§ 17. Reihen von Faktoroiden

In diesem Paragraphen werden wir eine Theorie der sogenannten Reihen von Faktoroiden entwickeln. Diese Theorie stützt sich auf die in § 10 entwickelte Theorie der Reihen von Zerlegungen auf Mengen und entsteht aus ihr durch Hinzufügung algebraischer, auf dem Multiplikationsbegriff beruhender Situationen. Wir werden sehen, daß in der zu entwickelnden Theorie insbesondere die mit dem Begriff der α-Gruppoidgebilde zusammenhängenden Begriffe eine natürliche und interessante Anwendung finden.

1. Grundbegriffe. Es seien $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ Faktoroide auf $\mathfrak{G}$. Unter einer *Reihe von Faktoroiden auf* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ oder *Reihe von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha (\geqq 1)$ Faktoroiden $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ auf $\mathfrak{G}$ mit den folgenden Eigenschaften: a) Das erste Faktoroid der Folge ist $\mathfrak{A}$, das letzte $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}$; b) jedes nachfolgende Faktoroid ist eine Verfeinerung des unmittelbar vorangehenden, also

$$(\mathfrak{A} =) \mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_\alpha (= \mathfrak{B}).$$

Eine solche Reihe wird kürzer mit $(\mathfrak{A})$ bezeichnet. Die Faktoroide $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ werden die *Glieder der Reihe* $(\mathfrak{A})$ genannt. $\mathfrak{A}_1$ ist das *Anfangsglied* und $\mathfrak{A}_\alpha$ das *Endglied der Reihe* $(\mathfrak{A})$. Unter der *Länge der Reihe* $(\mathfrak{A})$ verstehen wir die Anzahl α der Glieder in $(\mathfrak{A})$.

Zum Beispiel bildet ein Faktoroid $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{G}$ eine Reihe von der Länge 1; das Anfangs- und das Endglied dieser Reihe fällt mit $\mathfrak{A}$ zusammen.

Die Felder der einzelnen Glieder einer Reihe $(\mathfrak{A})$ von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$ bilden eine Reihe $(\bar{A})$ von (erzeugenden) Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$. Die für die Reihe $(\bar{A})$ definierten Begriffe und die entsprechenden Resultate können unmittelbar auf die Reihe $(\mathfrak{A})$ übertragen werden. So kann z. B. die Länge der Reihe $(\mathfrak{A})$ als diejenige der Reihe $(\bar{A})$ erklärt werden. Natürlich kommen für die Theorie der Reihen von Faktoroiden insbesondere solche Situationen in Betracht, die mit dem Multiplikationsbegriff zusammenhängen.

Von den Begriffen, die auf diese Weise in die zu entwickelnde Theorie eingehen und die wir an dieser Stelle wegen ihrer offenbaren Bedeutung explizit nicht erklären, wollen wir insbesondere die folgenden anführen: *wesentliche* und *unwesentliche Glieder der Reihe* $(\mathfrak{A})$, die *reduzierte Länge von* $(\mathfrak{A})$, *Verkürzungen* und *Verlängerungen der Reihe* $(\mathfrak{A})$, *Verfeinerungen von* $(\mathfrak{A})$. In den Betrachtungen zweier Reihen $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B})$ von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$ sind insbesondere die Begriffe von *modularen* und *komplementären Reihen* von Wichtigkeit.

2. Lokale Ketten. Den Ausgangspunkt für die weiteren Ausführungen bildet der Begriff einer lokalen Kette, der auch zu den aus der Theorie der Reihen von Zerlegungen stammenden Grundbegriffen gehört (§ 10, Nr. 2). Wir wollen jedoch diesen Begriff wegen seiner Wichtigkeit explizit anführen.

Es sei $((\mathfrak{A}) =) \mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{A}_\alpha$ eine Reihe von Faktoroiden auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ von der Länge $\alpha \geqq 1$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}_\alpha$ ein beliebiges Element und $\bar{a}_\gamma$ dasjenige Element im Faktoroid $\mathfrak{A}_\gamma$, das $\bar{a}$ als Teilmenge enthält ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$). Dann bestehen die Beziehungen

$$\bar{a}_1 \supset \cdots \supset \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_\alpha = \bar{a}).$$

Ferner ist die (mit der Hülle $\bar{a}_\gamma \sqsubset \mathfrak{A}_{\gamma+1}$ zusammenfallende) Durchdringung

$$\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \mathfrak{A}_{\gamma+1} \quad (\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha)$$

eine Zerlegung auf $\bar{a}_\gamma$. Sie stellt einen Komplex in $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ dar, und es gilt $\bar{a}_{\gamma+1} \in \bar{K}_\gamma$ ($\bar{a}_{\alpha+1} = \bar{a}_\alpha$).

