Eine Folgerung aus dieser Erkenntnis besteht darin, daß *jede Überdeckung der Zerlegung $\bar{G}$ mit ihrem $\boldsymbol{g}$-Bild äquivalent ist; die Abbildung, die jedem Element der Überdeckung sein Bild zuordnet, ist schlicht.*

3. Übungsaufgaben.

1. Es seien $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf G^* und A, B beliebige Teilmengen in G. Man zeige, daß die Beziehungen $\boldsymbol{g}(A \cup B) = \boldsymbol{g}A \cup \boldsymbol{g}B$, $\boldsymbol{g}(A \cap B) \subset \boldsymbol{g}A \cap \boldsymbol{g}B$ gelten.

2. Wir betrachten den in Aufgabe 1 beschriebenen Fall und ferner die zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörige Zerlegung $\bar{G}$ der Menge G. Man zeige, daß die Gleichheit $\boldsymbol{g}(A \cap B) = \boldsymbol{g}A \cap \boldsymbol{g}B$ dann und nur dann besteht, wenn $(A \cap B) \sqsubset \bar{G} = (A \sqsubset \bar{G}) \cap (B \sqsubset \bar{G})$ gilt.

3. Es sei $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf G^* und ferner $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ eine Zerlegung auf G. Das System $\{\boldsymbol{g}\bar{a}, \boldsymbol{g}\bar{b}, \ldots\}$ stellt dann und nur dann eine Zerlegung auf G^* dar, wenn $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ eine Überdeckung der zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörigen Zerlegung $\bar{G}$ von G ist.

4. Es sei $\boldsymbol{g}$ eine *schlichte* Abbildung der Menge G auf G^*. Ferner sei $A \subset G$ eine nicht leere Teilmenge, und $\bar{A}, \bar{B}$ seien Zerlegungen in (auf) G. Dann gilt: a) Die erweiterte Abbildung $\bar{\boldsymbol{g}}$ bildet das System aller nicht leeren Teilmengen in G auf dasjenige aller nicht leeren Teilmengen in G^* schlicht ab; b) die Mengen A, $\boldsymbol{g}A$ sind miteinander äquivalent; c) $\boldsymbol{g}\bar{A}$ ist eine Zerlegung in (auf) G^*; d) die Zerlegungen $\bar{A}$, $\boldsymbol{g}\bar{A}$ sind miteinander äquivalent; e) sind die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ miteinander äquivalent bzw. halbverknüpft oder verknüpft, so haben die Zerlegungen $\boldsymbol{g}\bar{A}, \boldsymbol{g}\bar{B}$ stets die gleiche Eigenschaft.

§ 8. Permutationen

Wir werden uns in diesem Kapitel mit schlichten Abbildungen von endlichen Mengen auf sich befassen. Diese Art Abbildungen spielt in der Algebra und insbesondere in der Gruppentheorie eine wichtige Rolle.

1. Definition. Unter einer *Permutation* der Menge G verstehen wir eine schlichte Abbildung der Menge G auf sich (§ 6, Nr. 6).

Im folgenden werden wir uns nur mit Permutationen von *endlichen* Mengen befassen.

Es sei also G eine endliche Menge mit n ($\geqq 1$) Elementen. Aus der Voraussetzung, daß es sich um eine endliche Menge handelt, geht hervor, daß eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{p}$ der Menge G *in* sich eine Permutation dieser Menge darstellt (§ 6, Nr. 10, 2).

Wir wollen die Elemente von G mit den Buchstaben $a, b, \ldots, m$ bezeichnen Dann können wir jeder Permutation $\boldsymbol{p}$ von G eindeutig ein Symbol von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & m \\ a^* & b^* & \ldots & m^* \end{pmatrix}$$

zuordnen; dabei bedeuten $a^*, b^*, \ldots, m^*$ die Buchstaben, mit denen die Elemente $\boldsymbol{p}a, \boldsymbol{p}b, \ldots, \boldsymbol{p}m$ bezeichnet wurden. Unter jedem Buchstaben in der ersten Zeile des obigen Symbols steht also in der zweiten derjenige Buchstabe, der das Bild des betreffenden Elements bei der Abbildung $\boldsymbol{p}$ bezeichnet. Wegen $\boldsymbol{p}G = G$ sind $a^*, b^*, \ldots, m^*$ wiederum die in einer gewissen Reihenfolge aufgeschriebenen Buchstaben $a, b, \ldots, m$. Umgekehrt ist durch jedes Symbol der obigen Form, in dem $a^*, b^*, \ldots, m^*$ die in einer gewissen Reihenfolge aufgeschriebenen Buchstaben $a, b, \ldots, m$ bedeuten, eine bestimmte Permutation der Menge G gegeben, und zwar diejenige, bei der sich jedes Element der ersten Zeile auf das unter ihm stehende Element der zweiten Zeile abbildet. Wir wollen beachten, daß man dieselbe Permutation $\boldsymbol{p}$ in ähnlicher Weise auch mit Hilfe anderer Symbole darstellen kann, und zwar so, daß man die Buchstaben $a, b, \ldots, m$ in der ersten Zeile in einer anderen Reihenfolge aufschreibt und unter jeden von ihnen denselben Buchstaben setzt wie zuvor. Insbesondere ist die identische Abbildung der Menge G auf sich eine Permutation von G, die sogenannte *identische Permutation;* sie wird durch das Symbol $\begin{pmatrix} a\,b \ldots m \\ a\,b \ldots m \end{pmatrix}$ oder durch irgendein ähnliches Symbol, wie etwa $\begin{pmatrix} b\,a\,c \ldots m \\ b\,a\,c \ldots m \end{pmatrix}$ dargestellt.

