den mittels Durchschnitts- und Produktbildung definierten Multiplikationen einen modularen Verband dar. Das von den linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich der einzelnen Elemente dieses Verbandes gebildete System ist in bezug auf die Operationen (), [] *abgeschlossen und stellt zusammen mit den mittels dieser Operationen definierten Multiplikationen einen zum ersten Verband isomorphen, also ebenfalls modularen Verband dar.*

4. Übungsaufgaben.

1. Die Ordnung einer Gruppe, die von Permutationen einer endlichen Menge von der Ordnung n gebildet wird, ist ein Teiler der Zahl $n!$.

2. Die Anzahl der zu sich selbst inversen Elemente in einer endlichen abelschen Gruppe von der Ordnung N ist ein Teiler der Zahl N.

§ 23. Spezielle Nebenklassenzerlegungen von Gruppen

1. Halbverknüpfte und verknüpfte Nebenklassenzerlegungen. Wir betrachten beliebige Untergruppen $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$. Mit $A \supset B$, $C \supset D$ bezeichnen wir ihre Felder.

Zunächst fragen wir, unter welchen Umständen die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ halbverknüpft bzw. verknüpft sind.

Da der Durchschnitt $A \cap B$ (die Einheit von $\mathfrak{G}$ enthält und folglich) nicht leer ist, sind nach § 4, Nr. 1 die genannten Klassenzerlegungen dann und nur dann halbverknüpft, wenn

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}$$

gilt. Nach § 21, Nr. 2,1 ist dies gleichbedeutend mit

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}).$$

Wir sehen, daß dies genau dann gilt, wenn

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} \tag{1}$$

ist. Somit haben wir das Resultat erhalten, daß *die Klassenzerlegungen* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ *dann und nur dann halbverknüpft sind, wenn die beiden Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *übereinstimmen, also* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *ist.*

Wir nehmen nun an, die Klassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ seien verknüpft. Dann gelten nach § 4, Nr. 1 und § 20, Nr. 3,2 außer der Beziehung (1) noch die beiden Gleichheiten

$$A = (A \cap C)B, \quad C = (C \cap A)D.$$

Aus ihnen schließen wir (§ 19, Nr. 7,6), daß die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ mit jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ vertauschbar ist; folglich haben wir

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}. \tag{2}$$

Wenn umgekehrt die Beziehungen (1) und (2) gleichzeitig bestehen, so sind nach § 4, Nr. 1 und § 21, Nr. 2, 1 die Klassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ verknüpft.

Somit sehen wir, daß *die Klassenzerlegungen* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ *dann und nur dann verknüpft sind, wenn die folgenden Beziehungen gleichzeitig bestehen:*

$$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})\mathfrak{B},\qquad \mathfrak{C}=(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})\mathfrak{D}.$$

2. Der allgemeine Fünfgruppensatz. Wir betrachten beliebige Untergruppen $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\supset\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$ und setzen voraus, daß die Untergruppen $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind. Ferner betrachten wir eine beliebige, den Beziehungen

$$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}\supset\mathfrak{U}\supset(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D})\,(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B})$$

genügende Untergruppe $\mathfrak{U}$ und nehmen an, daß die Untergruppen $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ mit jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ vertauschbar sind.

Dann gilt der folgende *allgemeine Fünfgruppensatz:*

Die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})\mathfrak{B}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ *und* $(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})\mathfrak{D}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ *sind verknüpft und folglich äquivalent, also*

$$(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})\mathfrak{B}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{B}\simeq(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})\mathfrak{D}/_l\,\mathfrak{A}\mathfrak{D}.$$

Außerdem bestehen die Gleichheiten

$$(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})\mathfrak{B}\cap\mathfrak{U}\mathfrak{D}=\mathfrak{U}=(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})\mathfrak{D}\cap\mathfrak{U}\mathfrak{B}.\tag{1}$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'=(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})\mathfrak{D}$ und ferner $\bar A=\mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B}$, $\bar C=\mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D}$. Sodann haben wir $\mathfrak{A}'\supset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'\supset\mathfrak{D}$ und (im Hinblick auf § 20, Nr. 3, 2) $\bar A=\bar C\sqsubset\bar A$, $\bar C=\bar A\sqsubset\bar C$.

Wir betrachten die Zerlegungen

$$\bar A\sqcap\mathfrak{C}'=\mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B}\sqcap\mathfrak{C}'=(\mathfrak{A}'\cap\mathfrak{C}')/_l(\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{B})=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B}),$$
$$\bar C\sqcap\mathfrak{A}'=\mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D}\sqcap\mathfrak{A}'=(\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{A}')/_l(\mathfrak{A}'\cap\mathfrak{D})=(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D})$$

und wenden die in § 4, Nr. 1 beschriebene, zu verknüpften Überdeckungen $\acute{A}$, $\acute{C}$ der beiden Zerlegungen $\bar A$, $\bar C$ führende Konstruktion an.