Die Kette von Zerlegungen in $\mathfrak{G}$ von $\bar{a}_1$ nach $\bar{a}_{\alpha+1}$,

$$([\bar{K}] =) \; \bar{K}_1 \to \cdots \to \bar{K}_\alpha,$$

ist die *zu der Basis $\bar{a}$ gehörige lokale Kette der Reihe* ($\mathfrak{A}$) oder die *lokale Kette mit der Basis $\bar{a}$*. Wir bezeichnen sie wie oben oder ausführlicher mit ($[\bar{K}\bar{a}] =$) $\bar{K}_1\bar{a} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}$.

Im Zusammenhang mit der Multiplikation im Gruppoid $\mathfrak{G}$ kann der Fall eintreten, daß die Basis $\bar{a}$ und somit (§ 14, Nr. 5, 1) auch die anderen Elemente $\bar{a}_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$ ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$) gruppoidale Teilmengen in $\mathfrak{G}$ darstellen. In dieser Situation sind die Zerlegungen $\bar{K}_\gamma$ erzeugend (§ 14, Nr. 4, 1). Eine solche lokale Kette wollen wir *gruppoidal* nennen. Die zu den einzelnen erzeugenden Zerlegungen $\bar{K}_\gamma$ gehörigen Faktoroide $\mathfrak{K}_\gamma$ in $\mathfrak{G}$ bilden eine Folge von Faktoroiden, die *zu der Basis $\bar{a}$ gehörige lokale Kette von Faktoroiden der Reihe* ($\mathfrak{A}$) oder die *lokale Faktoroidkette mit der Basis $\bar{a}$*. Wir bezeichnen sie mit $[\mathfrak{K}]$ oder $[\mathfrak{K}\bar{a}]$.

3. Lokalkettengruppoid. Wir betrachten eine Reihe von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$:

$$((\mathfrak{A}) =) \; \mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_\alpha \qquad (\alpha \geqq 1).$$

Zu jedem Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}_\alpha$ gehört eine lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}]$ der Reihe ($\mathfrak{A}$) mit der Basis $\bar{a}$.

Die von den zu den einzelnen Elementen von $\mathfrak{A}_\alpha$ gehörigen lokalen Ketten gebildete Menge ist das zu der Reihe ($\mathfrak{A}$) gehörige *Lokalkettengebilde* $\mathbb{A}$. Es ist ein α-Mengengebilde bezüglich der Faktoroidfolge $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha+1}$.

Wir wollen nun in dem Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$ auf folgende Weise eine Multiplikation definieren: Für je zwei Elemente $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{b}] \in \mathbb{A}$ ist das Produkt $[\bar{K}\bar{a}][\bar{K}\bar{b}]$ durch

$$[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}]$$

erklärt.

Das Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$ bildet zusammen mit dieser Multiplikation ein Gruppoid $\mathbf{\mathfrak{A}}$, das wir das zu der Reihe ($\mathfrak{A}$) gehörige *Lokalkettengruppoid* nennen.

Wir wollen zunächst zeigen, daß *das Gruppoid $\mathbf{\mathfrak{A}}$ ein α-Gruppoidgebilde bezüglich der Faktoroidfolge $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha+1}$ ($\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha$) darstellt.*

