4. Es sei $A \subset \mathfrak{G}$ eine Teilmenge in $\mathfrak{G}$, und es seien $m$, $n$ natürliche Zahlen. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Formeln:

$$\text{a) } A^m A^n \subset A^{m+n}; \quad \text{b) } (A^m)^n \subset A^{mn}.$$

5. Es seien $A \subset B$ Teilmengen in $\mathfrak{G}$ und ferner $n$ eine natürliche Zahl. Dann gilt die Beziehung $A^n \subset B^n$.

6. Für das Feld $G$ von $\mathfrak{G}$ und jede natürliche Zahl $n$ gilt $G^n \supset G^{n+1}$; folglich bestehen die Beziehungen $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$.

7. Es mögen $G$ und $n$ dieselbe Bedeutung haben wie in Aufgabe 6. Man zeige, daß $G^n$ einen gruppoidalen Komplex in $\mathfrak{G}$ darstellt und daß das zugehörige Untergruppoid ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{G}$ ist.

Bemerkung. Dieses Ideal wird mit $\mathfrak{G}^n$ bezeichnet.

8. Für ein assoziatives Gruppoid $\mathfrak{G}$ gelten die folgenden Aussagen: a) Jedes Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ ist wiederum assoziativ; b) für je drei Teilmengen $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ gilt die Beziehung $A(BC) = (AB)C$.

9. Jedes assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft, daß für je zwei gruppoidale und *miteinander vertauschbare* Komplexe $A, B \subset \mathfrak{G}$ auch der Komplex $AB$ gruppoidal ist.

Bemerkung. Sind in diesem Fall $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbare Untergruppoide in $\mathfrak{G}$, so heißt das zum Produkt ihrer Felder gehörige Untergruppoid *Produkt von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$; dieses Untergruppoid wird mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ bezeichnet.

10. Jedes assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft, daß die von allen seinen mit jedem Element in $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Elementen gebildete Menge gruppoidal oder leer ist.

Bemerkung. Das zugehörige Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ heißt das *Zentrum* von $\mathfrak{G}$.

11. Es sei $\mathfrak{G}$ das Gruppoid, dessen Feld von allen natürlichen Zahlen gebildet wird und in dem die Multiplikation auf folgende Weise definiert ist: Das Produkt $ab$ mit beliebigen Faktoren $a, b \in \mathfrak{G}$ wird durch das kleinste gemeinsame Vielfache bzw. den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $a, b$ dargestellt. Man zeige, daß in beiden Fällen das Gruppoid $\mathfrak{G}$ abelsch und assoziativ ist.

## § 13. Homomorphe Abbildungen (Deformationen) von Gruppoiden

**1. Definition.** Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ beliebige Gruppoide. Wie wir bereits bemerkt haben (§ 12, Nr. 2), versteht man unter einer Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ eine Abbildung des Feldes $G$ von $\mathfrak{G}$ in das Feld $G^*$ von $\mathfrak{G}^*$; ähnlich überträgt man auf Gruppoide auch die übrigen Begriffe, die wir im Zusammenhang mit Abbildungen von Mengen besprochen haben. Nach dieser Definition betrifft also der Begriff der Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ lediglich die beiden Felder und hängt im allgemeinen von den in den Gruppoiden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ definierten Multiplikationen nicht ab.

Es gibt jedoch Abbildungen, die sich durch gewisse Beziehungen zu den in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ definierten Multiplikationen auszeichnen. Für die Gruppoidtheorie sind die sogenannten homomorphen Abbildungen am wichtigsten, die dadurch charakterisiert sind, daß sich mit ihrer Hilfe die Multiplikationen in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ in gewissem Sinn gleichzeitig ausführen lassen. Ausführlich wollen wir diesen Begriff so beschreiben:

Eine Abbildung $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ heißt *homomorph*, wenn das Bild des Produkts $ab$ für je zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ mit dem Produkt des Bildes von $a$ und dem des Bildes von $b$ übereinstimmt: $\boldsymbol{d}(ab) = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b$.