Die kleinste gemeinsame Überdeckung der beiden Zerlegungen $\bar A\sqcap\mathfrak{C}'$, $\bar C\sqcap\mathfrak{A}'$ ist (nach § 21, Nr. 5) durch $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}/_l(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D})(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B})$ dargestellt. Wegen $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}\supset\mathfrak{U}\supset(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D})(\mathfrak{C}\cap\mathfrak{B})$ ist (nach § 21, Nr. 3) die Zerlegung $\bar B=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C})/_l\,\mathfrak{U}$ eine Überdeckung der kleinsten gemeinsamen Überdeckung der beiden Zerlegungen $\bar A\sqcap\mathfrak{C}'$, $\bar C\sqcap\mathfrak{A}'$ und folglich eine gemeinsame Überdeckung dieser letzteren. Im Einklang mit der erwähnten Konstruktion definieren wir nun die Zerlegung $\bar{\bar A}(\bar{\bar C})$ von $\bar A(\bar C)$ auf die folgende Weise: Jedes Element in $\bar{\bar A}(\bar{\bar C})$ ist die Menge aller Elemente von $\bar A(\bar C)$, die je mit demselben Element in $\bar B$ inzident sind. Dann sind $\acute{A}$, $\acute{C}$ die durch $\bar{\bar A}$ bzw. $\bar{\bar C}$ erzwungenen Überdeckungen von $\bar A$, $\bar C$.

Es sei also $\bar{\bar a}\in\bar{\bar A}$ ein beliebiges Element. Es setzt sich aus allen Elementen $\bar a\in\bar A$ zusammen, die mit einem Element $\bar b\in\bar B$ inzident sind. Nun ist aber $\bar b=x\,\mathfrak{U}$, wobei $x\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ einen Punkt in $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}$ darstellt. Folglich haben wir

$\bar{a} = x\mathfrak{U} \sqsubset \bar{A}$ und ferner (im Hinblick auf § 20, Nr. 3,2) $\mathring{a} = \mathbf{s}\bar{a} = x\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathring{A}$. Wir sehen, daß die Elemente von $\mathring{A}$ durch die linksseitigen Nebenklassen der in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ gelegenen Punkte in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ dargestellt sind. Die Summe dieser Nebenklassen ist offenbar $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{U}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$. Somit haben wir $\mathring{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{B}$. Ähnlich erhalten wir $\mathring{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{D}$. Damit ist gezeigt, daß die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ verknüpft sind. Aus dem zweiten Äquivalenzsatz (§ 6, Nr. 8) folgt ihre Äquivalenz.

Außerdem haben wir (nach § 4, Nr. 1) $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$, also (nach § 2, Nr. 3) $(\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C}) \sqcap (\mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A}) = \bar{B}$; ferner gilt (nach § 4, Nr. 1) $\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C} = \mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A}$. Wir erhalten also $\mathring{A} \sqcap \mathbf{s}\mathring{C} = \mathring{C} \sqcap \mathbf{s}\mathring{A} = \bar{B}$, und diese Beziehungen lauten

$$((\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D})/_l\,((\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{B})$$
$$= ((\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B})/_l\,((\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\,\mathfrak{U}.$$

Hieraus folgen die Formeln (1). Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Offenbar gelten unter den Voraussetzungen des allgemeinen Fünfgruppensatzes auch für die rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen analoge Aussagen.

Insbesondere haben wir für $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ den folgenden *allgemeinen Viergruppensatz:*

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ beliebige Untergruppen. Wir setzen voraus, daß die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander und ferner die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ mit der Untergruppe $\mathfrak{B}$ und analog die Untergruppen $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ mit der Untergruppe $\mathfrak{D}$ vertauschbar sind. Dann sind die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}$ verknüpft und folglich äquivalent, also

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D}.$$

Außerdem gelten die Gleichheiten

$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}. \qquad (2)$$

Analoge Aussagen gelten auch von den entsprechenden rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen.

3. Adjungierte Nebenklassenzerlegungen. Es seien wiederum $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$ und $A \supset B$, $C \supset D$ ihre Felder.

Wir fragen, unter welchen Umständen die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\,\mathfrak{D}$ in bezug auf B, D adjungiert sind.

Dazu wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\,\mathfrak{D}$ sind in bezug auf B, D dann und nur dann adjungiert, wenn die beiden Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall gilt