2. Beispiele von Permutationen. Wir wollen zunächst einige einfache Beispiele von Permutationen auf Mengen, die von $n = 1, 2, 3, 4$ Elementen gebildet werden, anführen. In allen diesen Beispielen handelt es sich um ebene Gebilde.

1. $n = 1$. Es sei G die aus einem in einer Ebene liegenden Punkt a bestehende Menge. In diesem Fall gibt es offenbar genau eine Permutation von G, die identische Permutation $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.

2. $n = 2$. Es sei G die aus zwei in einer Ebene liegenden Punkten a, b bestehende Menge. Bei der Drehung der Punkte a, b, etwa im positiven Sinn um den Mittelpunkt der durch a und b bestimmten Strecke um einen Winkel α, geht der Punkt a in einen bestimmten Punkt a^*, der Punkt b in b^* über, und man erhält eine Abbildung der Menge G auf die Menge $\{a^*, b^*\}$, also $\begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix}$. Wenn $\alpha = 0°, 180°$ ist, so fällt die Menge $\{a^*, b^*\}$ mit G zusammen, und man findet die Permutationen $\begin{pmatrix} a\,b \\ a\,b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ b\,a \end{pmatrix}$ der Menge G.

3. $n = 3$. Es sei G die aus drei in der Ebene liegenden und die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bildenden Punkten a, b, c bestehende Menge. Bei der Drehung der Punkte a, b, c, etwa im positiven Sinn um den Mittelpunkt des Dreiecks um einen Winkel α, geht der Punkt a in einen bestimmten Punkt a^*, der Punkt b in b^*, der Punkt c in c^* über, und man erhält eine Abbildung der Menge G auf die Menge $\{a^*, b^*, c^*\}$, also $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^* & b^* & c^* \end{pmatrix}$. Wenn $\alpha = 0°, 120°, 240°$

ist, so fällt die Menge $\{a^*, b^*, c^*\}$ mit G zusammen, und man findet die Permutationen $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix}$ der Menge G. Weitere Permutationen von G erhält man so, daß man den Punkten a, b, c die in bezug auf je eine Achse des Dreiecks symmetrisch gelegenen Punkte zuordnet. Das Dreieck hat genau drei Achsen, von denen jede durch eine seiner Ecken geht und die gegenüberliegende Seite halbiert. Wenn man jedem Punkt a, b, c den in bezug auf die durch a gehende Achse symmetrisch gelegenen Punkt zuordnet, so erhält man die Permutation $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \end{pmatrix}$; ähnlich erhält man weitere Permutationen: $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,b\,a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,a\,c \end{pmatrix}$. Wir haben also in diesem Fall sechs Permutationen der Menge G gefunden, und zwar

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,b\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,a\,c \end{pmatrix}.$$

4. $n = 4$. Es sei G die aus vier in einer Ebene liegenden und die Ecken eines Quadrats bildenden Punkten a, b, c, d bestehende Menge. Bei der Drehung der Punkte a, b, c, d, etwa im positiven Sinn um den Mittelpunkt des Quadrates um einen Winkel α, geht der Punkt a in einen bestimmten Punkt a^*, der Punkt b in b^*, c in c^*, d in d^* über; man erhält eine Abbildung der Menge G auf die Menge $\{a^*, b^*, c^*, d^*\}$, also $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \end{pmatrix}$, und im Fall $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$ die Permutationen

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,c\,d\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,d\,a\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,a\,b\,c \end{pmatrix}$$

der Menge G. Weitere Permutationen von G erhält man wiederum so, daß man den Punkten a, b, c, d die in bezug auf je eine Achse des Quadrats symmetrisch gelegenen Punkte zuordnet. Das Quadrat hat genau vier Achsen, von denen zwei durch je zwei gegenüberliegende Ecken gehen und zwei je zwei gegenüberliegende Seiten halbieren. Wenn man jedem Punkt a, b, c, d den in bezug auf die durch die Ecken a, c gehende Achse symmetrisch gelegenen Punkt zuordnet, so erhält man die Permutation $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,d\,c\,b \end{pmatrix}$; ähnlich erhält man weitere Permutationen: $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,b\,a\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,a\,d\,c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,c\,b\,a \end{pmatrix}$. Wir haben also in diesem Fall acht Permutationen der Menge G gefunden, und zwar

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,c\,d\,a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,d\,a\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,a\,b\,c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,d\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,b\,a\,d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,a\,d\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,c\,b\,a \end{pmatrix}.$$

3. Anzahl der Permutationen. Wir wollen nun zu Permutationen einer beliebigen, von $n (\geqq 1)$ Elementen $a, b, c, \ldots, m$ gebildeten Menge G zurückkehren.

