Beweis. Aus $x \in p\mathfrak{A}$ folgt $x = pa(a \in \mathfrak{A})$, und aus $x^{-1} = a^{-1}p^{-1}(a^{-1} \in \mathfrak{A})$ ergibt sich $x^{-1} \in \mathfrak{A}p^{-1}$. Es gilt also $\boldsymbol{n}(p\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}p^{-1}$. Außerdem ist jeder Punkt $y = a'p^{-1} \in \mathfrak{A}p^{-1}(a' \in \mathfrak{A})$ das $\boldsymbol{n}$-Bild von $pa'^{-1} \in p\mathfrak{A}(a'^{-1} \in \mathfrak{A})$; es gilt also $\mathfrak{A}p^{-1} \subset \boldsymbol{n}(p\mathfrak{A})$. Somit erhalten wir $\boldsymbol{n}(p\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}p^{-1}$.

Bemerkung. Man nennt jede der beiden Nebenklassen $p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}p^{-1}$ zu der anderen *invers* und spricht von *zueinander inversen Nebenklassen.* Wird eine von ihnen etwa mit $\bar{a}$ bezeichnet, so wendet man für die andere die Bezeichnung $\bar{a}^{-1}$ an.

Satz 9. *Die linksseitige Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ und die rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{A}q$ stellen jeweils äquivalente Mengen dar.*

Beweis. Nach Satz 8 und nach § 7, Nr. 3,4 sind die Mengen $p\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}p^{-1}$ miteinander äquivalent; nach dem zu Satz 5 analogen Satz für rechtsseitige Nebenklassen haben die Mengen $\mathfrak{A}p^{-1}$, $\mathfrak{A}q$ dieselbe Eigenschaft. Daraus folgt die Behauptung nach § 6, Nr. 10,7.

3. Übungsaufgaben.

1. In einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ stimmen die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklasse jedes Punktes $p \in \mathfrak{G}$ in bezug auf eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ überein, also $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$.

2. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beliebige Untergruppen und C ein Komplex in $\mathfrak{G}$. Es soll gezeigt werden: a) Die Summe aller mit C inzidenten linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{A}$ wird von dem Komplex $C\mathfrak{A}(\mathfrak{A}C)$ dargestellt; b) die Summe $\mathfrak{B}p\mathfrak{A}$ aller mit irgendeiner rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{B}p(p \in \mathfrak{G})$ inzidenten linksseitigen Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{A}$ stimmt mit der Summe aller mit der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ inzidenten rechtsseitigen Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{B}$ überein.

3. Es sei $p \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathring{\mathfrak{G}}$ die mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ assoziierte (p)-Gruppe (§ 19, Nr. 7, 9). Wir betrachten eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$. Es soll gezeigt werden: a) Die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklasse $p\mathfrak{A}(\mathfrak{A}p)$ des Elements p in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ stellt das Feld einer Untergruppe $\mathring{\mathfrak{A}}_l \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ $(\mathring{\mathfrak{A}}_r \subset \mathring{\mathfrak{G}})$ in $\mathring{\mathfrak{G}}$ dar; b) für jedes Element x in $\mathring{\mathfrak{G}}$ bzw. in $\mathfrak{G}$ stimmt die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklasse $x \circ \mathring{\mathfrak{A}}_l(\mathring{\mathfrak{A}}_r \circ x)$ mit der linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklasse $x\mathfrak{A}(\mathfrak{A}x)$ überein.

§ 21. Nebenklassenzerlegungen in Gruppen

Eine überaus wichtige Eigenschaft von Gruppen besteht darin, daß durch jede Untergruppe einer Gruppe gewisse Zerlegungen auf dieser Gruppe bestimmt werden.

