Deformation $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$. Das Bild eines assoziativen Gruppoids ist bei jeder Deformation wieder assoziativ.

3. Wenn das assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ ein Zentrum besitzt, so liegt das Bild des Zentrums bezüglich jeder Deformation von $\mathfrak{G}$ in dem Zentrum des Bildes von $\mathfrak{G}$.

4. Das Urbild eines gruppoidalen Komplexes in $\mathfrak{G}^*$ bezüglich einer Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ braucht nicht gruppoidal zu sein.

5. Eine meromorphe Abbildung auf einem endlichen Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist ein Automorphismus auf $\mathfrak{G}$.

6. Über den Isomorphismus von Gruppoiden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gelten folgende Aussagen: a) $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ (Reflexivität); b) aus $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$ (Symmetrie); c) aus $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$ (Transitivität).

7. Der Leser möge selbst Beispiele von Deformationen angeben.

§ 14. Erzeugende Zerlegungen

1. Grundbegriffe. Wir betrachten ein beliebiges Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Definition. Eine Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ nennen wir *erzeugende Zerlegung in* $\mathfrak{G}$, wenn es zu jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $\bar{a}, \bar{b}$ in $\bar{A}$ ein Element $\bar{c} \in \bar{A}$ gibt, für das die Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ gilt.

Als Beispiel von erzeugenden Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$ führen wir die beiden extremen Zerlegungen $\bar{G}_{\max}$, $\bar{G}_{\min}$ von $\mathfrak{G}$ an, die offenbar tatsächlich erzeugend sind. Auf jedem Gruppoid sind also wenigstens die beiden extremen erzeugenden Zerlegungen vorhanden.

In der Gruppoidtheorie werden gewöhnlich die zu erzeugenden Zerlegungen gehörigen Äquivalenzen schlechthin als *Kongruenzen* bezeichnet.

2. Deformationszerlegung. Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ beliebige Gruppoide.

Wir nehmen an, daß es eine Deformation $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ gibt. Die Deformation $\boldsymbol{d}$ bestimmt als Abbildung der Menge G auf G^* die zu $\boldsymbol{d}$ gehörige Zerlegung $\bar{D}$ von $\mathfrak{G}$, wobei jedes Element $\bar{a} \in \bar{D}$ die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern je eines Punktes $a^* \in \mathfrak{G}^*$ gebildete Menge darstellt. Wir nennen diese Zerlegung die *Deformationszerlegung in bezug auf* $\boldsymbol{d}$ oder die *zu der Deformation* $\boldsymbol{d}$ *gehörige Zerlegung*. Da sich nun bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ die Multiplikationen in den beiden Gruppoiden gleichzeitig ausführen lassen, wird man wohl erwarten können, daß es gewisse Beziehungen zwischen der Deformationszerlegung $\bar{D}$ und der Multiplikation in $\mathfrak{G}$ geben wird. Um diese Beziehungen zu finden, wollen wir beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{D}$ betrachten. Nach der Definition von $\bar{D}$ gibt es in $\mathfrak{G}^*$ Punkte $a^*, b^* \in \mathfrak{G}^*$ derart, daß das Element $\bar{a}$ ($\bar{b}$) die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Punktes a^* (b^*) gebildete Menge darstellt. Wir betrachten nun das Produkt $\bar{a}\bar{b}$ des Komplexes $\bar{a}$ mit dem Komplex $\bar{b}$. Jeder Punkt $c \in \bar{a}\bar{b}$ wird durch das Produkt $c = ab$ mit geeigneten Faktoren $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ dargestellt, und aus den Beziehungen $\boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b = a^*b^*$ geht hervor, daß der Punkt c ein $\boldsymbol{d}$-Urbild von a^*b^* darstellt. Der Punkt c ist also in dem von den $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Punktes a^*b^* gebildeten Element $\bar{c} \in \bar{D}$ enthalten. Es gilt also die Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, und wir sehen, daß die Zerlegung $\bar{D}$ erzeugend ist. Somit haben wir gefunden, daß die *zu einer Deformation von* $\mathfrak{G}$ *gehörige Zerlegung stets eine erzeugende Zerlegung ist.*

3. Erzeugende Zerlegungen in Gruppoiden. Wir wollen uns nun mit den Eigenschaften von erzeugenden Zerlegungen in Gruppoiden beschäftigen.