Wie viele Permutationen der Menge G gibt es im ganzen? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zunächst beachten, daß sich bei einer beliebigen Permutation $\boldsymbol{p}$ der Menge G das Element a auf ein bestimmtes Element $\boldsymbol{p}a \in G$ abbildet; wenn $n > 1$ ist, so bildet sich ferner das Element b auf ein von $\boldsymbol{p}a$ verschiedenes Element $\boldsymbol{p}b$ ab, ähnlich das Element c auf ein von $\boldsymbol{p}a$, $\boldsymbol{p}b$ verschiedenes Element $\boldsymbol{p}c$, usw., und endlich das Element m auf das von den erwähnten Elementen $\boldsymbol{p}a, \boldsymbol{p}b, \boldsymbol{p}c, \ldots$ verschiedene Element $\boldsymbol{p}m$. Umgekehrt, wenn man dem Element a irgendein Element $a^* \in G$ zuordnet, und ferner, im Fall $n > 1$, dem Element b irgendein von a^* verschiedenes Element $b^* \in G$, ähnlich dem Element c irgendein von a^*, b^* verschiedenes Element $c^* \in G$, usw., und endlich dem Element m das von den erwähnten Elementen $a^*, b^*, c^*, \ldots$ verschiedene Element $m^* \in G$, so erhält man eine Permutation $\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & m \\ a^* & b^* & c^* & \ldots & m^* \end{pmatrix}$ der Menge G. Wir sehen, daß es ebenso viel Permutationen der Menge G gibt, wie Möglichkeiten dieser Art Zuordnung vorhanden sind. Nun können wir aber dem Element a ein Element $a^* \in G$ auf n verschiedene Arten zuordnen, indem wir für a^* irgendeines der Elemente $a, b, c, \ldots, m$ wählen; wenn $n > 1$ ist, so können wir ferner dem Element b ein von a^* verschiedenes Element $b^* \in G$ auf $n - 1$ verschiedene Arten, ähnlich dem Element c ein von a^*, b^* verschiedenes Element $c^* \in G$ auf $n - 2$ verschiedene Arten, usw., und endlich dem Element m ein von den erwähnten Elementen verschiedenes Element $m^* \in G$ auf genau eine Art zuordnen. Es kommen also im ganzen $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ Möglichkeiten heraus, und die Antwort auf die obige Frage lautet so, daß *es im ganzen* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ *Permutationen der Menge G gibt*. Diese Zahl wird bekanntlich mit $n!$ bezeichnet. Zum Beispiel gibt es auf einer aus $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ Elementen bestehenden Menge im ganzen $n = 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800$ Permutationen. Die in den obigen Beispielen (Nr. 2) beschriebenen Permutationen der aus $n = 1, 2, 3, 4$ in einer Ebene liegenden Punkten bestehenden Mengen stellen also in den Fällen $n = 1, 2, 3$ alle möglichen Permutationen der erwähnten Mengen dar, während im Fall $n = 4$ außer den beschriebenen 8 Permutationen noch weitere $2 \cdot 8$ Permutationen der entsprechenden Menge existieren.

4. Eigenschaften der Permutationen. 1. *Inverse Permutationen.* Es sei $\boldsymbol{p}$ eine beliebige Permutation der Menge G. Da $\boldsymbol{p}$ eine schlichte Abbildung darstellt, existiert die zu $\boldsymbol{p}$ inverse Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ der Menge G. Es ist leicht einzusehen, daß man das Symbol dieser Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ erhält, indem man in dem von $\boldsymbol{p}$ die beiden Zeilen miteinander vertauscht. Zum Beispiel sind die zu den obigen 8 Permutationen der Menge von vier in einer Ebene liegenden Punkten (Nr. 2) inversen Permutationen der Reihe nach die folgenden:

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,d\,a\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,c\,d\,a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,d\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ c\,b\,a\,d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,a\,d\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,c\,b\,a \end{pmatrix}.$$

2. *Invariante Elemente.* Ein beliebiges Element $x \in G$ wird bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ auf ein bestimmtes Element $\boldsymbol{p}x$ abgebildet, das mit x zusammenfällt oder nicht. Wenn der erste Fall eintritt, wenn also $\boldsymbol{p}x = x$ ist, so sagen wir, daß *die Permutation $\boldsymbol{p}$ das Element x unverändert läßt* oder daß *das Element x bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist.* Offenbar sind bei den Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}^{-1}$ dieselben Elemente von G invariant. Zum Beispiel lassen die obigen Permutationen der Menge von vier in einer Ebene liegenden Punkten folgende Elemente unverändert: a, b, c, d; keins; keins; keins; a, c; b, d; keins; keins.