1. Der Begriff der Nebenklassenzerlegung auf Gruppen. Wir betrachten die von allen linksseitigen Nebenklassen in bezug auf eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ gebildete Menge. Nach Satz 1 aus § 20, Nr. 2 ist jeder Punkt $p \in \mathfrak{G}$ in der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ enthalten, während diese natürlich ein Element der betrachteten Menge darstellt; nach Satz 4 aus § 20, Nr. 2 sind je zwei verschiedene Elemente der betrachteten Menge disjunkt. Wir sehen, daß *die von allen linksseitigen Nebenklassen in bezug auf die Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *gebildete Menge eine Zerlegung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *darstellt.* Diese Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nennen wir die *linksseitige Nebenklassenzerlegung* bzw. *Restklassenzerlegung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ oder die *linksseitige Klassenzerlegung von* $\mathfrak{G}$ und schreiben $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$.

Analog stellt man fest, daß *die von allen rechtsseitigen Nebenklassen in bezug auf die Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *gebildete Menge ebenfalls eine Zerlegung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *darstellt*; dies ist die sogenannte *rechtsseitige Nebenklassenzerlegung* bzw. *Restklassenzerlegung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf die Untergruppe* $\mathfrak{A}$ oder die *rechtsseitige Klassenzerlegung von* $\mathfrak{G}$, und wir schreiben $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$.

Zum Beispiel gelten die Formeln $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{G} = \mathfrak{G}/_r\mathfrak{G} = \bar{G}_{\max}$, $\mathfrak{G}/_l\{\underline{1}\} = \mathfrak{G}/_r\{\underline{1}\} = \bar{G}_{\min}$; $\bar{G}_{\max}$, $\bar{G}_{\min}$ bedeuten die größte bzw. die kleinste Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

In den folgenden Ausführungen dieses Paragraphen werden wir uns mit Eigenschaften der linksseitigen Klassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$ beschäftigen. Die Eigenschaften der rechtsseitigen Klassenzerlegungen sind wieder (§ 20, Nr. 2) durchaus analog, und wir überlassen es dem Leser, sich mit ihnen einzeln zu befassen. Zum Schluß dieses Paragraphen werden Wechselbeziehungen zwischen der linksseitigen und rechtsseitigen Klassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf dieselbe Untergruppe beschrieben.

2. Durchdringungen und Hüllen im Zusammenhang mit Nebenklassenzerlegungen.

1. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Durchdringung $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ und die Hülle $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Wegen $A \cap C \neq O$ sind diese Gebilde nicht leer. $A \supset B, C$ sind die Felder der erwähnten Untergruppen.

Es gilt die Formel

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}). \tag{1}$$

Wenn ferner die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ *miteinander vertauschbar sind, so gilt auch*

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}. \tag{2}$$

Beweis. a) Wir werden feststellen, daß jedes Element in der rechts (links) in (1) auftretenden Zerlegung auch in der links (rechts) auftretenden vorkommt. Jedes Element $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ hat die Form $\bar{a} = a(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = a\mathfrak{B} \cap a\mathfrak{C}$, wobei $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ ist. Aus $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ finden wir $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$; aus $a \in \mathfrak{C}$ folgt die Gleichheit $a\mathfrak{C} = C$. Somit ergeben sich die Beziehungen $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$. Es sei nun $\bar{a} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ ein beliebiges Element, also $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ $(\neq O)$, $a \in \mathfrak{A}$; ferner sei $x \in \bar{a}$ ein beliebiger Punkt. Wegen $x \in a\mathfrak{B}$ erhalten wir $a\mathfrak{B} = x\mathfrak{B}$, und wegen $x \in \mathfrak{C}$ gilt die Gleichheit $C = x\mathfrak{C}$, also $\bar{a} = x\mathfrak{B} \cap x\mathfrak{C} = x(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$. Da ferner aus $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ die Beziehung $a\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ folgt, haben wir $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, so daß $\bar{a} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ gilt. Damit ist die Formel (1) bewiesen.

b) Wir nehmen nun an, die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ seien miteinander vertauschbar. Diese Situation ist z. B. immer dann erfüllt, wenn die Untergruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ miteinander vertauschbar sind (§ 22, Nr. 2).