Beweis. Jedes Element von $\mathbf{\mathfrak{A}}$ ist eine α-gliedrige Folge, von der jedes Glied von beliebigem Rang γ ($= 1, \ldots, \alpha$) eine Zerlegung im Gruppoid $\mathfrak{G}$, und zwar einen Komplex im Faktoroid $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$, darstellt. Ferner ist die Multiplikation in $\mathbf{\mathfrak{A}}$ so beschaffen, daß für je zwei Elemente

$$[\bar{K}\bar{a}] = \bar{K}_1\bar{a} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}, \; [\bar{K}\bar{b}] = \bar{K}_1\bar{b} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{b} \in \mathbf{\mathfrak{A}}$$

und deren Produkt

$$[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}] = \bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{b} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha \bar{a} \circ \bar{b} \in \mathfrak{A}$$

die Beziehungen

$$\bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{K}_1\bar{b} \subset \bar{K}_1\bar{a} \circ \bar{b}, \ldots, \bar{K}_\alpha\bar{a} \circ \bar{K}_\alpha\bar{b} \subset \bar{K}_\alpha\bar{a} \circ \bar{b}$$

bestehen (§ 15, Nr. 4,2).

Wenn wir jedem Punkt $a \in \mathfrak{G}$ die lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathfrak{A}$ mit der den Punkt a enthaltenden Basis $\bar{a} = \bar{a}_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha\,(a \in \bar{a})$ zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$ auf das Lokalkettengruppoid $\mathfrak{A}$, die offenbar eine Deformation darstellt. Dies ist die *natürliche Deformation des Gruppoids* $\mathfrak{G}$ *auf das Lokalkettengruppoid* $\mathfrak{A}$. Das zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Faktoroid auf $\mathfrak{G}$ fällt mit dem Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ zusammen. Unter *der zu dem Punkt a gehörigen lokalen Kette der Reihe* $(\overline{\mathfrak{A}})$ verstehen wir die lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}]$.

Es seien nun

$$((\overline{\mathfrak{A}}) =)\ \overline{\mathfrak{A}}_1 \geqq \cdots \geqq \overline{\mathfrak{A}}_\alpha,$$
$$((\overline{\mathfrak{B}}) =)\ \overline{\mathfrak{B}}_1 \geqq \cdots \geqq \overline{\mathfrak{B}}_\beta$$

beliebige Reihen von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$ mit der besonderen Eigenschaft, daß ihre Endglieder $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\beta$ übereinstimmen: $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha = \overline{\mathfrak{B}}_\beta$. Wir betrachten die zu den Reihen $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ gehörigen Lokalkettengruppoide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Wenn wir jedem Element $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathfrak{A}$ das zu derselben Basis $\bar{a}$ gehörige Element $[\bar{L}\bar{a}] \in \mathfrak{B}$ zuordnen, so erhalten wir eine schlichte Abbildung des Lokalkettengruppoids $\mathfrak{A}$ auf das Lokalkettengruppoid $\mathfrak{B}$, die offenbar einen Isomorphismus darstellt. Diesen Isomorphismus nennen wir *gleichbasig*.

Wir sehen, daß *die zu zwei Reihen von Faktoroiden mit übereinstimmenden Endgliedern gehörigen Lokalkettengruppoide isomorph sind, wobei eine isomorphe Abbildung durch den gleichbasigen Isomorphismus realisiert wird.*

4. Kettenisomorphe Reihen von Faktoroiden. Es seien

$$((\overline{\mathfrak{A}}) =)\ \overline{\mathfrak{A}}_1 \geqq \cdots \geqq \overline{\mathfrak{A}}_\alpha,$$
$$((\overline{\mathfrak{B}}) =)\ \overline{\mathfrak{B}}_1 \geqq \cdots \geqq \overline{\mathfrak{B}}_\alpha$$

beliebige Reihen von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$ von derselben Länge $\alpha\ (\geqq 1)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die zu den Reihen $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ gehörigen *Lokalkettengruppoide.*

Wir nennen die Reihe $(\overline{\mathfrak{B}})$ *kettenisomorph zur Reihe* $(\overline{\mathfrak{A}})$, wenn das Lokalkettengruppoid $\mathfrak{B}$ zu dem Lokalkettengruppoid $\mathfrak{A}$ stark isomorph ist.