3. *Zyklische Permutationen.* Ein beliebiges Element $x \in G$ und die Permutation $\boldsymbol{p}$ bestimmen eindeutig eine Reihe von Elementen in G: $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}x), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}x)), \ldots$; in dieser Reihe ist jedes Element, vom zweiten an, das Bild bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ desjenigen Elements, das unmittelbar vor ihm steht. Statt $x, \boldsymbol{p}x$ schreiben wir auch $\boldsymbol{p}^0x, \boldsymbol{p}^1x$ und wenden statt $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}x), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}x)), \ldots$ im allgemeinen die einfachere Schreibweise $\boldsymbol{p}^2x, \boldsymbol{p}^3x, \ldots$ an.

Wenn für eine natürliche Zahl k die Reihe $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$ aus lauter verschiedenen Elementen besteht und $\boldsymbol{p}^kx = x$ ist, so wird die aus diesen Elementen bestehende geordnete Menge ein *Zyklus* der Permutation $\boldsymbol{p}$ oder *k-gliedriger Zyklus* oder *k-Zyklus* genannt. In diesem Fall ist offenbar für jede nichtnegative ganze Zahl $0 \leq i \leq k-1$ die geordnete Menge $\boldsymbol{p}^ix, \boldsymbol{p}^{i+1}x, \boldsymbol{p}^{i+2}x, \ldots, \boldsymbol{p}^{i+k-1}x$ ebenfalls ein k-gliedriger, aus denselben Elementen wie zuvor bestehender Zyklus der Permutation $\boldsymbol{p}$.

Die Permutation $\boldsymbol{p}$ heißt *zyklisch*, wenn die Menge G aus den Elementen eines k-gliedrigen Zyklus, $1 \leq k \leq n$, besteht, abgesehen von eventuellen Elementen, die bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant sind. Wenn es sich um den Zyklus $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$ handelt, so sagen wir, *$\boldsymbol{p}$ sei zyklisch in bezug auf die Elemente $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$.* Wenn insbesondere $k = n$ ist, wenn also jedes Element der Menge G in dem Zyklus der Permutation $\boldsymbol{p}$ auftritt, so wird $\boldsymbol{p}$ eine *echte zyklische Permutation* genannt.

Wir nehmen an, daß die Permutation $\boldsymbol{p}$ in bezug auf die Elemente $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$ zyklisch ist. Dann wird $\boldsymbol{p}$ in der Regel mit einem einfacheren Symbol bezeichnet, und zwar so, daß man die Zeichen für die Elemente $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$ in dieser Reihenfolge in eine Klammer setzt. Die zu $\boldsymbol{p}$ inverse Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ bildet offenbar jedes Element des Zyklus $x, \boldsymbol{p}x, \boldsymbol{p}^2x, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}x$, mit Ausnahme des ersten, auf das unmittelbar vorangehende Element ab, das Element x auf $\boldsymbol{p}^{k-1}x$, und läßt im übrigen alle anderen Elemente der Menge G, soweit es solche gibt, unverändert; die Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ ist also zyklisch in bezug auf die Elemente $\boldsymbol{p}^{k-1}x, \ldots, \boldsymbol{p}^2x, \boldsymbol{p}x, x$. Wenn man eventuell eine andere Bezeichnung der Elemente von G derart wählt, daß das Element x mit a, das Element $\boldsymbol{p}x$ mit b, $\boldsymbol{p}^2x$ mit c, usw., und schließlich das Element $\boldsymbol{p}^{k-1}x$ mit j bezeichnet wird, sieht das einfachere Symbol der Permutation $\boldsymbol{p}$ folgendermaßen aus: $(a, b, c, \ldots, j)$. Es ist einleuchtend, daß man die Permutation $\boldsymbol{p}$ auch mit irgendeinem Symbol wie $(b, c, \ldots, j, a)$, $(c, \ldots, j, a, b)$, usw., also im ganzen auf k Arten, bezeichnen kann. Das Symbol der zu $\boldsymbol{p}$ inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ ist z. B. $(j, \ldots, c, b, a)$.

Die einfachsten zyklischen Permutationen der Menge G sind zyklische Permutationen in bezug auf ein einziges Element; aus der obigen Definition einer zyklischen Permutation geht hervor, daß jede in bezug auf ein einziges Element zyklische Permutation mit der identischen Permutation dieser Menge übereinstimmt, so daß also die identische Permutation der Menge G mit jedem der Symbole (a), (b), (c), ..., (m) bezeichnet werden kann.

