol{d}$-Bild des Einselements $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, also $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\,\underline{1}$. Nach § 18, Nr. 7,4 stellt $\underline{1}^*$ das Einselement des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ dar. Ferner sei $a^* \in \mathfrak{G}^*$ ein beliebiges Element in $\mathfrak{G}^*$. Da $\boldsymbol{d}$ eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{G}$ *auf* das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ darstellt, gibt es wenigstens ein Element $a \in \mathfrak{G}$, für das $a^* = \boldsymbol{d}a$ ist. Aus $aa^{-1} = \underline{1}$ ergibt sich $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\,\underline{1}$, also $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$, und ähnlich folgt aus $a^{-1}a = \underline{1}$ die Beziehung $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\,\underline{1}$, also $\boldsymbol{d}a^{-1} \cdot a^* = \underline{1}^*$. Wir sehen, daß das $\boldsymbol{d}$-Bild des zu einem beliebigen Element $a \in \mathfrak{G}$ inversen Elements mit dem zu dem $\boldsymbol{d}$-Bild von a inversen Element identisch ist, also $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Damit ist das Gewünschte bewiesen. Zusammenfassend können wir sagen, daß eine Deformation eine Gruppe stets wieder auf eine Gruppe abbildet und dabei die Einselemente bzw. die inversen Elemente auf Elemente derselben Art abgebildet werden.

Aus diesem Resultat kann insbesondere auf den folgenden Sachverhalt geschlossen werden: *Sind zwei Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorph und ist eines von ihnen eine Gruppe, so gilt dies auch von dem anderen.* In der Tat, sind die Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorph, so gibt es einen Isomorphismus des Gruppoids $\mathfrak{G}$

auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ und zugleich einen (inversen) Isomorphismus des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}$. Folglich ist jedes der Gruppoide $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*$ das isomorphe Bild des anderen. Daraus ist zu ersehen, daß eines der Gruppoide $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*$ eine Gruppe ist, wenn das andere diese Eigenschaft hat. Ein Isomorphismus ist eine Art Deformation und bildet folglich die Einselemente bzw. die inversen Elemente in beiden Gruppen aufeinander ab; ferner bildet er Untergruppen und, wie leicht einzusehen ist, insbesondere invariante Untergruppen ebenfalls aufeinander ab.

2. *Deformationen von Gruppoiden auf Gruppen.* Wir wollen nun hinsichtlich des Gruppoids $\mathfrak{G}$ keine speziellen Annahmen machen, vom Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ jedoch annehmen, es sei eine Gruppe. Nach dem ersten Isomorphiesatz für Gruppoide (§ 16, Nr. 1,1) ist die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ einem auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ gelegenen Faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ isomorph; den entsprechenden Isomorphismus wollen wir mit $\boldsymbol{i}$ bezeichnen. Das Feld von $\bar{\mathfrak{G}}$ ist die zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige erzeugende Zerlegung von $\mathfrak{G}$; bei dem Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ wird jedes Element von $\bar{\mathfrak{G}}$ auf denjenigen Punkt in $\mathfrak{G}^*$ abgebildet, aus dessen $\boldsymbol{d}$-Urbildern das Element besteht. Nach dem obigen Resultat ist das Faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ eine Gruppe, da $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe ist. Der Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ bildet, wie wir wissen, das Einselement $\underline{1}$ der Gruppe $\bar{\mathfrak{G}}$ auf das Einselement $\underline{1}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}^*$, also $\boldsymbol{i}\,\underline{1} = \underline{1}^*$, und ferner je zwei zueinander inverse Elemente $\bar{a}, \bar{a}^{-1} \in \bar{\mathfrak{G}}$ auf zwei zueinander inverse Punkte in $\mathfrak{G}^*$ ab, also $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^*$, $\boldsymbol{i}\bar{a}^{-1} = a^{*-1}$. Da jedes Element $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{G}}$ aus allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern ein und desselben Punktes $a^* \in \mathfrak{G}^*$ besteht, und zwar des der Beziehung $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^*$ genügenden Punktes $a^* \in \mathfrak{G}^*$, wird das Einselement $\underline{1} \in \bar{\mathfrak{G}}$ von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern von $\underline{1}^*$ gebildet; je zwei zueinander inverse Elemente $\bar{a}, \bar{a}^{-1} \in \bar{\mathfrak{G}}$ werden von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern von zwei zueinander inversen Punkten $a^*, a^{*-1} \in \mathfrak{G}^*$ gebildet. Es gilt also der folgende