Eine homomorphe Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ wird auch *Homomorphismus* genannt. Die Bezeichnung „homomorphe Abbildung" hat sich zwar in der Literatur seit langem eingebürgert; wir wollen jedoch dafür im allgemeinen das Wort *Deformation* verwenden.

Wir haben bereits bei der Untersuchung der Abbildungen von Mengen bemerkt (§ 6, Nr. 4), daß es nicht immer eine Abbildung einer Menge auf eine andere zu geben braucht; daraus folgt, daß es auch nicht immer eine Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ und umsomehr eine Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ zu geben braucht. Gibt es jedoch eine Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$, so heißt das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ *homomorph zu dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$.

**2. Beispiel einer Deformation.** Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Gruppoide $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_n$ und definieren eine Abbildung $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{Z}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{Z}_n$ so: Für $a \in \mathfrak{Z}$ stellt $\boldsymbol{d}a$ den Rest der Zahl $a$ bei der Division durch $n$ dar. Es ist leicht zu zeigen, daß die Abbildung $\boldsymbol{d}$ eine Deformation von $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{Z}_n$ darstellt. Zum Beweis nehmen wir an, $a, b \in \mathfrak{Z}$ seien beliebige Elemente. Nach der Definition der Multiplikation in $\mathfrak{Z}$ stimmt das Produkt $ab$ mit der arithmetischen Summe $a+b$ und nach der Definition der Abbildung $\boldsymbol{d}$ das Bild $\boldsymbol{d}a, \boldsymbol{d}b$ bzw. $\boldsymbol{d}ab$ mit dem Rest von $a, b$ bzw. $a+b$ bei der Division durch $n$ überein. Nach Definition der Multiplikation in $\mathfrak{Z}_n$ ist das Produkt $\boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b$ durch den Rest der Zahl $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$ bei Division durch $n$ oder, da sich die Zahlen $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$, $a+b$ nur um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl $n$ voneinander unterscheiden, durch den Rest der Zahl $a+b$ bestimmt. Daraus folgt $\boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{d}ab$, und wir sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{d}$ eine Deformation ist.

In unseren weiteren Überlegungen über Gruppoide werden wir häufig Beispielen von Deformationen begegnen; aus diesem Grund wollen wir uns hier mit diesem Beispiel begnügen.

**3. Eigenschaften von Deformationen.** Es sei $\boldsymbol{d}$ eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$, und es seien $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ beliebige Komplexe in $\mathfrak{G}$.

1. Mit dem Symbol $\boldsymbol{d}A$ bezeichnen wir natürlich das Bild der Menge $A$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$, also die von den Bildern bezüglich der Deformation $\boldsymbol{d}$ der in $A$ enthaltenen Elemente gebildete Menge.

*Es gilt die folgende Formel:*

$$\boldsymbol{d}(AB) = \boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B.$$

Beweis. Einerseits ist jedes Element $c^* \in \boldsymbol{d}(AB)$ bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ das Bild des Produkts $ab$ eines Elements $a \in A$ mit einem Element $b \in B$, also $c^* = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b \subset \boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B$, woraus $\boldsymbol{d}(AB) \subset \boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B$ folgt. Andererseits ist jedes Element $c^* \in \boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B$ das Produkt eines Elements $a^* \in \boldsymbol{d}A$ mit einem Element $b^* \in \boldsymbol{d}B$, und wir haben für geeignete Elemente $a \in A$,

$b \in B$ die Formeln $a^* = \boldsymbol{d}a$, $b^* = \boldsymbol{d}b$ sowie $c^* = a^*b^* = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{d}ab \in \boldsymbol{d}(AB)$; daraus folgt $\boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B \subset \boldsymbol{d}(AB)$. Damit ist der Satz bewiesen.

2. Dieses Resultat erlaubt uns zu schließen, daß die Menge $\boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B$ eine Teilmenge in bezug auf $\boldsymbol{d}C$ ist, wenn die Menge $AB$ eine Teilmenge von $C$ ist; d. h. aus $AB \subset C$ folgt $\boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B \subset \boldsymbol{d}C$.