Ist die Reihe $(\overline{\mathfrak{B}})$ kettenisomorph zur Reihe $(\overline{\mathfrak{A}})$, so ist auch die Reihe $(\overline{\mathfrak{A}})$ kettenisomorph zu $(\overline{\mathfrak{B}})$ (§ 16, Nr. 3,1). Mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *kettenisomorphen Reihen* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Nach der obigen Definition ist die Reihe $(\overline{\mathfrak{B}})$ kettenisomorph zur Reihe $(\overline{\mathfrak{A}})$, wenn es einen starken Isomorphismus des Lokalkettengruppoids $\mathfrak{A}$ auf das Lokalkettengruppoid $\mathfrak{B}$ gibt (§ 16, Nr. 3,2). Wenn insbesondere die Endglieder $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ der Reihen $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ übereinstimmen und die gleichbasige Abbildung des Lokalkettengruppoids $\mathfrak{A}$ auf das Lokalkettengruppoid $\mathfrak{B}$ einen starken Isomorphismus darstellt, so nennen wir die Reihe $(\overline{\mathfrak{B}})$ *gleichbasig kettenisomorph* zur Reihe $(\overline{\mathfrak{A}})$ und sprechen von *gleichbasig kettenisomorphen Reihen* $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Wir nehmen nun an, *die Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *seien kettenisomorph.* Diese Situation kann kurz so beschrieben werden:

Es gibt eine isomorphe Abbildung $\boldsymbol{i}$ des Lokalkettengruppoids $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{B}}$. Ferner gibt es eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ folgender Art: Durch die Permutation $\boldsymbol{p}$ wird für die Glieder von je zwei bei dem Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ einander zugeordneten lokalen Ketten $[\bar{K}]$, $\boldsymbol{i}[\bar{K}]$ eine schlichte Abbildung derart bestimmt, daß dem Glied $\bar{K}_\gamma$ der lokalen Kette $[\bar{K}]$ von beliebigem Rang γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ das Glied $\bar{L}_\delta$ der lokalen Kette $\boldsymbol{i}[\bar{K}]$ vom Rang $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ zugeordnet wird. Zu dem Glied $\bar{K}_\gamma$ gehört eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$, die das Glied $\bar{K}_\gamma$ auf das Glied $\bar{L}_\delta$ elementweise abbildet. Die zu den Gliedern $\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\bar{K}_\gamma\bar{b}$ von zwei beliebigen lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{b}]$ und zu dem Glied $\bar{K}_\gamma\bar{a}\circ\bar{b}$ des Produkts $[\bar{K}\bar{a}]\,[\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a}\circ\bar{b}]$ gehörigen schlichten Abbildungen $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\gamma$, $\boldsymbol{c}_\gamma$ verhalten sich homomorph, d.h., für beliebige Elemente $a \in \bar{K}_\gamma\bar{a}$, $b \in \bar{K}_\gamma\bar{b}$ gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{c}_\gamma(a \circ b) = (\boldsymbol{a}_\gamma a) \circ (\boldsymbol{b}_\gamma b).$$

Offenbar sind die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ kettenäquivalent. Folglich kommen die in § 10,5 für kettenäquivalente Reihen von Zerlegungen angestellten Überlegungen zur Geltung. Insbesondere sehen wir, daß *die Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *dieselbe reduzierte Länge besitzen.*

5. Halbverkettete und verkettete Reihen von Faktoroiden. Eine zu der oben für kettenisomorphe Reihen von Faktoroiden angestellten analoge Begriffsbildung führt auf die Begriffe von halbverketteten bzw. verketteten Reihen von Faktoroiden.

Wir wenden die obigen Bezeichnungen an.

Wir nennen die Reihe $(\mathfrak{B})$ *halbverkettet* (*verkettet*) mit der Reihe $(\mathfrak{A})$, wenn das Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{B}}$ mit dem Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{A}}$ isomorph und halbverknüpft (isomorph und verknüpft) ist.

Ist die Reihe $(\mathfrak{B})$ halbverkettet (verkettet) mit der Reihe $(\mathfrak{A})$, so hat auch $(\mathfrak{A})$ dieselbe Eigenschaft in bezug auf $(\mathfrak{B})$. Mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *halbverketteten* (*verketteten*) *Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