Eine zyklische Permutation der Menge G in bezug auf zwei Elemente heißt *Transposition* der Menge G.

Zum Beispiel haben wir in den obigen Beispielen von Permutationen der Mengen von $n = 1, 2, 3, 4$ in einer Ebene liegenden Punkten (Nr. 2) folgende zyklische Permutationen: (a) für $n = 1$; (a), (a, b) für $n = 2$; (a), (a, b), (a, c), (b, c), (a, b, c), (a, c, b) für $n = 3$; (a), (a, c), (b, d), (a, b, c, d), (a, d, c, b) für $n = 4$.

4. *Invariante Untermengen und Zerlegungen.* Es sei nun $\boldsymbol{p}$ wiederum eine beliebige Permutation der Menge $G = \{a, b, c, \ldots, m\}$. Eine nicht leere Untermenge $A \subset G$ wird bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{p}$ auf eine bestimmte Untermenge $\boldsymbol{p}A \subset G$ abgebildet, die eine Teilmenge von A darstellt oder nicht. Wenn der erste Fall $\boldsymbol{p}A \subset A$ eintritt, so ist $\boldsymbol{p}A = A$; denn nach Definition der partiellen Abbildung $\boldsymbol{p}_A$ gilt $\boldsymbol{p}A = \boldsymbol{p}_A A$, und ferner haben wir, da $\boldsymbol{p}_A$ als schlichte Abbildung der endlichen Menge A in sich eine Permutation von A darstellt, $\boldsymbol{p}_A A = A$.

Im Fall $\boldsymbol{p}A = A$ sagen wir, daß *die Permutation $\boldsymbol{p}$ die Untermenge A unverändert läßt* oder daß *die Untermenge A bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist.*

Die Permutation $\boldsymbol{p}$ läßt die Untermenge A insbesondere dann unverändert, wenn sie jedes Element von A unverändert läßt. Es ist einleuchtend, daß dann, wenn die Permutation $\boldsymbol{p}$ die Untermenge A unverändert läßt, dasselbe auch von der inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ gilt. Zum Beispiel lassen die oben beschriebenen Permutationen der Menge von vier in einer Ebene liegenden Punkten a, b, c, d die folgenden echten Teilmengen dieser Menge unverändert: alle; keine; $\{a, c\}$, $\{b, d\}$; keine; $\{a\}$, $\{c\}$, $\{b, d\}$; $\{b\}$, $\{d\}$, $\{a, c\}$; $\{a, b\}$, $\{c, d\}$; $\{a, d\}$, $\{b, c\}$. Wir wollen folgendes beachten: Wenn $\boldsymbol{p}$ die zyklische Permutation $(a, b, c, \ldots, j)$ ist, so ist jede, die Elemente $a, b, c, \ldots, j$ enthaltende Untermenge $A \subset G$ in der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant; in diesem Fall ist die partielle Permutation $\boldsymbol{p}_A$ ebenfalls zyklisch und kann mit demselben Symbol $(a, b, c, \ldots, j)$ bezeichnet werden.

Es sei $\bar{G} = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}\}$ eine Zerlegung der Menge G. Es kann der Fall eintreten, daß bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{p}$ das Bild jedes Elements in $\bar{G}$ wiederum ein Element in $\bar{G}$ ist; in diesem Fall sagen wir, daß *die Permutation $\boldsymbol{p}$ die Zerlegung $\bar{G}$ unverändert läßt* oder *die Zerlegung $\bar{G}$ in der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist.*

Es ist leicht einzusehen, daß dann, wenn die Permutation $\boldsymbol{p}$ die Zerlegung $\bar{G}$ unverändert läßt, dasselbe auch von der inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ gilt.

Wir wollen insbesondere den Fall betrachten, daß jedes Element der Zerlegung $\bar{G}$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist, so daß also $\boldsymbol{p}\bar{a} = \bar{a}$, $\boldsymbol{p}\bar{b} = \bar{b}$, ..., $\boldsymbol{p}\bar{m} = \bar{m}$ gilt. In diesem Fall ist die durch die Permutation $\boldsymbol{p}$ eines beliebigen Elements $\bar{x} \in \bar{G}$ bestimmte partielle Permutation $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ ebenfalls eine Permutation von $\bar{x}$. Durch die partiellen Permutationen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \boldsymbol{p}_{\bar{b}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ wird die Permutation $\boldsymbol{p}$ eindeutig erzeugt, und zwar im folgenden Sinn: Das Bild bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ eines beliebigen Punktes $x \in G$ fällt mit dem Bild bei der partiellen Permutation $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ zusammen, wobei $\bar{x} \in \bar{G}$ das den Punkt x enthaltende Element bedeutet. Bei der inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ ist ebenfalls jedes Element der Zerlegung $\bar{G}$ invariant, und diese Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ wird durch die inversen partiellen Permutationen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}^{-1}, \boldsymbol{p}_{\bar{b}}^{-1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}^{-1}$ erzeugt. Wenn wir umgekehrt eine beliebige Zerlegung $\bar{G} = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}\}$ der Menge $\bar{G}$ wählen und auf jedem Element $\bar{x}$ von $\bar{G}$ irgendeine Permutation $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ erklären, so können wir eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Menge G in der Weise definieren, daß wir jedem Punkt $x \in G$ sein Bild bei der Permutation $\boldsymbol{p}_{\bar{x}}$ zuordnen, wobei $\bar{x} \in \bar{G}$ das den Punkt x enthaltende Element bedeutet; dann läßt die Permutation $\boldsymbol{p}$ jedes Element von $\bar{G}$ unverändert, und die $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \boldsymbol{p}_{\bar{b}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ stellen die partiellen erzeugenden Permutationen dieser Permutation $\boldsymbol{p}$ dar.