Satz. *Ist $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe, so ist auch das zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, und $\bar{\mathfrak{G}}$ ist mit $\mathfrak{G}^*$ isomorph. Das Einselement von $\bar{\mathfrak{G}}$ ist durch die Menge aller $\boldsymbol{d}$-Urbilder des Einselements von $\mathfrak{G}^*$ und je zwei zueinander inverse Elemente in $\bar{\mathfrak{G}}$ sind durch die Mengen aller $\boldsymbol{d}$-Urbilder von zwei zueinander inversen Punkten in $\mathfrak{G}^*$ dargestellt.*

Wir wollen nun an einem einfachen Beispiel zeigen, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}$ keineswegs eine Gruppe zu sein braucht, wenn $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe ist; das Gruppoid $\mathfrak{G}$ kann sogar unter Umständen ein ganz beliebiges Gruppoid darstellen. Ist nämlich $\mathfrak{G}^*$ die aus dem einzigen Punkt $\underline{1}^*$ bestehende Gruppe, so daß $\underline{1}^* \cdot \underline{1}^* = \underline{1}^*$ gilt, und ferner $\mathfrak{G}$ ein beliebiges Gruppoid, so können wir zeigen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zu dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ homomorph ist. Dies folgt daraus, daß die Abbildung, die jedem Punkt in $\mathfrak{G}$ den Punkt $\underline{1}^* \in \mathfrak{G}^*$ zuordnet, tatsächlich eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ darstellt.

2. Der Satz von Cayley. Realisierung abstrakter Gruppen.

1. *Linksseitige Translationen.* Es sei $a \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element in der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn wir jedem Element $x \in \mathfrak{G}$ das Element $ax \in \mathfrak{G}$ zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich. Da die Gleichung $ax = b$ für jedes Element $b \in \mathfrak{G}$ eine einzige Lösung $x \in \mathfrak{G}$ besitzt, ist diese Abbildung

schlicht und stellt also eine Permutation der Gruppe $\mathfrak{G}$ dar. Wir nennen diese Permutation die *durch das Element a bestimmte linksseitige Translation der Gruppe* $\mathfrak{G}$ und schreiben ${}_a\boldsymbol{t}$.

Die durch das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ bestimmte linksseitige Translation ${}_{\underline{1}}\boldsymbol{t}$ stimmt offenbar mit dem identischen Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ überein. Sind $a, b \in \mathfrak{G}$ voneinander verschiedene Elemente, so sind die linksseitigen Translationen ${}_a\boldsymbol{t}, {}_b\boldsymbol{t}$ ebenfalls voneinander verschieden, da die ${}_a\boldsymbol{t}$- bzw. ${}_b\boldsymbol{t}$-Bilder des Einselements $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ mit a bzw. b zusammenfallen und folglich voneinander verschieden sind. Für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ gilt: Setzt man die linksseitige Translation ${}_a\boldsymbol{t}$ mit der linksseitigen Translation ${}_b\boldsymbol{t}$ zusammen, so erhält man die durch das Element ba bestimmte linksseitige Translation ${}_{ba}\boldsymbol{t}$; es besteht also die Beziehung ${}_b\boldsymbol{t}\,{}_a\boldsymbol{t} = {}_{ba}\boldsymbol{t}$.

2. *Der Satz von* Cayley. Wir betrachten das Gruppoid $\mathfrak{T}_l$, dessen Feld von allen durch die einzelnen Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmten linksseitigen Translationen gebildet wird; die Multiplikation in dem Gruppoid $\mathfrak{T}_l$ soll mittels der Formel ${}_a\boldsymbol{t} \cdot {}_b\boldsymbol{t} = {}_{ab}\boldsymbol{t}\,(a, b \in \mathfrak{G})$ erklärt werden. Wenn wir jedem Element $a \in \mathfrak{G}$ das Element ${}_a\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$ zuordnen, so haben wir offenbar eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{T}_l$. Diese Abbildung ist schlicht, da je zwei voneinander verschiedene Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ auf zwei voneinander verschiedene Elemente ${}_a\boldsymbol{t}, {}_b\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$ abgebildet werden. Ferner sehen wir, daß diese Abbildung eine Deformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{T}_l$ darstellt; in der Tat, für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ wird das Produkt $ab \in \mathfrak{G}$ auf die linksseitige Translation ${}_{ab}\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$, d. h. auf das Produkt ${}_a\boldsymbol{t} \cdot {}_b\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$ aus dem Bild ${}_a\boldsymbol{t}$ von a mit dem Bild ${}_b\boldsymbol{t}$ von b abgebildet. Wir sehen, daß die betrachtete Abbildung eine schlichte Deformation, also einen Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{T}_l$ darstellt. Folglich ist das Gruppoid $\mathfrak{T}_l$ eine Gruppe, und zwar eine Permutationsgruppe. Auf diese Weise ergibt sich der folgende sogenannte *Satz von* Cayley:

Jede Gruppe ist ein isomorphes Bild einer Permutationsgruppe.