Nach der obigen Definition ist die Reihe $(\mathfrak{B})$ halbverkettet (verkettet) mit der Reihe $(\mathfrak{A})$, wenn es einen Isomorphismus mit Halbverknüpfung (Isomorphismus mit Verknüpfung) des Lokalkettengruppoids $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{B}}$ gibt (§ 16, Nr. 3, 2). Wenn insbesondere die Endglieder $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ der Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ zusammenfallen und die gleichbasige Abbildung des Lokalkettengruppoids $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{B}}$ einen Isomorphismus mit Halbverknüpfung (Isomorphismus mit Verknüpfung) darstellt, so nennen wir die Reihe $(\mathfrak{B})$ *gleichbasig halbverkettet* (*gleichbasig verkettet*) mit der Reihe $(\mathfrak{A})$ und sprechen von *gleichbasig halbverketteten* (*gleichbasig verketteten*) *Reihen* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

Wir nehmen nun an, die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ seien halbverkettet. Dieser Fall kann kurz so beschrieben werden:

Es gibt eine isomorphe Abbildung $\boldsymbol{i}$ des Lokalkettengruppoids $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das Lokalkettengruppoid $\bar{\mathfrak{B}}$. Ferner gibt es eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ folgender Art: Durch die Permutation $\boldsymbol{p}$ wird für die Glieder von je zwei bei dem Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ einander zugeordneten lokalen Ketten $[\bar{K}] \in \mathbf{\mathfrak{A}}$, $\boldsymbol{i}[\bar{K}] \in \mathbf{\mathfrak{B}}$ eine schlichte Abbildung derart bestimmt, daß dem Glied $\bar{K}_\gamma$ der lokalen Kette $[\bar{K}]$ von beliebigem Rang γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ das Glied $\bar{L}_\delta$ der lokalen Kette $\boldsymbol{i}[\bar{K}]$ vom Rang $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ zugeordnet wird. Zu der Hülle $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma = \bar{L}_\delta \sqsubset \bar{K}_\gamma$ gehört eine mit Hilfe der Inzidenz von Elementen definierte schlichte Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$, die die Hülle $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma$ auf die Hülle $\mathrm{H}\bar{L}_\delta = \bar{K}_\gamma \sqsubset \bar{L}_\delta$ elementweise abbildet. Sind $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{K}\bar{b}] \in \mathbf{\mathfrak{A}}$ beliebige lokale Ketten und $[\bar{K}\bar{a}][\bar{K}\bar{b}] = [\bar{K}\bar{a} \circ \bar{b}] \in \mathbf{\mathfrak{A}}$ das entsprechende Produkt, so verhalten sich die zu den Hüllen $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{b}$, $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a}\circ\bar{b}$ gehörigen schlichten Abbildungen $\boldsymbol{a}_\gamma, \boldsymbol{b}_\gamma, \boldsymbol{c}_\gamma$ homomorph, d. h., für beliebige Elemente $a \in \mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{a}$, $b \in \mathrm{H}\bar{K}_\gamma\bar{b}$ gilt die Beziehung $\boldsymbol{c}_\gamma(a \circ b) = (\boldsymbol{a}_\gamma a) \circ (\boldsymbol{b}_\gamma b)$.

Sind insbesondere die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ verkettet, so sind sie auch kettenisomorph und haben folglich dieselbe reduzierte Länge (§ 17, Nr. 4).

6. Modulare und komplementäre Reihen von Faktoroiden. Es seien

$$((\mathfrak{A}) =)\ \mathfrak{A}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_\alpha,$$
$$((\mathfrak{B}) =)\ \mathfrak{B}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{B}_\beta$$

modulare Reihen von Faktoroiden auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ von den Längen $\alpha, \beta\ (\geqq 1)$.

Es gilt der folgende

Satz. *Die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ besitzen gleichbasig halbverkettete Verfeinerungen $(\mathring{\mathfrak{A}})$, $(\mathring{\mathfrak{B}})$ mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern. Setzt man*

$$[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1] = \bar{\mathfrak{U}}, \quad (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta) = \bar{\mathfrak{V}},$$
$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}_{\max}, \ \mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \bar{\mathfrak{V}}$$

und ferner für $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$ *und* $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$

$$\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\nu} = [\mathfrak{A}_\gamma, (\mathfrak{A}_{\gamma-1}, \mathfrak{B}_\nu)] = (\mathfrak{A}_{\gamma-1}, [\mathfrak{A}_\gamma, \mathfrak{B}_\nu]),$$
$$\mathring{\mathfrak{B}}_{\delta,\mu} = [\mathfrak{B}_\delta, (\mathfrak{B}_{\delta-1}, \mathfrak{A}_\mu)] = (\mathfrak{B}_{\delta-1}, [\mathfrak{B}_\delta, \mathfrak{A}_\mu]),$$