5. Erzeugung von Permutationen durch echte zyklische Permutationen. Wir wollen zeigen, daß *jede Permutation $\boldsymbol{p}$ einer endlichen Menge G mit $n (\geqq 1)$ Elementen durch endlich viele echte zyklische Permutationen erzeugt wird*, d. h., daß es eine Zerlegung $\bar{G} = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}\}$ der Menge G gibt, die so beschaffen ist, daß jedes Element $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist und die partiellen Abbildungen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \boldsymbol{p}_{\bar{b}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ echte zyklische Permutationen der Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}$ darstellen.

Zum Beweis wenden wir die Methode der vollständigen Induktion an. Unsere Behauptung ist richtig für $n = 1$; in diesem Fall ist nämlich $\boldsymbol{p}$ die identische Permutation der Menge G, und die größte Zerlegung auf G hat wohl die erwähnte Eigenschaft. Es sei also $n > 1$. Wir haben folgendes zu zeigen: Ist unsere Behauptung für jede aus höchstens $n - 1$ Elementen bestehende Menge richtig, so bleibt sie auch für jede Menge mit n Elementen bestehen. Es sei also G eine von n Elementen gebildete Menge und $\boldsymbol{p}$ eine Permutation von G. Wir wählen ein beliebiges Element $a \in G$ und betrachten die endliche Folge $a, \boldsymbol{p}a, \boldsymbol{p}^2a, \ldots, \boldsymbol{p}^na$ von Elementen in G, von denen jedes Element das Bild des unmittelbar vorangehenden Elements bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ darstellt. Da die Anzahl dieser Elemente gleich $n + 1$ ist, kommt unter ihnen wenigstens ein Element von G mindestens zweimal vor. Wenn wir also in der genannten Folge vom ersten Element a je zu dem nächstfolgenden fortschreiten, so kommen wir zum erstenmal

a) zu einem Element $\boldsymbol{p}^ja$, das unter den Elementen $\boldsymbol{p}^{j+1}a, \ldots, \boldsymbol{p}^na$ mindestens noch einmal erscheint; j bedeutet eine der Zahlen $0, \ldots, n - 1$;

b) zu einem Element $\boldsymbol{p}^{j+k}a$, das mit $\boldsymbol{p}^ja$ zusammenfällt, für das also $\boldsymbol{p}^ja = \boldsymbol{p}^{j+k}a$ ist; k bedeutet eine der Zahlen $1, \ldots, n - j$.

Wenn nun $\boldsymbol{p}^ja$ nicht gleich das erste Element a der obigen Folge darstellt, d. h. wenn $j > 0$ ist, so bilden sich die beiden Elemente $\boldsymbol{p}^{j-1}a, \boldsymbol{p}^{j+k-1}a$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ auf dasselbe Element $\boldsymbol{p}^ja$ ab, und wir haben die Gleichheit $\boldsymbol{p}^{j-1}a = \boldsymbol{p}^{j+k-1}a$, da die Permutation $\boldsymbol{p}$ schlicht ist; diese Gleichheit kann jedoch nicht bestehen, weil sich das Element $\boldsymbol{p}^ja$ eben dadurch auszeichnet, daß es vor ihm in der obigen Folge kein Element gibt, welches weiter rechts noch einmal vorkommen würde, während die Gleichheit die Existenz eines solchen Elements, und zwar des Elements $\boldsymbol{p}^{j-1}a$ angibt. Wir haben also $j = 0$. Nach der Definition der Zahl k besteht die Gleichheit $\boldsymbol{p}^k a = a$, aber keines der Elemente $\boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ fällt mit a zusammen. Wenn zwei der Elemente $a, \boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ identisch sind, wenn also für zwei, den Ungleichungen $0 \leqq r < s \leqq k-1$ genügende ganze Zahlen r, s die Gleichheit $\boldsymbol{p}^r a = \boldsymbol{p}^s a$ besteht, so haben wir $\boldsymbol{p}^{k-s}(\boldsymbol{p}^r a) = \boldsymbol{p}^{k-s}(\boldsymbol{p}^s a)$, also $\boldsymbol{p}^{k-s+r}a = \boldsymbol{p}^k a = a$; dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß keines der Elemente $\boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ mit a zusammenfällt, da $1 \leqq k - s + r \leqq k - 1$ ist und folglich das Element $\boldsymbol{p}^{k-s+r}a$ unter diesen Elementen vorkommt. Damit ist gezeigt, daß keine zwei der Elemente $a, \boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ identisch sind.