Den Beweis der Formel (2) wollen wir ähnlich wie im Fall a) führen. Jedes Element $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$ hat die Form $x\mathfrak{B}$ mit $x \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}$; wir sehen, daß x das Produkt ab aus einem Punkt $a \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ und einem Punkt $b \in \mathfrak{B}$ darstellt. Folglich bestehen die Gleichheiten $\bar{a} = (ab)\mathfrak{B} = a(b\mathfrak{B}) = a\mathfrak{B}$ (die letztere wegen der nach Satz 2 aus § 20, Nr. 2 geltenden Beziehung $b\mathfrak{B} = B$). Aus $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ folgt $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, und aus $a \in \mathfrak{C}$ sehen wir, daß $a\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}$ inzident ist. Somit ergibt sich die Beziehung $\bar{a} \in \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Es sei nun $\bar{a}$ ein beliebiges Element in $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, also $\bar{a} = a\mathfrak{B}$, wobei a einen Punkt in $\mathfrak{A}$ darstellt und $a\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}$ inzidiert; ferner sei $c \in \mathfrak{C} \cap a\mathfrak{B}$. Aus der Beziehung $c \in a\mathfrak{B}$ schließen wir nach den Sätzen 1 und 4 aus § 20, Nr. 2 auf das Bestehen der Gleichheit $\bar{a} = c\mathfrak{B}$, aus der (wegen $\bar{a} \subset \mathfrak{A}$) $c \in \mathfrak{A}$ folgt. Wir haben also $c \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ und folglich auch $c = c\,\underline{1} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}$. Aus dieser Beziehung und aus $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}$ erhalten wir $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}$, womit die Formel (2) bewiesen ist.

Wir wollen nun den Spezialfall anführen, in dem die Untergruppe $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{G}$ zusammenfällt. In diesem Fall gilt

$$\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) \tag{1'}$$

und ferner, falls die Untergruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ miteinander vertauschbar sind,

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}. \tag{2'}$$

2. Die obigen Erörterungen sollen nun dahin erweitert werden, daß statt der Durchdringung und der Hülle einer Untergruppe die einer linksseitigen Klassenzerlegung betrachtet werden.

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Durchdringung $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ und die Hülle $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$. Wegen $A \cap C \neq O$ sind diese Gebilde nicht leer. $A \supset B$, $C \supset D$ bedeuten die Felder der erwähnten Untergruppen.

Es gilt die Formel

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}). \tag{3}$$

Wenn ferner die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind, so gilt auch

$$\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}. \tag{4}$$

Beweis. a) Jedes Element $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$ hat die Form $\bar{a} = a(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}) = a\mathfrak{B} \cap a\mathfrak{D}$, wobei $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ ist. Aus $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ergibt sich $a\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$; und aus $a \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ folgt $a\mathfrak{D} \in \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$. Somit stellt $\bar{a}$ den (nicht leeren) Durchschnitt der Elemente $a\mathfrak{B}$ und $a\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ dar, so daß $\bar{a} \in \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ ist. Es sei nun $\bar{a} \in \mathfrak{A}_l/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ ein beliebiges Element, also $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap c\mathfrak{D} (\neq O)$, $a \in \mathfrak{A}$, $c \in \mathfrak{C}$; ferner sei $x \in \bar{a}$ ein beliebiger Punkt. Wegen $x \in a\mathfrak{B}$ haben wir $a\mathfrak{B} = x\mathfrak{B}$, und wegen $x \in c\mathfrak{D}$ gilt $c\mathfrak{D} = x\mathfrak{D}$, also $\bar{a} = a\mathfrak{B} \cap c\mathfrak{D} = x\mathfrak{B} \cap x\mathfrak{D} = x(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$. Da ferner aus $a \in \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ die Beziehungen $a\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $c\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ folgen, finden wir $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, so daß $\bar{a} \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\,(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$ gilt. Damit ist die Formel (3) bewiesen.

b) Die Formel (4) folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = s(\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \quad (\S\, 2,\, 3), \qquad s(\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) = C$$

und aus Formel (2) auf S. 143.