1. *Die Summe von Elementen einer erzeugenden Zerlegung.* Es sei $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung in $\mathfrak{G}$. Wir wollen zeigen, daß *der Komplex* $\mathbf{s}\bar{A} \subset \mathfrak{G}$, *also die von allen in den Elementen von* $\bar{A}$ *vorkommenden Punkten gebildete Menge, gruppoidal ist.* Zu beliebigen Punkten $a, b \in \mathbf{s}\bar{A}$ gibt es nämlich Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$, für welche $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ gilt; daraus folgt die Beziehung $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathbf{s}\bar{A}$ und ferner $ab \in \mathbf{s}\bar{A}$, womit das Gewünschte bewiesen ist. — Das zugehörige Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ wird mit $\mathbf{s}\mathfrak{A}$ bezeichnet. Es ist klar, daß $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung auf dem Untergruppoid $\mathbf{s}\mathfrak{A}$ darstellt.

2. *Hüllen und Durchdringungen.* Es sei B ein gruppoidaler Komplex, und $\bar{A}, \bar{C}$ seien erzeugende Zerlegungen in $\mathfrak{G}$.

Für $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ *stellt die Hülle* $B \sqsubset \bar{C}$ *sowie die Durchdringung* $B \sqcap \bar{C}$ *eine erzeugende Zerlegung in* $\mathfrak{G}$ *dar.* Allgemeiner gilt der Satz, daß *im Fall* $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ *die Hülle* $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ *sowie die Durchdringung* $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ *eine erzeugende Zerlegung in* $\mathfrak{G}$ *darstellt.*

Beweis. Die von dem einzigen Element B gebildete Zerlegung $\bar{B}_{\max}$ in $\mathfrak{G}$ ist offenbar erzeugend. Wenn $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ gilt, so ist $\mathbf{s}\bar{B}_{\max} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ und ferner $B \sqsubset \bar{C} = \bar{B}_{\max} \sqsubset \bar{C}$, $B \sqcap \bar{C} = \bar{B}_{\max} \sqcap \bar{C}$. Daraus schließen wir, daß der zweite Teil unseres Satzes tatsächlich eine Verallgemeinerung des ersten Teils darstellt. Es genügt also, nur diesen zweiten Teil zu beweisen.

a) Wegen $\bar{A} \sqsubset \bar{C} = \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ brauchen wir nur zu zeigen, daß $\mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ erzeugend ist. Es seien $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ beliebige Elemente. Da $\bar{C}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $\bar{c} \in \bar{C}$ für das $\bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{c}$ gilt. Wir wählen ein $x \in \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_1$ und ein $y \in \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_2$. Es ist somit $xy \in \mathbf{s}\bar{A} \cdot \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c}$, woraus $\mathbf{s}\bar{A} \cap \bar{c} \neq \emptyset$ folgt. Wir haben also $\bar{c} \in \mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}$.

b) Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap \bar{C}$. Nach der Definition von $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ gibt es Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$, $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \bar{C}$, für welche $\bar{x} = \bar{a}_1 \cap \bar{c}_1$, $\bar{y} = \bar{a}_2 \cap \bar{c}_2$ ist. Da $\bar{A}\,(\bar{C})$ eine erzeugende Zerlegung darstellt, gibt es ein Element $\bar{a} \in \bar{A}\,(\bar{c} \in \bar{C})$ derart, daß $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}\,(\bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{c})$ ist. Nun ist aber $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \cap \bar{c}_1\bar{c}_2 \subset \bar{a} \cap \bar{c} \in \bar{A} \sqcap \bar{C}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Zu diesem Satz wollen wir noch folgendes hinzufügen:

Ist $\bar{C}$ eine Zerlegung auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$, so ist die obige Bedingung $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ immer erfüllt, wie aus den Formeln $\mathbf{s}\bar{C} = G \supset B$, $B \cap \mathbf{s}\bar{C} = B \neq \emptyset$ unmittelbar zu ersehen ist; in diesem Fall stellt $B \sqcap \bar{C}$ eine Zerlegung auf der Menge B dar. Wir sehen, daß jedes aus einem gruppoidalen Komplex B in $\mathfrak{G}$ und einer erzeugenden Zerlegung $\bar{C}$ auf $\mathfrak{G}$ bestehende Gebilde zwei erzeugende Zerlegungen in $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt, und zwar die Zerlegungen $B \sqsubset \bar{C}$, $\bar{C} \sqcap B$. Die erste ist eine Teilmenge in $\bar{C}$, die zweite eine Zerlegung auf B.

Ähnlich bestimmt jedes aus einer erzeugenden Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ und einer solchen $\bar{C}$ auf $\mathfrak{G}$ gebildete Gebilde die beiden erzeugenden Zerlegungen $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$, $\bar{A} \sqcap \bar{C}$, von denen die erste eine Teilmenge in $\bar{C}$ und die zweite eine Zerlegung auf $\mathbf{s}\bar{A}$ darstellt.

Wir wollen auch bemerken, daß $\bar{A} \sqcap \bar{C} = (\bar{A}, \bar{C})$ ist, wenn beide Zerlegungen $\bar{A}, \bar{C}$ das Gruppoid $\mathfrak{G}$ bedecken (§ 3, Nr. 5). Wir sehen, daß *die größte gemeinsame*

Verfeinerung von zwei auf $\mathfrak{G}$ liegenden erzeugenden Zerlegungen selbst erzeugend ist (vgl. Nr. 4,3).

3. *Erzwungene Überdeckungen.* Es seien wiederum $\bar{A}, \bar{C}$ erzeugende Zerlegungen in $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ voraus und betrachten eine gemeinsame Überdeckung $\bar{B}$ der beiden auf der Menge $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C}$ liegenden Zerlegungen $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{C}$, $\bar{C} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$. Ferner betrachten wir die durch die Zerlegung $\bar{B}$ erzwungenen Überdeckungen $\mathring{A}, \mathring{C}$ von $\bar{A}, \bar{C}$ (§4, Nr. 1). Die Überdeckungen $\mathring{A}, \mathring{C}$ sind also verknüpft und durchdringen sich in der Zerlegung $\bar{B}$, also $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$.

Wir wollen zeigen, daß *die Zerlegungen $\mathring{A}, \mathring{C}$ erzeugend sind, wenn $\bar{B}$ erzeugend ist.*

Beweis. Wir nehmen an, die Zerlegung $\bar{B}$ sei erzeugend, und wollen beweisen, daß z. B. die Zerlegung $\mathring{A}$ dieselbe Eigenschaft besitzt. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, setzen wir $A = \mathbf{s}\bar{A}$, $C = \mathbf{s}\bar{C}$.