Die Wichtigkeit dieses Resultats für die Gruppentheorie besteht darin, daß man sich, soweit es um Eigenschaften geht, die allen isomorphen Gruppen gemeinsam sind, auf Permutationsgruppen beschränken kann.

3. *Realisierungen von abstrakten Gruppen.* Mit den obigen Überlegungen hängt die folgende Frage eng zusammen: Gibt es für eine abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ eine auf sie deformierbare Permutationsgruppe? Von einer Permutationsgruppe dieser Art sagt man, sie sei eine *Realisierung* der abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$. Unsere Frage lautet also so, ob jede abstrakte Gruppe stets mittels Permutationsgruppen realisiert werden kann.

Unsere obigen Überlegungen zeigen, daß diese Frage eine bejahende Antwort zuläßt, da jede abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ zu der entsprechenden Gruppe $\mathfrak{T}_l$ von linksseitigen Translationen (sogar) isomorph ist und folglich von $\mathfrak{T}_l$ realisiert wird.

Wir wollen z. B. die abstrakte Gruppe von der Ordnung 4 mit der zweiten in § 19, Nr. 6, 1 angegebenen Multiplikationstabelle realisieren. Die durch die einzelnen Elemente dieser Gruppe bestimmten linksseitigen Translationen sind, wie man unmittelbar aus der Multiplikationstabelle erkennt, die folgenden:

$$\begin{pmatrix} \underline{1}\,a\,b\,c \\ \underline{1}\,a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1}\,a\,b\,c \\ a\,\underline{1}\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1}\,a\,b\,c \\ b\,c\,\underline{1}\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1}\,a\,b\,c \\ c\,b\,a\,\underline{1} \end{pmatrix}.$$

Diese Permutationen bilden mit der durch $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{pq}$ erklärten Multiplikation eine Gruppe, durch die unsere abstrakte Gruppe realisiert wird. In der erwähnten Formel durchlaufen natürlich die $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ die obigen vier Permutationen; $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$ bedeutet das Produkt aus $\boldsymbol{p}$ mit $\boldsymbol{q}$, während $\boldsymbol{pq}$ die entsprechende zusammengesetzte Permutation bezeichnet.

4. *Rechtsseitige Translationen.* Analog zu den linksseitigen Translationen werden auch die rechtsseitigen Translationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ definiert:

Ist $a \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ und ordnet man jedem Element $x \in \mathfrak{G}$ das Element $xa \in \mathfrak{G}$ zu, so erhält man eine Permutation der Gruppe $\mathfrak{G}$, die *durch das Element a bestimmte rechtsseitige Translation der Gruppe* $\mathfrak{G}$; wir bezeichnen sie mit $\boldsymbol{t}_a$.

Über rechtsseitige Translationen gelten analoge Resultate, wie wir sie oben für linksseitige Translationen hergeleitet haben; wir überlassen es dem Leser, sie zu formulieren und zu beweisen.

3. Die Isomorphiesätze für Gruppen. In § 16, Nr. 1 haben wir die Isomorphiesätze für Gruppoide behandelt. Wir wollen uns nun den Spezialfall, daß die in Betracht kommenden Gruppoide Gruppen sind, genauer ansehen.

Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ beliebige Gruppen.

1. *Erster Satz.* Wir nehmen an, es gebe eine Deformation $\boldsymbol{d}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$. Wie wir gesehen haben (§ 16, Nr. 1, 1), ist das zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ zur Gruppe $\mathfrak{G}^*$ isomorph. Nach § 25, Nr. 2 stellt das Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ eine Faktorgruppe dar, die durch eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe bestimmt wird; das Feld dieser Untergruppe ist das das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltende Element von $\bar{\mathfrak{D}}$. Da sich bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ auf das Einselement $\underline{1}^* \in \mathfrak{G}^*$ abbildet, sehen wir, daß jenes Element von $\bar{\mathfrak{D}}$, in dem das Einselement $\underline{1}$ enthalten ist, von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Einselements $\underline{1}^* \in \mathfrak{G}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ gebildet wird. Auf diese Weise kommen wir zu der Erkenntnis, daß die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Einselements der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ gebildete Menge das Feld einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{D}$ darstellt und daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ zur Gruppe $\mathfrak{G}^*$ isomorph ist.