In dem speziellen Fall, in dem die Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{G}$ zusammenfallen, also die Klassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}\,(= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}), \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}\,(= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ bedecken, stimmt $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$ mit der größten gemeinsamen Verfeinerung $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$ der erwähnten Klassenzerlegungen überein (§ 3, Nr. 5), und *wir erhalten* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D})$.

3. Überdeckungen und Verfeinerungen von Nebenklassenzerlegungen. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wir wollen uns überlegen, wann die linksseitige Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B})$ eine Überdeckung (Verfeinerung) der linksseitigen Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A})$ darstellt, also $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ ist.

Wenn die Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ die Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ überdeckt, so stellt das Feld A von $\mathfrak{A}$ die Summe von einigen linksseitigen Nebenklassen in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ dar; unter diesen Nebenklassen befindet sich das Feld B von $\mathfrak{B}$, da A und B inzident sind ($\underline{1} \in A \cap B$), und es ergibt sich die Beziehung $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Wenn umgekehrt die Beziehung $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ besteht, so ist (§ 20, Nr. 2, 7) jede linksseitige Nebenklasse in bezug auf $\mathfrak{A}$ die Summe aller mit ihr inzidenten linksseitigen Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{B}$; wir sehen, daß in dieser Situation die linksseitige Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B})$ eine Überdeckung (Verfeinerung) der linksseitigen Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A})$ darstellt. Somit sind wir zu dem folgenden Resultat gekommen:

Die linksseitige Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B})$ überdeckt (verfeinert) die linksseitige Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A})$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine Obergruppe auf der Gruppe $\mathfrak{B}$ darstellt, d. h., die Beziehung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ gilt genau dann, wenn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ist.

4. Die größte gemeinsame Verfeinerung zweier Nebenklassenzerlegungen. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$.

Wir wollen zeigen, daß *die größte gemeinsame Verfeinerung der linksseitigen Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ durch die linksseitige Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ dargestellt wird, d. h., es gilt* $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Beweis. Die größte gemeinsame Verfeinerung der Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ besteht aus allen nicht leeren Durchschnitten je einer linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ mit einer solchen $q\mathfrak{B}$ (§ 3, Nr. 5). Jeder nicht leere Durchschnitt $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$ stellt die linksseitige Nebenklasse jedes in ihm enthaltenen Punktes in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ dar; jede linksseitige Nebenklasse $c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ ist der nicht leere Durchschnitt der beiden linksseitigen Nebenklassen $c\mathfrak{A}, c\mathfrak{B}$ (§ 20, Nr. 2, Satz 6). Damit ist der Satz bewiesen. (Vgl. auch dasselbe Ergebnis oben in Nr. 2.)

5. Die kleinste gemeinsame Überdeckung zweier Nebenklassenzerlegungen. Es seien nun $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ beliebige, *miteinander vertauschbare* Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Dann existiert das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der beiden Untergruppen und stellt eine Untergruppe in $\mathfrak{G}$ dar.

Wir werden zeigen, daß *die kleinste gemeinsame Überdeckung der linksseitigen Nebenklassenzerlegungen der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf die Untergruppen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *durch die linksseitige Nebenklassenzerlegung von* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf die Untergruppe* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ dargestellt wird, d. h., es gilt $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}] = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Beweis. Zunächst sehen wir im Hinblick auf die Beziehungen $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und den Satz aus Nr. 3, daß die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine gemeinsame Überdeckung der beiden Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ darstellt. Wir haben zu zeigen, daß sich zwei linksseitige Nebenklassen $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ mittels der Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ dann und nur dann verbinden lassen, wenn sie in derselben Klasse der Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthalten sind.

a) Wenn die linksseitigen Nebenklassen $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A}$ in derselben Klasse der Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthalten sind, gilt $p = cba$, wobei $b \in \mathfrak{B}$, $a \in \mathfrak{A}$ geeignete Punkte darstellen. Wir sehen, daß dann die beiden Klassen mit der Klasse $c\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ inzident sind und folglich mit Hilfe der Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ miteinander verbunden werden können.