Es sei $\mathbf{U}_1 \bar{a}_1, \mathbf{U}_2 \bar{a}_2 \in \mathring{A}$, so daß die $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ Elemente in $\bar{A}$ und $\mathbf{U}_1(\bar{a}_1 \cap C)$, $\mathbf{U}_2(\bar{a}_2 \cap C)$ Elemente in $\bar{B}$ darstellen. Da $\bar{A}$ erzeugend ist, gibt es zu jedem Produkt $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ ein Element $\bar{a}_{12} \in \bar{A}$, für das die Beziehung $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \subset \bar{a}_{12}$ und folglich auch $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset \bar{a}_{12} \cap C$ besteht. Da ferner $\bar{B}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $\mathbf{U}_3(\bar{a}_3 \cap C) \in \bar{B}$ von der Beschaffenheit, daß die Beziehungen $\mathbf{U}_1(\bar{a}_1 \cap C)\ \mathbf{U}_2(\bar{a}_2 \cap C) = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset \mathbf{U}_3(\bar{a}_3 \cap C)$ erfüllt sind; dabei sind die $\bar{a}_3$ Elemente in $\bar{A}$, und es gilt $\mathbf{U}_3 \bar{a}_3 \in \mathring{A}$. Für jedes $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$, auf das sich das Vereinigungszeichen $\mathbf{U}_1$ $(\mathbf{U}_2)$ bezieht, gelten also die Beziehungen $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \subset (\bar{a}_{12} \cap C) \subset \mathbf{U}_3(\bar{a}_3 \cap C)$. Die $\bar{a}_{12} \cap C$, $\bar{a}_3 \cap C$ sind aber Elemente der Zerlegung $\bar{A} \sqcap C$ der Menge $A \cap C$. Also gilt für ein geeignetes, hinter dem Zeichen $\mathbf{U}_3$ stehendes Element $\bar{a}_3$ die Gleichheit $\bar{a}_{12} \cap C = \bar{a}_3 \cap C$, woraus $\bar{a}_{12} = \bar{a}_3$ folgt. Wir haben schließlich $\mathbf{U}_1 \bar{a}_1\ \mathbf{U}_2 \bar{a}_2 \subset \mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2 \bar{a}_{12} \subset \mathbf{U}_3 \bar{a}_3 \in \mathring{A}$. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Erzeugende Zerlegungen auf Gruppoiden. Wir wollen nun insbesondere erzeugende Zerlegungen auf Gruppoiden betrachten. Die diesbezüglichen Ergebnisse kommen natürlich auch für erzeugende Zerlegungen in Gruppoiden weitgehend zur Geltung, da jede erzeugende Zerlegung $\bar{A}$ im Gruppoid $\mathfrak{G}$ zugleich eine erzeugende Zerlegung auf dem Untergruppoid $\mathbf{s}\mathfrak{A}$ darstellt.

1. *Lokale Eigenschaften von Überdeckungen und Verfeinerungen.* Es seien $\bar{A} \geqq \bar{B}$ erzeugende Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$. Da die Zerlegung $\bar{A}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ derart, daß $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ gilt. Ferner betrachten wir die Zerlegungen $\bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$, $\bar{a}_2 \sqcap \bar{B}$, $\bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$ in G. Wegen $\bar{A} \geqq \bar{B}$ sind es nicht leere Teilmengen in $\bar{B}$. Da die Zerlegung $\bar{B}$ erzeugend ist, gibt es zu je zwei Elementen $\bar{x} \in \bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$, $\bar{y} \in \bar{a}_2 \sqcap \bar{B}$ ein der Beziehung $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$ genügendes Element $\bar{z} \in \bar{B}$.

Wir wollen zeigen, daß *$\bar{z}$ ein Element der Zerlegung $\bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$ ist, $\bar{z} \in \bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$.*

Aus den Beziehungen $\bar{x} \subset \bar{a}_1$, $\bar{y} \subset \bar{a}_2$, $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ folgt nämlich $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}_3$; wir haben also $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z} \cap \bar{a}_3$, so daß sich wegen $\bar{B} \leqq \bar{A}$ die Beziehung $\bar{z} \subset \bar{a}_3$ (§ 3, Nr. 2) und schließlich $\bar{z} \in \bar{a}_3 \sqcap \bar{B}$ ergibt.

Wenn insbesondere das Element $\bar{a}_1$ eine gruppoidale Teilmenge in $\mathfrak{G}$ darstellt, so ist nach diesem Resultat die Zerlegung $\bar{a}_1 \sqcap \bar{B}$ erzeugend (Nr. 3, 2).

2. *Kleinste gemeinsame Überdeckung.* Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ erzeugende Zerlegungen auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Wir wollen zeigen, daß *die kleinste gemeinsame Überdeckung* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *der Zerlegungen* $\bar{A}, \bar{B}$ *ebenfalls erzeugend ist.*

Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige Elemente $\bar{u}, \bar{v} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Wir haben zu beweisen, daß es ein Element $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ gibt derart, daß $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$ gilt.