3. Wenn der Komplex $A$ gruppoidal ist, gilt die Beziehung $AA \subset A$, woraus $\boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}A \subset \boldsymbol{d}A$ folgt. Daraus sehen wir, daß das Bild $\boldsymbol{d}A$ bezüglich der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ eines gruppoidalen Komplexes $A \subset \mathfrak{G}$ ebenfalls gruppoidal ist. Das durch das Feld $\boldsymbol{d}A$ bestimmte Untergruppoid in $\mathfrak{G}^*$ heißt das *Bild des Untergruppoids* $\mathfrak{A}$ bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ und wird mit $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bezeichnet; das Untergruppoid $\mathfrak{A}$ heißt das *Urbild von* $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bei oder in der Deformation $\boldsymbol{d}$. Offenbar stellt die Abbildung $\boldsymbol{d}$ eine Deformation des Untergruppoids $\mathfrak{A}$ auf das Untergruppoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ dar; $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ ist also zu $\mathfrak{A}$ homomorph.

Diese Begriffe und Resultate bleiben insbesondere dann gültig, wenn es sich um das Feld $G$ von $\mathfrak{G}$ handelt. Wir sehen, daß das Bild $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ ein zu $\mathfrak{G}$ homomorphes Untergruppoid in $\mathfrak{G}^*$ darstellt. Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ abgebildet wird, so besteht natürlich die Gleichheit $\mathfrak{G}^* = \boldsymbol{d}\mathfrak{G}$.

4. Ist $\boldsymbol{d}$ eine Deformation von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^*$ und $\boldsymbol{f}$ eine solche von $\mathfrak{G}^*$ in ein Gruppoid $\mathfrak{F}$, so stellt $\boldsymbol{fd}$ eine Deformation von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}$ dar. Nach Definition einer zusammengesetzten Abbildung und wegen der Voraussetzung, daß $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{f}$ Deformationen sind, haben wir nämlich für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$

$$\boldsymbol{fd}(ab) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}ab) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}a) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}b) = \boldsymbol{fd}a \cdot \boldsymbol{fd}b,$$

und daraus folgt $\boldsymbol{fd}(ab) = \boldsymbol{fd}a \cdot \boldsymbol{fd}b$.

**4. Isomorphe Abbildungen.** 1. An den Deformationsbegriff knüpfen einige weitere wichtige Begriffe an. Dies ist zunächst der Begriff einer schlichten Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$, also einer Deformation von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^*$, bei der jedem Element in $\mathfrak{G}^*$ höchstens ein Urbild in $\mathfrak{G}$ zukommt. Für eine *schlichte Deformation* des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in (auf) das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ wird allgemein die Bezeichnung *isomorphe Abbildung* von $\mathfrak{G}$ in (auf) $\mathfrak{G}^*$ verwendet.

Aus den in Nr. 3, 4 und § 6, Nr. 7 gefundenen Resultaten schließen wir, daß in dem Fall, daß $\boldsymbol{d}$ eine isomorphe Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ und $\boldsymbol{f}$ eine ebenfalls isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ in ein Gruppoid $\mathfrak{F}$ darstellt, auch die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{fd}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}$ isomorph ist.

2. Eine isomorphe Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ wird auch *Isomorphismus* genannt. Zu jeder schlichten Deformation $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ gibt es natürlich die zu ihr inverse Abbildung $\boldsymbol{d}^{-1}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$, die wiederum schlicht und, wie wir nun zeigen wollen, auch homomorph ist. Es seien $a^*, b^* \in \mathfrak{G}^*$ beliebige Elemente und $a, b \in \mathfrak{G}$ ihre Urbilder in $\boldsymbol{d}$, so daß $\boldsymbol{d}a = a^*$, $\boldsymbol{d}b = b^*$, $\boldsymbol{d}ab = a^*b^*$ ist. Nach Definition von $\boldsymbol{d}^{-1}$ folgen aus diesen Formeln die Gleichheiten $a = \boldsymbol{d}^{-1}a^*$, $b = \boldsymbol{d}^{-1}b^*$,