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}). \qquad (1)$$

Beweis. Nach § 2, Nr. 6,5 gelten die Formeln

$$D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C = (D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \sqcap C = D \sqsubset (\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}),$$
$$B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A = (B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqcap A = B \sqsubset (\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}),$$

aus denen sich unter Berücksichtigung von § 21, Nr. 2,1 die Beziehungen

$$\boldsymbol{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) = \boldsymbol{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \cap C = \boldsymbol{s}(D \sqsubset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})),$$
$$\boldsymbol{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A) = \boldsymbol{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \cap A = \boldsymbol{s}(B \sqsubset (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}))$$

ergeben, die folgendermaßen ausgedrückt werden können (§ 20, Nr. 3,2):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) &= (A \cap D)B \cap C = (A \cap D)(C \cap B), \\ \boldsymbol{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A) &= (C \cap B)D \cap A = (C \cap B)(A \cap D). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

a) Wir nehmen an, die Zerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ seien in bezug auf B, D adjungiert. Sodann haben wir nach (2) die Gleichheiten

$$(A \cap D)(C \cap B) = (C \cap B)(A \cap D).$$

Wir sehen, daß die beiden Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind. Folglich stellt das Produkt $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ eine Untergruppe in $\mathfrak{G}$ dar. Aus (2) schließen wir weiter, daß das Feld der Untergruppe $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ mit jedem der beiden Komplexe $(A \cap D)B \cap C$, $(C \cap B)D \cap A$ zusammenfällt. Diese Tatsache wird durch die Formeln (1) ausgedrückt. Wir wollen betonen, daß die beiden Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ nicht miteinander vertauschbar zu sein brauchen.

b) Wir nehmen an, daß die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind. Dann gilt nach (2) die Gleichheit

$$\boldsymbol{s}(D \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap C) = \boldsymbol{s}(B \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap A),$$

und wir sehen, daß die Zerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ in bezug auf B, D adjungiert sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Hinsichtlich der rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen gilt der folgende analoge Satz:

Die rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_r\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_r\mathfrak{D}$ *sind in bezug auf* B, D *dann und nur dann adjungiert, wenn die beiden Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}) \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{D}(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}).$$

4. Reihen von Untergruppen. Wir wollen nun eine Theorie von Reihen von Untergruppen entwickeln, die mit der in § 10 aufgebauten Theorie von Zerlegungsreihen in engstem Zusammenhang steht und die sich später im Fall von invarianten Untergruppen (§ 24, Nr. 6) auf dem Gebiet der klassischen Gruppentheorie reichlich auswirken wird.

1. *Grundbegriffe.* Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$. Unter einer *Reihe von Untergruppen in* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ oder *Reihe von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$

verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha(\geqq 1)$ Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ in $\mathfrak{G}$ mit den folgenden Eigenschaften: a) Die erste Untergruppe der Folge ist $\mathfrak{A}$, die letzte $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}$; b) jede nachfolgende Untergruppe ist eine Untergruppe in der unmittelbar vorangehenden, also

$$(\mathfrak{A} =)\, \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha\, (= \mathfrak{B})\,.$$

Eine solche Reihe wird kürzer mit $(\mathfrak{A})$ bezeichnet. Die Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ werden die *Glieder der Reihe* $(\mathfrak{A})$ genannt. $\mathfrak{A}_1$ ist das *Anfangsglied* und $\mathfrak{A}_\alpha$ das *Endglied der Reihe* $(\mathfrak{A})$. Unter der *Länge der Reihe* $(\mathfrak{A})$ verstehen wir die Anzahl α der Glieder in $(\mathfrak{A})$.

Zum Beispiel bildet jede Untergruppe $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ eine Reihe von der Länge 1; das Anfangs- und das Endglied dieser Reihe fällt mit $\mathfrak{A}$ zusammen.

Wir betrachten nun eine beliebige Reihe $((\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

Ein Glied von $(\mathfrak{A})$ wird *wesentlich* genannt, wenn es entweder das erste Glied $\mathfrak{A}_1$ der Reihe oder eine echte Untergruppe (§ 19, Nr. 4, 1) in dem unmittelbar vorangehenden Glied darstellt; anderenfalls ist es *unwesentlich*. Gibt es in $(\mathfrak{A})$ wenigstens ein unwesentliches Glied $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$, so heißt $(\mathfrak{A})$ (wegen $\mathfrak{A}_{\gamma+1} = \mathfrak{A}_\gamma$) *Reihe mit Wiederholungen*. Sind alle Glieder der Reihe $(\mathfrak{A})$ wesentlich, so heißt $(\mathfrak{A})$ *Reihe ohne Wiederholungen*. Die Anzahl α' der wesentlichen Glieder in der Reihe $(\mathfrak{A})$ ist die *reduzierte Länge von* $(\mathfrak{A})$. Es ist $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, wobei die Gleichheit $\alpha' = \alpha$ Reihen ohne Wiederholungen charakterisiert. Ähnlich wie eine Reihe von Zerlegungen (§ 10, Nr. 1) kann die Reihe $(\mathfrak{A})$ durch Streichung aller unwesentlichen Glieder (falls es solche gibt) *reduziert* und durch Eingliederung neuer Untergruppen in $\mathfrak{G}$ *verlängert* werden. Auch der Begriff einer *Teilreihe* von $(\mathfrak{A})$ ist wohl ohne weiteres klar.