Es sei nun $\bar{a}$ die von den Elementen $a, \boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ gebildete Menge. Wir sehen, daß die Teilmenge $\bar{a} \subset G$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist und die partielle Abbildung $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}$ eine echte zyklische Permutation dieser Menge darstellt. Wenn $k = n$, d. h. wenn $\bar{a} = G$ ist, so haben wir $\boldsymbol{p}_{\bar{a}} = \boldsymbol{p}$, und die größte Zerlegung der Menge G hat die in unserer Behauptung beschriebene Eigenschaft. Wir wollen also noch den Fall $k < n$ untersuchen. In diesem Fall sind in der Menge G außer den Elementen $a, \boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$ noch höchstens $n - 1$ weitere Elemente vorhanden; wir bezeichnen die von ihnen gebildete (nicht leere) Menge mit H. Das Bild eines Elements $x \in H$ bei der partiellen Abbildung $\boldsymbol{p}_H$ liegt wiederum in H. Andernfalls haben wir nämlich die Gleichheit $\boldsymbol{p}x = \boldsymbol{p}^l a$ $(l = 0, \ldots, k-1)$, aus der $x = \boldsymbol{p}^{l-1}a$ oder $x = \boldsymbol{p}^{k-1}a$ folgt, je nachdem ob $l > 0$ oder $l = 0$ ist; dies widerspricht jedoch in beiden Fällen der Voraussetzung $x \in H$. Die Abbildung $\boldsymbol{p}_H$ bildet also die Menge H in sich ab, und da sie schlicht und die Menge H endlich ist, stellt $\boldsymbol{p}_H$ eine Permutation der Menge H dar. Wenn nun unsere Voraussetzung für jede von höchstens $n - 1$ Elementen gebildete Menge zutrifft, so gibt es eine Zerlegung $\overline{H} = (\bar{b}, \ldots, \bar{m})$ der Menge H derart, daß jedes ihrer Elemente bei der Permutation $\boldsymbol{p}_H$ invariant ist und die durch diese Permutation $\boldsymbol{p}_H$ bestimmten partiellen Permutationen der Elemente $\bar{b}, \ldots, \bar{m}$ echte zyklische Permutationen darstellen. Da die Permutation $\boldsymbol{p}_H$ jedes Element in H auf dasselbe Element wie die Permutation $\boldsymbol{p}$ abbildet, sind die durch die Permutation $\boldsymbol{p}$ bestimmten partiellen Abbildungen $\boldsymbol{p}_{\bar{b}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ der Elemente $\bar{b}, \ldots, \bar{m}$ genau die erwähnten echten zyklischen Permutationen. Das System $\overline{G} = (\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m})$ stellt offenbar eine Zerlegung der Menge G dar, und wir sehen, daß jedes seiner Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}$ bei der Permutation $\boldsymbol{p}$ invariant ist und die partiellen Abbildungen $\boldsymbol{p}_{\bar{a}}, \boldsymbol{p}_{\bar{b}}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\bar{m}}$ echte zyklische Permutationen der Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{m}$ darstellen. Damit ist der Satz bewiesen.

6. Methode zur Bestimmung der erzeugenden echten zyklischen Permutationen. Wenn eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Menge G mit $n \geqq 1$ Elementen gegeben ist, so erhält man die diese Permutation erzeugenden echten zyklischen Permutationen in folgender Weise: Man geht von einem beliebigen Element $a \in G$ aus und bestimmt zunächst den Zyklus $a, \boldsymbol{p}a, \ldots, \boldsymbol{p}^{k-1}a$; dann wählt man im Fall $k < n$ ein beliebiges, in dem genannten Zyklus nicht enthaltenes Element $b \in G$ und bestimmt den Zyklus $b, \boldsymbol{p}b, \ldots, \boldsymbol{p}^{l-1}b$; ferner wählt man im Fall $k + l < n$ ein beliebiges, in keinem der genannten Zyklen enthaltenes Element $c \in G$, bestimmt den mit c beginnenden Zyklus und fährt auf diese Weise fort. Da die Menge G endlich ist, führt dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten zu Ende. Mit Rücksicht auf diese Struktur wird die Permutation $\boldsymbol{p}$ so bezeichnet, daß die Symbole der gefundenen echten zyklischen Permutationen nebeneinander aufgeschrieben werden. Aus dieser Bezeichnungsweise bekommen wir das Symbol der inversen Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}$ so, daß wir in jedem Zyklus die Reihenfolge der einzelnen Buchstaben umkehren. Zum Beispiel werden die obigen, von $n = 1, 2, 3, 4$ in einer Ebene liegenden Punkten gebildeten Permutationen durch echte zyklische Permutationen in folgender Weise erzeugt: (a) für $n = 1$; (a) (b), (a, b) für $n = 2$; $(a)(b)(c)$, (a, b, c), (a, c, b), $(a)(b, c)$, $(a, c)(b)$, $(a, b)(c)$ für $n = 3$; $(a)(b)(c)(d)$, (a, b, c, d), (a, c) (b, d), (a, d, c, b), $(a)(c)(b, d)$, $(a, c)(b)(d)$, $(a, b)(c, d)$, $(a, d)(b, c)$ für $n = 4$. Die zu diesen Permutationen inversen lassen sich in folgender Weise ausdrückten: (a) für $n = 1$; $(a)(b)$, (a, b) für $n = 2$; $(a)(b)(c)$, (c, b, a), (b, c, a), $(a)(b, c)$, $(a, c)(b)$, $(a, b)(c)$ für $n = 3$; $(a)(b)(c)(d)$, (d, c, b, a), $(a, c)(b, d)$, (b, c, d, a), $(a)(c)(b, d)$, $(a, c)(b)(d)$, $(a, b)(c, d)$, $(a, d)(b, c)$ für $n = 4$.