Umgekehrt wollen wir nun annehmen, die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ sei der durch eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ bestimmten Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ isomorph. Dann gibt es einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$. Nach § 16, Nr. 1, 1 vermittelt die Abbildung $\boldsymbol{d}'$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, in der jeder Punkt $a \in \mathfrak{G}$ auf das ihn enthaltende Element $\bar{a} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ abgebildet wird, eine Deformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Folglich ist die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{d}'$ eine Deformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ (§ 13, Nr. 3,4). Nach § 25, Nr. 1 ist das Einselement von $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ durch das Feld D der Gruppe $\mathfrak{D}$ dargestellt. Da ferner der Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ genau das Einselement der Gruppppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ auf das Einselement $\underline{1}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ abbildet, bildet die Deformation $\boldsymbol{d}$ genau die in D liegenden Punkte der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf das Einselement $\underline{1}^* \in \mathfrak{G}^*$ ab. Somit tritt der Sachverhalt zutage, daß es eine Deformation $\boldsymbol{d}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ gibt, die so beschaffen ist, daß die Untergruppe $\mathfrak{D}$ genau von den $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Einselements von $\mathfrak{G}^*$ gebildet wird.

Diese Erkenntnisse fassen wir nun in dem *ersten Isomorphiesatz für Gruppen* zusammen:

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ deformierbar ist ($\boldsymbol{d}$), so stellt die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Einselements von $\mathfrak{G}^*$ gebildete Menge eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ dar, und die durch $\mathfrak{D}$ bestimmte Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ ist der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ isomorph, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{G}^*$. Wenn umgekehrt die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der durch eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ bestimmten Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ isomorph ist, so gibt es eine Deformation $\boldsymbol{d}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ so, daß die Untergruppe $\mathfrak{D}$ genau von den $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Einselements von $\mathfrak{G}^*$ gebildet wird.

2. *Zweiter Satz.* Der *zweite Isomorphiesatz für Gruppen* lautet:

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$, wobei die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und die Untergruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist. Ferner seien die Beziehungen

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$$

erfüllt. Dann sind die Faktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ verknüpft und folglich isomorph, also $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}/\mathfrak{D}$, wobei die mit Hilfe der Inzidenz von Elementen realisierte Abbildung einen Isomorphismus darstellt.

Der Beweis dieses Satzes ist eine unmittelbare Folgerung aus § 23, Nr. 1 und § 16, Nr. 1, 2.

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes betrifft die Hülle und die Durchdringung einer Untergruppe und einer Faktorgruppe in der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ invariant ist. Aus § 25, Nr. 4, 1 wissen wir, daß unter diesen Umständen die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar und ferner die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ invariant sind; außerdem gelten die Formeln

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}).$$

Wir können den obigen Satz auf die Gruppen

$$\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$$

anwenden und erhalten die Isomorphiebeziehung

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

wobei der Isomorphismus mit Hilfe der Inzidenz von Elementen realisiert wird.

Wir wollen dieses Resultat zusammenfassen:

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *Untergruppen in der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *wobei* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{A}$ *invariant ist. Dann sind die Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ *miteinander vertauschbar, und die Untergruppe* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *ist in* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *und die Untergruppe* $\mathfrak{B}$ *in* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ *invariant. Ferner sind die Faktorgruppen* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ *und* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ *verknüpft und folglich isomorph, also*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

wobei die mit Hilfe der Inzidenz von Elementen erklärte Abbildung einen Isomorphismus darstellt.

Insbesondere haben wir (für $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$) den folgenden

Satz. *Es seien* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *Untergruppen in* $\mathfrak{G}$, *wobei* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant ist. Dann sind die Untergruppen* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *miteinander vertauschbar, und die Untergruppe* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *ist in* $\mathfrak{C}$ *invariant. Ferner sind die Faktorgruppen* $\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ *verknüpft und folglich isomorph, also*

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

wobei die mit Hilfe der Inzidenz von Elementen erklärte Abbildung einen Isomorphismus darstellt.