Unter einer *Verfeinerung der Reihe* $(\mathfrak{A})$ verstehen wir eine Reihe von Untergruppen in $\mathfrak{G}$, welche die Reihe $(\mathfrak{A})$ als Teilreihe enthält. Jede Verfeinerung der Reihe $(\mathfrak{A})$ hat also die Form

$$\mathfrak{A}_{1,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{1,\beta_1-1} \supset \mathfrak{A}_{1,\beta_1} \supset \mathfrak{A}_{2,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{2,\beta_2-1} \supset \mathfrak{A}_{2,\beta_2} \supset \cdots$$
$$\supset \mathfrak{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}\,.$$

In diesen Formeln ist $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \mathfrak{A}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$, und die $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ bedeuten natürliche Zahlen; wenn $\beta_\delta = 1$ ist, so werden die Glieder $\mathfrak{A}_{\delta,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{\delta,\beta_\delta-1}$ nicht gelesen.

2. *Zugeordnete Reihen von Nebenklassenzerlegungen.* Es sei $((\mathfrak{A}) =)$ $\mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha$ eine Reihe von Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Der Reihe $(\mathfrak{A})$ ordnen wir nun die folgenden Reihen von linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen zu:

$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha\,,$$
$$((\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha\,.$$

Wir sprechen von der zur Reihe $(\mathfrak{A})$ *zugeordneten* oder zu ihr *gehörigen* Reihe von linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir sehen, daß man die Reihe $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ bzw. $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$ erhält, indem man jedes Glied $\mathfrak{A}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ von $(\mathfrak{A})$ durch $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$ bzw. $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\gamma$ ersetzt.

Wir wollen etwa die Reihe $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ betrachten und sonst nur bemerken, daß analoge Überlegungen auch für die Reihe $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$ angestellt werden können.

Offenbar gelten die folgenden Aussagen:

Die Reihen $(\mathfrak{A})$ *und* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ *haben dieselbe Länge* α.

Die Reihen $(\mathfrak{A})$ *und* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ *sind beide zugleich Reihen mit oder ohne Wiederholungen und haben dieselbe reduzierte Länge* α' $(\leqq \alpha)$.

Die zu einer Verfeinerung $(\mathring{\mathfrak{A}})$ *der Reihe* $(\mathfrak{A})$ *zugeordnete Reihe* $(\mathfrak{G}/_l\mathring{\mathfrak{A}})$ *stellt eine Verfeinerung* $(\mathfrak{G}/_l\mathring{\mathfrak{A}})$ *der Reihe* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ *dar.*

Die Einführung der zugeordneten Reihen von Nebenklassenzerlegungen bietet die Möglichkeit, die Theorie der Reihen von Untergruppen der Theorie der Reihen von Zerlegungen auf Mengen unterzuordnen. Man braucht nur die für diese letzteren definierten Begriffe und angestellten Überlegungen den Reihen von Untergruppen zuzuordnen. Dabei ist lediglich darauf zu achten, daß die auf diese Weise eingeführten Begriffe für Reihen von Untergruppen nicht etwa die Eigenschaften der zugeordneten Reihen von linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen bevorzugen, sondern stets eine Symmetrie in bezug auf die linksseitigen und die rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen aufweisen. Die Bedeutung dieser Bemerkungen wird in dem folgenden Aufbau dieser Theorie klar hervortreten.

3. *Lokalkettengebilde.* Wir betrachten eine Reihe von Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$

und die zugeordneten Reihen von linksseitigen und rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$,

$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha,$$
$$((\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha.$$

Zu jedem Element $\bar{a}$ von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha$ gehört eine lokale Kette der Reihe $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ bzw. $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$ mit der Basis $\bar{a}$. *Die von den zu den einzelnen Elementen von* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$ *bzw.* $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha$ *gehörigen lokalen Ketten gebildete Menge ist das zu der Reihe* $(\mathfrak{A})$ *gehörige linksseitige bzw. rechtsseitige Lokalkettengebilde* Λ_l *bzw.* Λ_r.

Zwischen den Lokalkettengebilden Λ_l, Λ_r bestehen gewisse Wechselbeziehungen, die wir nun beschreiben wollen.

Zunächst wollen wir daran erinnern, daß es zu jeder linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklasse $\bar{a}$ in bezug auf eine Untergruppe in $\mathfrak{G}$ stets die zu $\bar{a}$ inverse rechtsseitige (linksseitige) Nebenklasse $\bar{a}^{-1}$ in bezug auf diese Untergruppe gibt. Diese Nebenklasse $\bar{a}^{-1}$ wird von den inversen zu den in $\bar{a}$ enthaltenen Punkten gebildet (§ 20, Nr. 2, Satz 8).