Es sei $\bar{a} \in \bar{A}$ ein beliebiges, in $\bar{u}$ als Teilmenge enthaltenes Element von $\bar{A}$ und ähnlich $\bar{b} \in \bar{A}$ ein in $\bar{v}$ enthaltenes Element von $\bar{A}$, also $\bar{a} \subset \bar{u}$, $\bar{b} \subset \bar{v}$. Da die Zerlegung $\bar{A}$ erzeugend ist, gibt es ein der Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ genügendes Element $\bar{c} \in \bar{A}$. Dieses Element $\bar{c}$ ist in einem bestimmten Element $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ als Teilmenge enthalten, also $\bar{c} \subset \bar{w}$.

Jeder Punkt $p \in \bar{u}$ liegt in einem bestimmten, als Teilmenge in $\bar{u}$ enthaltenen Element $\bar{p} \in \bar{A}$; ähnlich liegt jeder Punkt $q \in \bar{v}$ in einem als Teilmenge in $\bar{v}$ enthaltenen Element $\bar{q} \in \bar{A}$. Ferner stellt die Menge $\bar{p}\bar{q}$ einen Teil eines geeigneten Elements $\bar{r} \in \bar{A}$ dar, also $pq \in \bar{p}\bar{q} \subset \bar{r}$. Wir sehen, daß es zum Beweis der Gültigkeit der Beziehung $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$ genügt, folgendes zu zeigen: Für je zwei Elemente $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{u}$, $\bar{q} \subset \bar{v}$, stellt das die Menge $\bar{p}\bar{q}$ enthaltende Element $\bar{r} \in \bar{A}$ eine Teilmenge von $\bar{w}$ dar, also $\bar{r} \subset \bar{w}$.

Es seien also $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{u}$, $\bar{q} \subset \bar{v}$ beliebige Elemente.

Im Hinblick auf die Definition der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ und auf die Tatsache, daß $\bar{a}$ in $\bar{u}$ und $\bar{b}$ in $\bar{v}$ enthalten ist, schließen wir auf die Existenz einer Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \ (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}), \tag{1}$$

und einer Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{b}$ nach $\bar{q}$,

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\beta \ (\bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\beta = \bar{q}). \tag{2}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\beta = \alpha$ ist, denn z. B. im Fall $\beta < \alpha$ genügt es, die Bindung (2) durch das Element $\bar{b}_\beta = \bar{b}_{\beta+1} = \cdots = \bar{b}_\alpha$ zu verlängern.

Da die Zerlegung $\bar{A}$ erzeugend ist, gibt es in ihr Elemente

$$\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha \ (\bar{c}_1 = \bar{c},\ \bar{c}_\alpha = \bar{r}) \tag{3}$$

derart, daß $\bar{a}_1\bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\,\bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$ gilt. Im Hinblick auf die Definition von $[\bar{A}, \bar{B}]$ und darauf, daß das Element $\bar{c}$ in $\bar{w}$ liegt, genügt es zum Beweis der Gültigkeit der Beziehung $\bar{r} \subset \bar{w}$ zu zeigen, daß die Folge (3) eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{c}$ nach $\bar{r}$ darstellt.

Nun sind aber (1) und (2) Bindungen $\{\bar{A}, \bar{B}\}$. Folglich gibt es zu je zwei benachbarten Elementen $\bar{a}_\nu, \bar{a}_{\nu+1}$ ein mit ihnen inzidentes Element $\bar{x}_\nu \in \bar{B}$ und ähnlich zu je zwei benachbarten Elementen $\bar{b}_\nu, \bar{b}_{\nu+1}$ ein mit ihnen inzidentes Element $\bar{y}_\nu \in \bar{B}$ $(\nu = 1, \ldots, \alpha - 1)$. Ferner ist auch die Zerlegung $\bar{B}$ erzeugend; es gilt also für ein geeignetes Element $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$ die Beziehung $\bar{x}_\nu\bar{y}_\nu \subset \bar{z}_\nu$. Da nun das Element $\bar{x}_\nu$ mit $\bar{a}_\nu$ und das Element $\bar{y}_\nu$ mit $\bar{b}_\nu$ inzident ist, ist auch $\bar{x}_\nu\,\bar{y}_\nu$ mit $\bar{a}_\nu\,\bar{b}_\nu$ inzident; daraus schließen wir, daß das Element $\bar{z}_\nu$ mit $\bar{a}_\nu\,\bar{b}_\nu$, also auch mit $\bar{c}_\nu$ inzident ist. Ähnlich sehen wir, daß das Element $\bar{z}_\nu$ mit $\bar{c}_{\nu+1}$

inzidiert. Damit haben wir festgestellt, daß je zwei benachbarte Elemente $\bar{c}_\nu, \bar{c}_{\nu+1}$ mit einem geeigneten Element $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$ inzident sind, so daß die Folge (3) tatsächlich eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{c}$ nach $\bar{r}$ darstellt.