b) Wenn eine Bindung $\{\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\}$ von $c\mathfrak{A}$ nach $p\mathfrak{A}$ existiert,

$$c_1\mathfrak{A}, \ldots, c_\alpha\mathfrak{A} \qquad (c_1 = c, \quad c_\alpha = p),$$

so sind je zwei benachbarte Klassen $c_\beta\mathfrak{A}, c_{\beta+1}\mathfrak{A}$ mit einer geeigneten Klasse $d_\beta\mathfrak{B}$ inzident, und folglich gibt es Punkte x_β, y_β, welche den Beziehungen $x_\beta \in c_\beta\mathfrak{A} \cap d_\beta\mathfrak{B}$, $y_\beta \in d_\beta\mathfrak{B} \cap c_{\beta+1}\mathfrak{A}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$ genügen. Die Punkte $x_\gamma, y_{\gamma-1}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha;\ y_0 = c_1, x_\alpha = c_\alpha)$ sind in der Klasse $c_\gamma\mathfrak{B}$, die Punkte x_β, y_β in der Klasse $d_\beta\mathfrak{B}$ enthalten. Daraus schließen wir auf das Bestehen der Formeln $x_\gamma = y_{\gamma-1}a_\gamma$, $y_\beta = x_\beta b_\beta$, in denen $a_\gamma \in \mathfrak{A}$, $b_\beta \in \mathfrak{B}$ geeignete Punkte bedeuten, und ferner auf die Gültigkeit der Beziehungen $c_\alpha = c_1 a_1 b_1 \cdots b_{\alpha-1} a_\alpha \in c_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Damit ist gezeigt, daß die linksseitigen Nebenklassen $c\mathfrak{A}, p\mathfrak{A}$ in derselben linksseitigen Nebenklasse $c\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthalten sind.

6. Komplementäre Nebenklassenzerlegungen. Wir betrachten beliebige Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ und wollen zeigen, daß *die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ *dann und nur dann komplementär sind, wenn die beiden Untergruppen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *miteinander vertauschbar sind.*

Beweis. a) Wir nehmen an, die Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ seien komplementär. Es sei $\bar{u}$ das die Einheit $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltende Element der kleinsten gemeinsamen Überdeckung von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$. Wegen $\underline{1} \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sind die Felder der Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Teilmengen von $\bar{u}$. Es seien $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ beliebige Punkte. Wir betrachten die linksseitigen Nebenklassen $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ und $a^{-1}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$. Sie sind mit $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}$ inzident und folglich in $\bar{u}$ enthalten, also $b\mathfrak{A}, a^{-1}\mathfrak{B} \subset \bar{u}$. Da nun die Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ komplementär sind, erhalten wir $b\mathfrak{A} \cap a^{-1}\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Es gibt Punkte $a' \in \mathfrak{A}$, $b' \in \mathfrak{B}$, für die $ba' = a^{-1}b'$ gilt. Daraus folgt $ab = b'a'^{-1} \in \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, und es ergibt sich $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Analog erhalten wir $\mathfrak{B}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

b) Nun nehmen wir an, die Untergruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien miteinander vertauschbar. Nach dem Satz aus Nr. 5 wird die kleinste Überdeckung von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ durch die Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ dargestellt. Es sei $c\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein beliebiges Element. Jedes in $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthaltene Element der Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ hat die Form $cb\mathfrak{A}$, wobei $b \in \mathfrak{B}$ einen geeigneten Punkt bedeutet; ähnlich hat jedes in $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthaltene Element von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ die Form $ca\mathfrak{B}$, wobei $a \in \mathfrak{A}$ ist. Wir haben zu zeigen, daß je zwei in $c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthaltene Nebenklassen $cb\mathfrak{A}$, $ca\mathfrak{B}$ inzident sind, so daß es Punkte $a' \in \mathfrak{A}$, $b' \in \mathfrak{B}$ gibt, die die Gleichung $ba' = ab'$ befriedigen. Dies ist jedoch leicht einzusehen: Da die Untergruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind, gibt es geeignete, der Gleichung $a^{-1}b = b'a'^{-1}$ genügende Punkte $a' \in \mathfrak{A}$, $b' \in \mathfrak{B}$; wir sehen, daß sie die erwähnte Gleichung befriedigen.