Wir betrachten nun zwei zueinander inverse Nebenklassen $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha$, $\bar{a}^{-1} \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha$ und die zu den Basen $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ gehörigen lokalen Ketten der Reihen $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$:

$$([\bar{K}\bar{a}] =)\quad \bar{K}_1\bar{a} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a},$$
$$([\bar{K}\bar{a}^{-1}] =)\quad \bar{K}_1\bar{a}^{-1} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}^{-1}.$$

Wir haben hier zur Vereinfachung der Schreibweise für die lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ und ihre Glieder $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ dasselbe Symbol $\bar{K}$ angewendet, obwohl es sich um lokale Ketten bzw. Glieder von zwei in allgemeinen verschiedenen Reihen $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$ handelt. Diese Vereinfachung kann wohl zu keiner Unklarheit Anlaß geben, da sich die erwähnten Ketten bzw. Glieder durch verschiedene Bezeichnung der entsprechenden Basen $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ voneinander unterscheiden lassen. Von einer solchen vereinfachten Schreibweise wollen wir auch im folgenden Gebrauch machen.

Wir bezeichnen mit $\bar{a}_\gamma$ dasjenige Element der Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$, in dem $\bar{a}$ als Teilmenge enthalten ist ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$). Sodann ist die inverse Nebenklasse $\bar{a}_\gamma^{-1}$ dasjenige Element der Zerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\gamma$, in welchem $\bar{a}^{-1}$ als Teilmenge enthalten ist. Offenbar gelten die Beziehungen $\bar{a}_1 \supset \cdots \supset \bar{a}_\alpha (= \bar{a})$, $\bar{a}_1^{-1} \supset \cdots \supset \bar{a}_\alpha^{-1} (= \bar{a}^{-1})$ und

$$\bar{a}_\gamma = \bar{a}\mathfrak{A}_\gamma, \qquad \bar{K}_\gamma\bar{a} = \bar{a}_\gamma \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_{\gamma+1},$$
$$\bar{a}_\gamma^{-1} = \mathfrak{A}_\gamma\bar{a}^{-1}, \qquad \bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1} = \bar{a}_\gamma^{-1} \sqcap \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_{\gamma+1} \qquad (\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha).$$

Nach § 21, Nr. 8,5 wird jede der beiden Zerlegungen $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ durch die erweiterte Inversion $\boldsymbol{n}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die andere abgebildet, also $\boldsymbol{n}\bar{K}_\gamma\bar{a} = \bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$, $\boldsymbol{n}\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1} = \bar{K}_\gamma\bar{a}$. Wegen dieser Eigenschaft nennen wir je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$ von $[\bar{K}\bar{a}]$ bzw. $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ mit dem gleichen Index $\gamma (= 1, \ldots, \alpha)$ *zueinander invers* und wenden dieselbe Benennung auch auf die beiden lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ an. Je zwei zueinander inverse Glieder von $[\bar{K}\bar{a}]$ bzw. $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ sind äquivalente Mengen (§ 21, Nr. 8,5).

Wir wollen nun zeigen, daß *die beiden Lokalkettengebilde $\mathbb{A}_l$, $\mathbb{A}_r$ stark äquivalent sind.*

In der Tat, wenn wir jeder lokalen Kette $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathbb{A}_l$ die zu ihr inverse lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}^{-1}] \in \mathbb{A}_r$ zuordnen, so erhalten wir eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{f}$ von $\mathbb{A}_l$ auf $\mathbb{A}_r$, die wegen der zwischen je zwei inversen Gliedern von $[\bar{K}\bar{a}]$ bzw. $\boldsymbol{f}[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{a}^{-1}]$ bestehenden Äquivalenz eine starke Äquivalenz von $\mathbb{A}_l$ auf $\mathbb{A}_r$ darstellt.

4. *Paare von Reihen von Untergruppen.* Wir betrachten zwei Reihen von Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$((\mathfrak{A}) =)\quad \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$
$$((\mathfrak{B}) =)\quad \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1).$$

Zu diesen Reihen gehören die zugeordneten Reihen von linksseitigen Nebenklassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$,

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) =)\quad & \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\alpha, \\ ((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) =)\quad & \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

und die entsprechenden linksseitigen Lokalkettengebilde $\mathbb{A}_l$, $\mathbb{B}_l$.

Analog gehören zu den Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ die zugeordneten Reihen von rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}) =)\quad & \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\alpha , \\ ((\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}) =)\quad & \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}_\beta \end{aligned} \tag{2}$$

und die entsprechenden rechtsseitigen Lokalkettengebilde $\mathbb{A}_r$, $\mathbb{B}_r$.

Nun gilt zunächst der folgende Satz. *Wenn die Reihen* (1) *bzw.* (2) *in einer der folgenden vier Beziehungen zueinander stehen, so gilt dasselbe auch von den Reihen* (2) *bzw.* (1), *die stets die gleiche Wechselbeziehung aufweisen: Die Reihen* (1) *bzw.* (2) *sind* a) *komplementär*, b) *kettenäquivalent oder gleichbasig kettenäquivalent*, c) *halbverkettet oder gleichbasig halbverkettet*, d) *verkettet oder gleichbasig verkettet.*

Beweis. Wir nehmen an, daß z. B. die beiden Reihen (1) komplementär sind.