3. *Dritter Satz.* Wie wir aus § 16, Nr. 1,3 wissen, haben wir noch den dritten Isomorphiesatz für Gruppoide, der Überdeckungen von Faktoroiden betrifft.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}_1$ eine solche in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Nach dem erwähnten dritten Isomorphiesatz für Gruppoide ist die Faktorgruppe $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ der durch sie erzwungenen Überdeckung $\bar{\mathfrak{A}}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ isomorph, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1 \simeq \bar{\mathfrak{A}}$, und diejenige Abbildung von $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ auf $\bar{\mathfrak{A}}$, in der jedem Element $\bar{b} \in (\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ die Summe $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ aller in $\bar{b}$ enthaltenen Elemente $b \in \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ zugeordnet wird, stellt einen Isomorphismus dar. Nach § 25, Nr. 5, 1 bildet insbesondere die Summe aller in $\mathfrak{B}_1$ enthaltenen Elemente der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ das Feld einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$, und $\bar{\mathfrak{A}}$ stellt die durch $\mathfrak{A}$ bestimmte Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ dar; außerdem haben wir $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Aus dieser Überlegung folgt nun der *dritte Isomorphiesatz für Gruppen:*

Ist $\mathfrak{B}$ *eine invariante Untergruppe in der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B}_1$ *eine solche in der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, *so bildet die Summe aller in* $\mathfrak{B}_1$ *enthaltenen Elemente von* $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ *das Feld einer in* $\mathfrak{G}$ *invarianten Untergruppe* $\mathfrak{A}$, *und es gilt die Isomorphiebeziehung*

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A};$$

man erhält einen Isomorphismus der Faktorgruppe $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ *auf die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, *wenn man jedem Element* $\bar{b}$ *der ersten die Summe aller in* $\bar{b}$ *enthaltenen Elemente der zweiten Faktorgruppe zuordnet.*

4. Deformationen von Faktorgruppen. Wir knüpfen an die Resultate über Deformationen von Faktoroiden an (§ 16, Nr. 2) und wollen untersuchen, wie sich diese Resultate im Fall von Faktorgruppen auswirken.

Es sei $\boldsymbol{d}$ eine Deformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$, so daß $\mathfrak{G}^* = \boldsymbol{d}\,\mathfrak{G}$ ist.

Aus Nr. 3,1 wissen wir, daß die Menge aller $\boldsymbol{d}$-Urbilder des Einselements von $\mathfrak{G}^*$ das Feld einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{T}$ bildet und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{G}^*$ isomorph ist.

Nun bestimmt die Deformation $\boldsymbol{d}$ eine erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ des Systems aller Teilmengen in $\mathfrak{G}$ in dasjenige aller Teilmengen in $\mathfrak{G}^*$; bei dieser Abbildung wird jede nicht leere Teilmenge $A \subset \mathfrak{G}$ auf die aus allen $\boldsymbol{d}$-Bildern der in A enthaltenen $a \in A$ bestehende Teilmenge $\boldsymbol{d}A \subset \mathfrak{G}^*$ abgebildet (§ 7, Nr. 1).

Es sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe und $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ die entsprechende Faktorgruppe auf $\mathfrak{G}$.

Nach § 25, Nr. 3 sind die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ zueinander komplementär. Daraus schließen wir, daß das Bild der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ ein Faktoroid auf der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ darstellt (§ 16, Nr. 2, 1). Die partielle erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ stellt eine Deformation, die *erweiterte Deformation* $\boldsymbol{d}$, dar (§ 16, Nr. 2, 2).

Das Bild des Feldes A der Untergruppe $\mathfrak{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ enthält das Einselement der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ (Nr. 1, 1). Daraus folgt, daß $\boldsymbol{d}A \in \boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ das Feld einer in $\mathfrak{G}^*$ invarianten Untergruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bildet und das Faktoroid $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ mit der durch die invariante Untergruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bestimmten Faktorgruppe zusammenfällt (§ 24, Nr. 3,2), also $\boldsymbol{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) = \boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ ist.

Die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{T}]$ der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ und die Faktorgruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ sind isomorph; eine isomorphe Abbildung der ersten auf die Faktorgruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ wird erhalten, wenn man jedem Element von $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{T}]$ sein Bild bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ zuordnet (§ 16, Nr. 2, 3). Das Faktoroid $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{T}]$ ist die durch die in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ bestimmte Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ (§ 25, Nr. 3).