$ab = \boldsymbol{d}^{-1}a^*b^*$; daraus ergibt sich tatsächlich $\boldsymbol{d}^{-1}a^*b^* = \boldsymbol{d}^{-1}a^* \cdot \boldsymbol{d}^{-1}b^*$. Wenn also ein Isomorphismus $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ existiert, so ist dadurch auch der inverse Isomorphismus $\boldsymbol{d}^{-1}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. In diesem Fall sagen wir, das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ ($\mathfrak{G}$) sei *isomorph* zu $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}^*$) oder die Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ seien *isomorph*, und schreiben $\mathfrak{G}^* \simeq \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}^*$. Offenbar stellen die Felder von zwei isomorphen Gruppoiden äquivalente Mengen dar.

*Eine aus zwei Isomorphismen zusammengesetzte Abbildung ist wiederum ein Isomorphismus.*

**3.** *Beispiele.* Das auf dem Feld $\{e\}$ mit Hilfe der ersten Multiplikationstabelle in § 11, Nr. 4, 2 definierte abstrakte Gruppoid ist dem Permutationsgruppoid $\mathfrak{S}_1$ isomorph. Das auf dem Feld $\{e, a\}$ mit Hilfe der zweiten Multiplikationstabelle in § 11, Nr. 4, 2 definierte abstrakte Gruppoid ist dem Permutationsgruppoid $\mathfrak{S}_2$ isomorph. Das auf dem Feld $\{e, a, b, c, d, f\}$ mit Hilfe der dritten Multiplikationstabelle in § 11, Nr. 4, 2 definierte abstrakte Gruppoid ist dem Permutationsgruppoid $\mathfrak{S}_3$ isomorph.

**5. Operatoren. Meromorphe und automorphe Abbildungen.** Weitere, dem allgemeinen Deformationsbegriff untergeordnete Begriffe beziehen sich auf den Fall einer Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in oder auf sich.

Eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in sich heißt *Operator auf dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder *Operator von* $\mathfrak{G}$; gelegentlich wird auch die Bezeichnung *endomorphe Abbildung* verwendet.

**1.** Ein schlichter Operator auf $\mathfrak{G}$, also eine isomorphe Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in sich, wird *meromorphe Abbildung auf dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder *meromorphe Abbildung von* $\mathfrak{G}$ genannt. Eine meromorphe Abbildung $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$ heißt *echt*, wenn das Untergruppoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ echt ist.

**2.** Eine isomorphe Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf sich heißt im allgemeinen *automorphe Abbildung* auf (von) $\mathfrak{G}$ oder *Automorphismus* auf (von) $\mathfrak{G}$.

**3.** *Beispiele.* Wir betrachten die folgende Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{Z}$ in sich: Wir wählen eine beliebige nichtnegative ganze Zahl $k$ und ordnen jedem Element $a \in \mathfrak{Z}$ das im arithmetischen Sinn genommene Produkt $ka \in \mathfrak{Z}$ zu. Diese Abbildung stellt einen Operator von $\mathfrak{Z}$ dar. Im Fall $k \geqq 1$ haben wir eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{Z}$, im Fall $k = 1$ einen Automorphismus. Im Fall $k = 0$ haben wir einen Operator, jedoch nicht eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{Z}$.

Das einfachste Beispiel eines Automorphismus auf $\mathfrak{G}$ ist die identische Abbildung von $\mathfrak{G}$. Dieser Automorphismus wird der *identische Automorphismus* auf (von) $\mathfrak{G}$ genannt.

### 6. Übungsaufgaben.

1. Wenn zwei Elemente in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ miteinander vertauschbar sind, so haben auch ihre Bilder bei jeder Deformation von $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaft. Das Bild eines abelschen Gruppoids ist bei jeder Deformation wieder abelsch.

2. Wenn das Produkt einer dreigliedrigen Folge von Elementen $a, b, c \in \mathfrak{G}$ aus einem einzigen Element besteht, so gilt dies auch von der Folge der Bilder $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}c$ bei jeder

Deformation $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$. Das Bild eines assoziativen Gruppoids ist bei jeder Deformation wieder assoziativ.