In diesem Fall ist jedes Glied $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\mu$ von $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ zu jedem Glied $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\nu$ von $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ komplementär (§ 10, Nr. 8), $\mu = 1, \ldots, \alpha$; $\nu = 1, \ldots, \beta$; folglich ist jedes Glied $\mathfrak{A}_\mu$ von $(\mathfrak{A})$ mit jedem Glied $\mathfrak{B}_\nu$ von $(\mathfrak{B})$ vertauschbar (§ 21, Nr. 6). Wir sehen, daß auch jedes Glied $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}_\mu$ von $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$ zu jedem Glied $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}_\nu$ von $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B})$ komplementär ist (§ 21, Nr. 6), so daß die beiden Reihen (2) komplementär sind.

Ferner nehmen wir an, daß z. B. die beiden Reihen (1) in einer der Beziehungen b), c), d) zueinander stehen. Sodann haben die Reihen (1), (2) und folglich auch die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ dieselbe Länge $\alpha = \beta$. Ferner gibt es in jedem der genannten Fälle eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{f}_l$ (starke Äquivalenz, Äquivalenz mit Halbverknüpfung, Äquivalenz mit Verknüpfung) von $\mathbb{A}_l$ auf $\mathbb{B}_l$, die unter Umständen gleichbasig sein kann. Mit Hilfe dieser Abbildung definieren wir eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{f}_r$ von $\mathbb{A}_r$ auf $\mathbb{B}_r$ so, daß wir für jedes Element $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathbb{A}_r$ die inverse lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}^{-1}] \in \mathbb{A}_l$ betrachten und dem Element $[\bar{K}\bar{a}]$ die zu der lokalen Kette $\boldsymbol{f}_l[\bar{K}\bar{a}^{-1}] = [\bar{K}\bar{b}] \in \mathbb{B}_l$ inverse lokale Kette $\boldsymbol{f}_r[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{b}^{-1}] \in \mathbb{B}_r$ zuordnen. Wenn die Abbildung $\boldsymbol{f}_l$ gleichbasig ist, so haben wir $\bar{b} = \bar{a}^{-1}$, also auch $\bar{b}^{-1} = \bar{a}$, und sehen, daß auch die Abbildung $\boldsymbol{f}_r$ gleichbasig ist.

Es seien nun $[\bar{K}\bar{a}]$, $\boldsymbol{f}_r[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{b}^{-1}]$ zwei in der Abbildung $\boldsymbol{f}_r$ einander zugeordnete Elemente von $\mathbb{A}_r$ bzw. $\mathbb{B}_r$. Wir betrachten die zu diesen Elementen inversen lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}^{-1}] \in \mathbb{A}_l$, $\boldsymbol{f}_l[\bar{K}\bar{a}^{-1}] = [\bar{K}\bar{b}] \in \mathbb{B}_l$:

$$\begin{aligned} ([\bar{K}\bar{a}^{-1}] =)\quad & \bar{K}_1\bar{a}^{-1} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}^{-1} , \\ ([\bar{K}\bar{b}] \ =)\quad & \bar{K}_1\bar{b} \ \ \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{b} . \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Existenz einer der Beziehungen b), c), d) gibt es eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ derart, daß die durch je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma\bar{a}^{-1}$, $\bar{K}_\delta\bar{b}$ der lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$, $[\bar{K}\bar{b}]$ dargestellten Zerlegungen miteinander äquivalent bzw. halbverknüpft oder verknüpft sind; dabei ist $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Wir lassen nun diese Permutation $\boldsymbol{p}$ auf die zu den lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}^{-1}]$, $[\bar{K}\bar{b}]$ inversen lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathbb{A}_r$, $\boldsymbol{f}_r[\bar{K}\bar{a}] = [\bar{K}\bar{b}^{-1}] \in \mathbb{B}_r$ einwirken, indem wir jedem Glied $\bar{K}_\gamma\bar{a}$ der ersten das Glied $\bar{K}_\delta\bar{b}^{-1}$ der zweiten zuordnen, wobei wiederum $\delta = p\gamma$ ist. Je zwei solche Glieder $\bar{K}_\gamma \bar{a}$, $\bar{K}_\delta \bar{b}^{-1}$ stellen die zu den miteinander äquivalenten bzw. halbverknüpften oder verknüpften Zerlegungen $\bar{K}_\gamma \bar{a}^{-1}$, $\bar{K}_\delta \bar{b}$ inversen Zerlegungen dar. Nach § 7, Nr. 3, 4 schließen wir, daß auch die Zerlegungen $\bar{K}_\gamma \bar{a}$, $\bar{K}_\delta \bar{b}^{-1}$ miteinander äquivalent bzw. halbverknüpft oder verknüpft sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Die in diesem Satz festgestellte Symmetrie der Äquivalenz bzw. Halbverknüpfung oder Verknüpfung in bezug auf die zu den Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ gehörigen Reihen von linksseitigen und rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B})$ gibt zu der folgenden Definition Anlaß:

Wir nennen die Reihen von Untergruppen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ a) *komplementär* (oder auch *miteinander vertauschbar*), b) *kettenäquivalent* bzw. *gleichbasig kettenäquivalent*, c) *halbverkettet* bzw. *gleichbasig halbverkettet*, d) *verkettet* bzw. *gleichbasig verkettet*, wenn die zu den Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ gehörigen Reihen von linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ und folglich (nach dem obigen Satz) auch diejenigen von rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B})$ die entsprechende Eigenschaft aufweisen.