Somit haben wir das folgende Resultat erhalten:

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorph ($\boldsymbol{d}$) ist, so stimmt das Bild jeder Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ mit der Faktorgruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ überein, und die partielle erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ auf die Faktorgruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ stellt eine Deformation dar. Die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ und $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ sind isomorph; eine isomorphe Abbildung der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ auf die Faktorgruppe $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}/\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ wird erhalten, wenn man jedem Element der ersten sein Bild in bezug auf die erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ zuordnet.

Insbesondere ist jede Faktorgruppe, die eine Überdeckung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ darstellt, ihrem Bild in bezug auf die erweiterte Deformation $\boldsymbol{d}$ isomorph; eine isomorphe Abbildung wird erhalten, wenn man jedem Element der erwähnten Überdeckung sein Bild in bezug auf die erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ zuordnet.

5. Übungsaufgaben.

1. Es soll die abstrakte Gruppe von der Ordnung 4, deren Multiplikation in der ersten in § 19, Nr. 6, 1 angegebenen Multiplikationstabelle beschrieben ist, mit Hilfe einer Permutationsgruppe realisiert werden.

2. Ist eine Gruppentafel einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, so erhält man Symbole der linksseitigen Translationen auf $\mathfrak{G}$, wenn man den horizontalen Eingang und je eine Zeile der Multiplikationstabelle herausgreift. Ähnlich erhält man aus dem vertikalen Eingang und den einzelnen Spalten der Gruppentafel Symbole der rechtsseitigen Translationen auf $\mathfrak{G}$.

3. Ein reguläres Oktaeder hat 13 Symmetrieachsen (3 gehen durch je zwei gegenüberliegende Ecken, 6 durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüberliegenden Kanten und 4 durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen). Alle Drehungen des Oktaeders um die Symmetrieachsen, die das Oktaeder in sich selbst überführen, bilden eine Gruppe von der Ordnung 24, die sogenannte *Oktaedergruppe* (dabei werden gleichachsige Drehungen um Winkel, die sich nur um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, als gleich angesehen); wir wollen die erwähnte Gruppe mit $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Einer Drehung, die ein Element in $\mathfrak{O}$ darstellt, entspricht stets eine Permutation der aus den drei durch je zwei gegenüberliegende Ecken des Oktaeders gehenden Symmetrieachsen bestehenden Menge. Wenn man jedem Element der Gruppe $\mathfrak{O}$ die entsprechende Permutation zuordnet, so erhält man eine Deformation von $\mathfrak{O}$ auf die symmetrische Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_3$. Der Leser möge diese Deformation benutzen und mit Hilfe des ersten und dritten Isomorphiesatzes für Gruppen die Tatsache beweisen, daß in $\mathfrak{O}$ invariante Untergruppen der Ordnungen 4 und 12 enthalten sind.

§ 27. Zyklische Gruppen

1. Definition. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus den Potenzen eines einzigen Elements a besteht, nennt man *zyklisch*. Das Element a heißt das *erzeugende Element* von $\mathfrak{G}$. Eine zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element a wird im allgemeinen mit (a) bezeichnet.

Aus der ersten Formel (1) in § 19, Nr. 3 sehen wir, daß *jede zyklische Gruppe abelsch ist.*

2. Ordnung einer zyklischen Gruppe. Wir betrachten eine zyklische Gruppe (a). Wenn die Potenzen a^i, a^j mit zwei verschiedenen Exponenten i, j stets voneinander verschieden sind, so ist die Ordnung der Gruppe (a) gleich 0, da in diesem Fall in der Gruppe (a) unendlich viele voneinander verschiedene Elemente auftreten:

$$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots \tag{1}$$

Da jedes Element in (a) eine Potenz von a ist, gibt es in der Gruppe (a) außer den Elementen (1) keine weiteren Elemente, und wir sehen, daß die Gruppe (a) genau von den Elementen (1) gebildet wird.

Wir nehmen nun an, daß Potenzen a^i, a^j für gewisse voneinander verschiedene Exponenten i, j zusammenfallen, also $a^i = a^j$ für $i \neq j$ ist. Aus dieser Gleichheit erhalten wir $a^{-j}a^i = a^{-j}a^j$, also $a^{i-j} = \underline{1}$. Da eine der ganzen Zahlen $i - j$, $j - i$ positiv ist und die mit diesen Exponenten gebildeten Potenzen von a mit dem Einselement $\underline{1}$ identisch sind, sehen wir, daß die Gleichung $a^x = \underline{1}$ Lösungen x in natürlichen Zahlen zuläßt. Unter diesen Lösungen gibt es eine kleinste Lösung n; n ist also eine natürliche Zahl, und