3. *Größte gemeinsame Verfeinerung.* Es seien wiederum $\bar{A}, \bar{B}$ erzeugende Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$.

Es gilt der Satz, daß *die größte gemeinsame Verfeinerung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *der Zerlegungen* $\bar{A}, \bar{B}$ *ebenfalls erzeugend ist.*

Diesen Satz haben wir bereits auf Grund der Gleichheit $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ bewiesen (§ 14, Nr. 3,2); wir haben gezeigt, daß die Durchdringung $\bar{A} \sqcap \bar{B}$ der erzeugenden Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ ebenfalls erzeugend ist.

5. Übungsaufgaben.

1. Wenn ein Element $\bar{a} \in \bar{A}$ einer erzeugenden Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ eine gruppoidale Teilmenge $X \subset \mathfrak{G}$ enthält, also $(\emptyset \neq) X \subset \bar{a}$, so ist dieses Element $\bar{a}$ selbst gruppoidal.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ das aus allen natürlichen Zahlen bestehende Gruppoid, in dem die Multiplikation auf folgende Weise definiert ist: Für $a, b \in \mathfrak{G}$ ist das Produkt ab die durch das dekadische Symbol $a_1 \ldots a_\alpha\, b_1 \ldots b_\beta$ definierte Zahl, wobei $a_1 \ldots a_\alpha$ $(b_1 \ldots b_\beta)$ das dekadische Symbol der Zahl $a(b)$ darstellt. Dann gilt: a) Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist assoziativ; b) die Zerlegung von $\mathfrak{G}$, deren Elemente $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ jeweils von allen mit i Ziffern dekadisch darstellbaren natürlichen Zahlen gebildet werden, ist erzeugend.

3. Das Gruppoid $\mathfrak{G}$, dessen Feld von einer beliebigen Menge gebildet und in dem die Multiplikation durch die Formel $ab = a$ oder $ab = b$ für $a, b \in \mathfrak{G}$ definiert wird, ist assoziativ, und alle seine Zerlegungen sind erzeugend.

§ 15. Faktoroide

Der Faktoroidbegriff, von dem wir jetzt sprechen werden, spielt in der gesamten weiteren Theorie eine führende Rolle.

1. Grundbegriffe. Es sei $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$. Dieser Zerlegung $\bar{A}$ können wir das auf folgende Weise definierte Gruppoid $\mathfrak{A}$ zuordnen: Das Feld von $\mathfrak{A}$ ist die erzeugende Zerlegung $\bar{A}$; die Multiplikation von $\mathfrak{A}$ besteht darin, daß das Produkt eines Elements $\bar{a} \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{b} \in \bar{A}$ als das der Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ genügende Element $\bar{c} \in \bar{A}$ definiert wird. Wir schreiben

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}.$$

Wir verwenden also das Zeichen $\circ$ für Produkte in dem Gruppoid $\mathfrak{A}$, ähnlich wie wir den Malpunkt für Produkte im Gruppoid $\mathfrak{G}$ verwenden. Es gilt also $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \mathfrak{A}$.

Das Gruppoid $\mathfrak{A}$ nennen wir *Faktoroid in dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder, falls die Zerlegung $\bar{A}$ das Gruppoid $\mathfrak{G}$ bedeckt, *Faktoroid auf dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder auch *Faktoroid des Gruppoids* $\mathfrak{G}$. Jede erzeugende Zerlegung im Gruppoid $\mathfrak{G}$ bestimmt also eindeutig ein Faktoroid in $\mathfrak{G}$, und zwar dasjenige, dessen