5. *Komplementäre (miteinander vertauschbare) Reihen von Untergruppen.* Wir betrachten zwei komplementäre Reihen von Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$((\mathfrak{A}) =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$
$$((\mathfrak{B}) =) \quad \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1).$$

Zu diesen Reihen gehören die zugeordneten Reihen von linksseitigen und rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$: $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ bzw. $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B})$, die ausführlicher durch die Formeln (1) und (2) ausgedrückt werden können.

In diesem Fall gilt der folgende

Satz. *Die Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *besitzen gleichbasig verkettete Verfeinerungen* $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ *mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern. Diese Verfeinerungen sind durch die in Teil* a) *des folgenden Beweises beschriebene Konstruktion gegeben.*

Beweis. a) Nach Voraussetzung sind je zwei Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}_\delta$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha;\ \delta = 1, \ldots, \beta)$ zueinander komplementär, also je zwei Untergruppen $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{B}_\delta$ miteinander vertauschbar (§ 21, Nr. 6). Nach § 22, Nr. 2, Satz 1 sind auch die Untergruppen $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu$ bzw. $\mathfrak{B}_\delta$, $\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu$ $(\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G};$ $\mu = 1, \ldots, \alpha;\ \nu = 1, \ldots, \beta)$ miteinander vertauschbar, und es gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} =) \quad & \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{B}_\nu, \\ (\mathfrak{B}_{\delta,\mu} =) \quad & \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu) = \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\delta \mathfrak{A}_\mu. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{B}.$$

Dann gelten die Formeln (3) für $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$.

Aus der Definition von $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ schließen wir auf die Gültigkeit der Beziehungen

$$\mathfrak{A}_{\gamma-1} \supset \mathfrak{A}_{\gamma,\nu}, \quad \mathfrak{A}_{\gamma,\beta+1} = \mathfrak{A}_{\gamma},$$
$$\mathfrak{B}_{\delta-1} \supset \mathfrak{B}_{\delta,\mu}, \quad \mathfrak{B}_{\delta,\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\delta};$$

ferner ist für $\nu \leqq \beta$, $\mu \leqq \alpha$

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} \supset \mathfrak{B}_{\gamma,\nu+1}, \quad \mathfrak{B}_{\delta,\mu} \supset \mathfrak{B}_{\delta,\mu+1}.$$

Somit erhalten wir die folgenden Reihen von Untergruppen von $\mathfrak{A}_{\gamma,1}$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma}$ und von $\mathfrak{B}_{\delta,1}$ nach $\mathfrak{B}_{\delta}$:

$$\mathfrak{A}_{\gamma,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{\gamma,\beta+1},$$
$$\mathfrak{B}_{\delta,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{\delta,\alpha+1}.$$

Wir sehen also, daß die folgenden Reihen von Untergruppen in $\mathfrak{G}$ Verfeinerungen der Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ darstellen:

$$((\mathfrak{A}_*) =) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{A}_{1,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{1,\beta+1} \supset \mathfrak{A}_{2,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{2,\beta+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,1} \supset \cdots$$
$$\cdots \supset \mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathfrak{V},$$

$$((\mathfrak{B}_*) =) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{B}_{1,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{1,\alpha+1} \supset \mathfrak{B}_{2,1} \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{2,\alpha+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{\beta+1,1} \supset \cdots$$
$$\cdots \supset \mathfrak{B}_{\beta+1,\alpha+1} = \mathfrak{V}.$$

Offenbar haben die Reihen $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ dieselbe Länge $(\alpha + 1)(\beta + 1)$, und ihre Anfangs- bzw. Endglieder stimmen überein: $(\mathfrak{U} =) \mathfrak{A}_{1,1} = \mathfrak{B}_{1,1}$, $\mathfrak{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1,\alpha+1} (= \mathfrak{V})$. *Die Reihen* $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ *sind die erwähnten gleichbasig verketteten Verfeinerungen der Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

b) Wir haben zu zeigen, daß die den Reihen $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ zugeordneten Reihen $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_*)$ gleichbasig verkettet sind. Die Reihen $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_*)$ erhält man, indem jedes Glied $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$ der Reihe $(\mathfrak{A}_*)$ durch $\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$ und jedes Glied $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ der Reihe $(\mathfrak{B}_*)$ durch $\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ ersetzt wird.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\bar{A}_{\gamma} = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_{\gamma}, \quad \bar{B}_{\delta} = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_{\delta}, \quad \mathring{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_{\gamma,\nu}, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_{\delta,\mu}$$

ein und erhalten wegen (3) und wegen § 21, Nr. 4 und 5

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} = [\bar{A}_{\gamma}, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu})] = (\bar{A}_{\gamma-1}, [\bar{A}_{\gamma}, \bar{B}_{\nu}]),$$
$$\mathring{B}_{\delta,\mu} = [\bar{B}_{\delta}, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_{\mu})] = (\bar{B}_{\delta-1}, [\bar{B}_{\delta}, \bar{A}_{\mu}]).$$