7. Beziehungen zwischen linksseitigen und rechtsseitigen Nebenklassenzerlegungen. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$.

Satz 1. *Die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklassenzerlegung* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$) *wird durch die erweiterte Inversion* $\boldsymbol{n}$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf die rechtsseitige (linksseitige) Nebenklassenzerlegung* $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$) *abgebildet, also* $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$, $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$. *Die beiden Nebenklassenzerlegungen* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ *stellen äquivalente Mengen dar:* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$.

Beweis. Nach § 7, Nr. 3, 4 ist die Menge $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ eine mit $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ äquivalente Zerlegung auf $\mathfrak{G}$, und nach Satz 8 aus § 20, Nr. 2 stellt jedes Element von $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$ ein Element von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ dar. Daraus folgt $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$. Analog erhält man $\boldsymbol{n}(\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$.

Satz 2. *Die kleinste gemeinsame Überdeckung der linksseitigen und der rechtsseitigen Nebenklassenzerlegung* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$ *ist die von den Komplexen* $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ($p \in \mathfrak{G}$) *gebildete Menge. Die beiden Nebenklassenzerlegungen* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$ *sind komplementär.*

Beweis. Jedem Punkt $p \in \mathfrak{G}$ ordnen wir den Komplex $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ zu und betrachten die von diesen Komplexen gebildete Menge $\bar{C}$. Zunächst sehen wir, daß jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ wenigstens in einem Element von $\bar{C}$ enthalten ist. Ferner wollen wir zeigen, daß je zwei verschiedene Elemente von $\bar{C}$ disjunkt sind. In der Tat, sind irgendwelche Elemente $\mathfrak{B}p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}q\mathfrak{A} \in \bar{C}$ inzident ($p, q \in \mathfrak{G}$), so gibt es Punkte $a, a' \in \mathfrak{A}$, $b, b' \in \mathfrak{B}$, für die $bpa = b'qa'$ gilt. Hieraus erhalten wir $(\mathfrak{B}b)p(a\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}b')q(a'\mathfrak{A})$ und folglich (nach § 20, Nr. 2, Satz 2, und dem analogen Satz für rechtsseitige Nebenklassen) $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} = \mathfrak{B}q\mathfrak{A}$, womit das Gewünschte gezeigt ist. Wir sehen, daß die Menge $\bar{C}$ eine Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ darstellt. Ferner ist (§ 20, Nr. 3, 2) jedes Element $\mathfrak{B}p\mathfrak{A} \in \bar{C}$ die Summe aller Elemente von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, die mit der rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{B}p$, und zugleich die Summe aller Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$, die mit der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ inzident sind. Folglich ist die Zerlegung $\bar{C}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine gemeinsame Überdeckung der beiden Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$. Es sei $\bar{u} = \mathfrak{B}p\mathfrak{A} \in \bar{C}$ ein beliebiges Element, und $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\bar{b} \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$ seien beliebige, in $\bar{u}$ enthaltene Nebenklassen. Sodann haben wir $\bar{a} = bp\mathfrak{A}, \bar{b} = \mathfrak{B}pa$, wobei $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ ist. Es gilt $bpa \in \bar{a} \cap \bar{b}$, und wir sehen, daß die beiden

Nebenklassen $\bar{a}, \bar{b}$ inzident sind. Folglich gilt $\bar{C} = [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}]$ nach § 5, Nr. 2, und die beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}$ sind komplementär. Damit ist der Satz bewiesen.