3. Wenn das assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ ein Zentrum besitzt, so liegt das Bild des Zentrums bezüglich jeder Deformation von $\mathfrak{G}$ in dem Zentrum des Bildes von $\mathfrak{G}$.

4. Das Urbild eines gruppoidalen Komplexes in $\mathfrak{G}^*$ bezüglich einer Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ braucht nicht gruppoidal zu sein.

5. Eine meromorphe Abbildung auf einem endlichen Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist ein Automorphismus auf $\mathfrak{G}$.

6. Über den Isomorphismus von Gruppoiden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gelten folgende Aussagen: a) $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ (Reflexivität); b) aus $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$ (Symmetrie); c) aus $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$ (Transitivität).

7. Der Leser möge selbst Beispiele von Deformationen angeben.

## § 14. Erzeugende Zerlegungen

**1. Grundbegriffe.** Wir betrachten ein beliebiges Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Definition. Eine Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ nennen wir *erzeugende Zerlegung in* $\mathfrak{G}$, wenn es zu jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $\bar{a}, \bar{b}$ in $\bar{A}$ ein Element $\bar{c} \in \bar{A}$ gibt, für das die Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ gilt.

Als Beispiel von erzeugenden Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$ führen wir die beiden extremen Zerlegungen $\bar{G}_{\max}$, $\bar{G}_{\min}$ von $\mathfrak{G}$ an, die offenbar tatsächlich erzeugend sind. Auf jedem Gruppoid sind also wenigstens die beiden extremen erzeugenden Zerlegungen vorhanden.

In der Gruppoidtheorie werden gewöhnlich die zu erzeugenden Zerlegungen gehörigen Äquivalenzen schlechthin als *Kongruenzen* bezeichnet.

**2. Deformationszerlegung.** Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ beliebige Gruppoide.

Wir nehmen an, daß es eine Deformation $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ gibt. Die Deformation $\boldsymbol{d}$ bestimmt als Abbildung der Menge $G$ auf $G^*$ die zu $\boldsymbol{d}$ gehörige Zerlegung $\bar{D}$ von $\mathfrak{G}$, wobei jedes Element $\bar{a} \in \bar{D}$ die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern je eines Punktes $a^* \in \mathfrak{G}^*$ gebildete Menge darstellt. Wir nennen diese Zerlegung die *Deformationszerlegung in bezug auf* $\boldsymbol{d}$ oder die *zu der Deformation* $\boldsymbol{d}$ *gehörige Zerlegung*. Da sich nun bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ die Multiplikationen in den beiden Gruppoiden gleichzeitig ausführen lassen, wird man wohl erwarten können, daß es gewisse Beziehungen zwischen der Deformationszerlegung $\bar{D}$ und der Multiplikation in $\mathfrak{G}$ geben wird. Um diese Beziehungen zu finden, wollen wir beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{D}$ betrachten. Nach der Definition von $\bar{D}$ gibt es in $\mathfrak{G}^*$ Punkte $a^*, b^* \in \mathfrak{G}^*$ derart, daß das Element $\bar{a}$ ($\bar{b}$) die von allen $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Punktes $a^*$ ($b^*$) gebildete Menge darstellt. Wir betrachten nun das Produkt $\bar{a}\bar{b}$ des Komplexes $\bar{a}$ mit dem Komplex $\bar{b}$. Jeder Punkt $c \in \bar{a}\bar{b}$ wird durch das Produkt $c = ab$ mit geeigneten Faktoren $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ dargestellt, und aus den Beziehungen $\boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b = a^*b^*$ geht hervor, daß der Punkt $c$ ein $\boldsymbol{d}$-Urbild von $a^*b^*$ darstellt. Der Punkt $c$ ist also in dem von den $\boldsymbol{d}$-Urbildern des Punktes $a^*b^*$ gebildeten Element $\bar{c} \in \bar{D}$ enthalten. Es gilt also die Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, und wir sehen, daß die Zerlegung $\bar{D}$ erzeugend ist. Somit haben wir gefunden, daß die *zu einer Deformation von* $\mathfrak{G}$ *gehörige Zerlegung stets eine erzeugende Zerlegung ist.*