Wir sehen, daß die den Reihen $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ zugeordneten Reihen $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_*)$ aus den komplementären Reihen $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B})$ durch die in § 10, Nr. 7 (Teil a) des entsprechenden Beweises) beschriebene Konstruktion entstehen. Folglich sind nach § 10, Nr. 8 die Reihen $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}_*)$ gleichbasig verkettet. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Übungsaufgaben.

1. Der Leser möge den allgemeinen Fünfgruppensatz mit Hilfe von Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{Z}$ (§ 18, Nr. 5, 1) realisieren.

2. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$ und $A \supset B$, $C \supset D$ ihre Felder. Wir setzen voraus, daß die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\bar{A} =) \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $(\bar{C} =) \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ in bezug auf B, D adjungiert sind. Es soll die in § 4, Nr. 2 beschriebene Konstruktion von verknüpften Überdeckungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ der Zerlegungen $\bar{A}_1 = C \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\bar{C}_1 = A \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ durchgeführt werden.

§ 24. Invariante Untergruppen (Normalteiler)

1. Definition. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wenn die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklasse jedes Punktes $a \in \mathfrak{A}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, wenn also $a\mathfrak{B} = \mathfrak{B}a$ gilt, so heißt $\mathfrak{B}$ *invariante* oder *normale Untergruppe in* $\mathfrak{A}$; man nennt $\mathfrak{B}$ auch *Normalteiler in* $\mathfrak{A}$. *In diesem Fall sind natürlich die beiden Nebenklassenzerlegungen* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/_r\mathfrak{B}$ *identisch, also* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/_r\mathfrak{B}$; man spricht einfach von der *Nebenklassenzerlegung der Gruppe* $\mathfrak{A}$ *in bezug auf die (invariante) Untergruppe* $\mathfrak{B}$.

Bei Betrachtungen über invariante Untergruppen, die in derselben Untergruppe $\mathfrak{A}$ liegen, können wir offenbar $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ annehmen.

2. Grundlegende Eigenschaften invarianter Untergruppen. In der Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es mindestens zwei (eventuell zusammenfallende) Untergruppen. die in $\mathfrak{G}$ invariant sind: die *größte* (mit $\mathfrak{G}$ identische) *Untergruppe* und die *kleinste* (aus dem einzigen Element $\underline{1}$ bestehende) *Untergruppe* $\{\underline{1}\}$. Diese stellen die *extremen invarianten Untergruppen in* $\mathfrak{G}$ dar. In der Gruppe $\mathfrak{G}$ kann es sehr wohl Untergruppen geben, die nicht in $\mathfrak{G}$ invariant sind; z. B. ist die aus den Permutationen $\underline{1}$, $\boldsymbol{f}$ (wir wenden dieselbe Bezeichnung wie in § 22, Nr. 1 an) bestehende Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_3$ in $\mathfrak{S}_3$ nicht invariant, wie z. B. aus $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}\boldsymbol{a}$ zu ersehen ist.

Es seien $(\mathfrak{G} \supset)\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Ist die Untergruppe $\mathfrak{B}$ invariant in $\mathfrak{G}$, so hat sie natürlich dieselbe Eigenschaft auch in $\mathfrak{A}$. Ist jedoch umgekehrt die Untergruppe $\mathfrak{B}$ invariant in $\mathfrak{A}$, so braucht sie keineswegs auch in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant zu sein, da die Beziehung $x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x$ wohl für alle Punkte x in $\mathfrak{A}$ erfüllt sein kann, nicht aber für alle Punkte in $\mathfrak{G}$ zu gelten braucht. Ist z. B. die Untergruppe $\mathfrak{A}$ nicht invariant in $\mathfrak{G}$, so ist sie zwar in $\mathfrak{A}$, nicht aber in $\mathfrak{G}$ invariant.

Ist die Untergruppe $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant, so ist sie mit jedem Komplex* $C \subset \mathfrak{G}$ *vertauschbar.* In der Tat, ist $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ invariant, so gilt $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$ für jeden Punkt $x \in \mathfrak{G}$, also auch für jeden Punkt $x \in C$. Daraus folgt $C\mathfrak{A} = \mathfrak{A}C$. Insbesondere sehen wir, daß *zwei Untergruppen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$, *von denen eine in* $\mathfrak{G}$ *invariant ist, stets miteinander vertauschbar sind.*