Insbesondere haben wir für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ das folgende Resultat:

Für jede Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ stellt die von den Komplexen $\mathfrak{A} p \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ($p \in \mathfrak{G}$) gebildete Menge die kleinste gemeinsame Überdeckung der linksseitigen und der rechtsseitigen Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ dar. Die beiden Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ sind komplementär.

8. Übungsaufgaben.

1. In einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ stimmen die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklassenzerlegung in bezug auf eine Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ überein, also $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$.

2. Die linksseitige (und zugleich die rechtsseitige) Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{Z}$ in bezug auf die von allen ganzzahligen Vielfachen einer natürlichen Zahl n gebildete Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{Z}$ ist die in § 15, Nr. 2 betrachtete Zerlegung $\bar{Z}_n$.

3. Man zeige an einem Beispiel, daß im allgemeinen die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklassenzerlegung einer Gruppe in bezug auf eine Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ nicht übereinzustimmen brauchen.

4. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wir betrachten beliebige linksseitige (rechtsseitige) Nebenklassen $\bar{a}_l$, $\bar{c}_l$ ($\bar{a}_r$, $\bar{c}_r$) in bezug auf $\mathfrak{A}$ und bezeichnen mit $\bar{A}_l$, $\bar{C}_l$ bzw. $\bar{A}_r$, $\bar{C}_r$ die Zerlegungen in $\mathfrak{G}$:

$$\bar{A}_l = \bar{a}_l \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \ (= \bar{a}_l \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}), \qquad \bar{C}_l = \bar{c}_l \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \ (= \bar{c}_l \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}).$$

$$\bar{A}_r = \bar{a}_r \sqcap \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B} \ (= \bar{a}_r \sqsubset \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}), \qquad \bar{C}_r = \bar{c}_r \sqcap \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B} \ (= \bar{c}_r \sqsubset \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}).$$

Jedes Element von $\bar{A}_l$ bzw. $\bar{C}_l$ stellt eine linksseitige und jedes Element von $\bar{A}_r$ bzw. $\bar{C}_r$ eine rechtsseitige Nebenklasse in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ dar. Ferner bestehen die Äquivalenzen $\bar{A}_l \simeq \bar{C}_l$, $\bar{A}_r \simeq \bar{C}_r$.

5. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wir betrachten zwei zueinander inverse Nebenklassen $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\bar{a}^{-1} \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ und die Zerlegungen auf $\bar{a}$ bzw. $\bar{a}^{-1}$:

$$\bar{A}_l = \bar{a} \sqcap \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \ (= \bar{a} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}), \qquad \bar{A}_r = \bar{a}^{-1} \sqcap \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B} \ (= \bar{a}^{-1} \sqsubset \mathfrak{G}/_r\mathfrak{B}).$$

Jede der beiden Zerlegungen $\bar{A}_l$, $\bar{A}_r$ wird durch die erweiterte Inversion $\mathfrak{n}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die andere abgebildet. Die Zerlegungen $\bar{A}_l$, $\bar{A}_r$ sind äquivalente Mengen, also $\bar{A}_l \simeq \bar{A}_r$.

6. Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen der Aufgabe 4 gilt die Äquivalenz $\bar{A}_l \simeq \bar{C}_r$.

7. Es sei $p \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathring{\mathfrak{G}}$ die mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ assoziierte (p)-Gruppe (§ 19, Nr. 7, 9), $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ eine beliebige Untergruppe in $\mathfrak{G}$ und $\mathring{\mathfrak{A}}_l \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_r \subset \mathring{\mathfrak{G}}$) die zum Feld $p\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}p$) gehörende Untergruppe in $\mathring{\mathfrak{G}}$ (§ 20, Nr. 3, 3). Man zeige, daß die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklassenzerlegung von $\mathring{\mathfrak{G}}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathring{\mathfrak{A}}_l$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_r$) mit der linksseitigen (rechtsseiten) Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, also

$$\mathring{\mathfrak{G}}/_l\mathring{\mathfrak{A}}_l = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \qquad \mathring{\mathfrak{G}}/_r\mathring{\mathfrak{A}}_r = \mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$$

ist.