so sind die erwähnten gleichbasig halbverketteten Verfeinerungen der Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ die folgenden:

$$((\mathring{\mathfrak{A}}) =)\ \bar{\mathfrak{U}} = \mathring{\mathfrak{A}}_{1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{2,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{2,\beta+1} \geqq \cdots$$
$$\cdots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha+1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha+1,\beta+1} = \bar{\mathfrak{V}},$$
$$((\mathring{\mathfrak{B}}) =)\ \bar{\mathfrak{U}} = \mathring{\mathfrak{B}}_{1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{2,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{2,\alpha+1} \geqq \cdots$$
$$\cdots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{\beta+1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{\mathfrak{B}}_{\beta+1,\alpha+1} = \bar{\mathfrak{V}}.$$

Sind die Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ komplementär, so sind die beiden Verfeinerungen $(\mathring{\mathfrak{A}})$, $(\mathring{\mathfrak{B}})$ gleichbasig verkettet.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus den in § 10, Nr. 7 und 8 angestellten Betrachtungen über modulare und komplementäre Reihen von Zerlegungen auf der Menge G.

7. Übungsaufgaben.

1. In einem Gruppoid $\mathfrak{G}$, in dem je zwei auf ihm liegende Faktoroide komplementär sind, besitzen beliebige Reihen von Faktoroiden auf $\mathfrak{G}$, $(\overline{\mathfrak{A}})$, $(\overline{\mathfrak{B}})$ gleichbasig verkettete Verfeinerungen.

§ 18. Spezielle Gruppoide

Einige ausgezeichnete Arten von Gruppoiden, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, sind durch besondere Eigenschaften der Multiplikation gekennzeichnet, und ihre Untersuchung knüpft unmittelbar an die in § 11, Nr. 2 angestellten Überlegungen an. Wir wollen uns jedoch mit speziellen Gruppoiden erst an dieser Stelle beschäftigen, um der Tatsache Ausdruck zu verleihen, daß die vorangehenden Erörterungen für die allgemeinsten Gruppoide, ohne Bezug auf irgendwelche besonderen Eigenschaften dieser Gruppoide, ihre Gültigkeit behalten. Für unsere weiteren Ausführungen sind insbesondere die *assoziativen Gruppoide* (*Halbgruppen*), ferner die *Divisionsgruppoide mit eindeutiger Division* (*Quasigruppen*) und *Gruppoide mit Einselement* von besonderer Wichtigkeit. Wegen ihrer Bedeutung in verschiedenen Zweigen der Algebra wollen wir auch die *Brandtschen Gruppoide* kurz besprechen, obwohl diese in gewissem Sinn die Grenzen unserer Begriffsbildung überschreiten.

1. Assoziative Gruppoide (Halbgruppen). 1. *Definition.* Den Begriff eines assoziativen Gruppoids haben wir bereits in § 12, Nr. 7,2 erklärt, und zwar so, daß jede dreigliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$ genau ein Produktelement besitzt. Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ heißt also *assoziativ*, wenn für je drei Elemente $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ die Gleichheit $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$ besteht. Assoziative Gruppoide werden auch *Halbgruppen* genannt.

2. *Der Hauptsatz über assoziative Gruppoide.* Wir wollen zunächst den *Hauptsatz über assoziative Gruppoide* herleiten:

In einem assoziativen Gruppoid $\mathfrak{G}$ besitzt jede n-gliedrige Folge von Elementen genau ein Produktelement ($n \geqq 2$). Für beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ stellt also das Symbol $a_1 \ldots a_n$ genau ein Element in $\mathfrak{G}$ dar.

Zum Beweis betrachten wir ein assoziatives Gruppoid $\mathfrak{G}$ und wenden die vollständige Induktion an.

Unsere Behauptung trifft natürlich für $n = 2$ zu, wie aus dem Multiplikationsbegriff unmittelbar hervorgeht. Wir haben also folgendes zu zeigen: Ist $n > 2$ und trifft die Behauptung für jede höchstens $(n-1)$-gliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$ zu, so behält sie ihre Gültigkeit auch für jede n-gliedrige Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$.