7. Zusammensetzung von Permutationen. 1. *Einleitende Erörterungen.* Permutationen der Menge G können wir, wie Abbildungen überhaupt, in üblicher Weise zusammensetzen. Es seien $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ beliebige Permutationen der Menge G. Die aus den Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{qp}$ stellt wieder eine Permutation der Menge G dar. Das Symbol dieser Permutation $\boldsymbol{qp}$ erhalten wir so, daß wir unter jeden, ein Element von G bezeichnenden Buchstaben x denjenigen des Elementes $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}x)$ aufschreiben. Wenn die Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ mit üblichen zweizeiligen Symbolen bezeichnet werden, so suchen wir den das Element $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}x)$ bezeichnenden Buchstaben in folgender Weise auf: Wir suchen zunächst den im Symbol der Permutation $\boldsymbol{p}$ unter dem Buchstaben x befindlichen Buchstaben des Elements $\boldsymbol{p}x$ auf und dann den im Symbol der Permutation $\boldsymbol{q}$ unter diesem Buchstaben von $\boldsymbol{p}x$ stehenden Buchstaben von $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}x)$. Wenn etwa $n = 3$ ist und die Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ durch die Symbole $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ definiert, sind, so ist $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ das Symbol von $\boldsymbol{qp}$. Ein ähnliches Verfahren wenden wir an, wenn wir die Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ mit Hilfe der entsprechenden echten zyklischen Permutationen ausgedrückt haben. Wenn z. B. wieder $n = 3$ ist und die Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ durch die Symbole (a, b, c), $(a)(b, c)$ definiert sind, so wird die Permutation $\boldsymbol{qp}$ durch das Symbol $(a, c)(b)$ ausgedrückt.

2. *Miteinander vertauschbare Permutationen.* Wir wollen beachten, daß das Resultat einer Zusammensetzung von zwei Permutationen der Menge G im allgemeinen von der Reihenfolge, in der die Zusammensetzung durchgeführt wird, abhängt; die aus den Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ zusammengesetzte Permutation $\boldsymbol{qp}$ kann also von der aus den Permutationen $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ zusammengesetzten Permutation $\boldsymbol{pq}$ verschieden sein. So ist in dem obigen Beispiel $\boldsymbol{qp} \neq \boldsymbol{pq}$, denn die Permutation $\boldsymbol{qp}$ stellt die zyklische Permutation (a, c), die Permutation $\boldsymbol{pq}$ jedoch die zyklische Permutation (a, b) dar. Wenn sich die

Permutationen $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ dadurch auszeichnen, daß das Resultat ihrer Zusammensetzung von der Reihenfolge, in der sie durchgeführt wird, nicht abhängt, d. h. wenn die Gleichheit $\boldsymbol{qp} = \boldsymbol{pq}$ besteht, so werden $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ *miteinander vertauschbar* oder *miteinander kommutativ* genannt. Zum Beispiel ist die identische Permutation der Menge G mit jeder Permutation dieser Menge vertauschbar.

3. *Assoziativgesetz über Zusammensetzung von Permutationen.* Für je drei Permutationen $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ der Menge G gilt natürlich das Assoziativgesetz

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}.$$

Die auf beiden Seiten dieser Gleichheit auftretende Permutation wird kürzer mit $\boldsymbol{rqp}$ bezeichnet.

4. *Inverse Permutationen in bezug auf zusammengesetzte Permutationen.* Mit Hilfe des Assoziativgesetzes können wir leicht zeigen, daß *die zu der zusammengesetzten Permutation* $\boldsymbol{qp}$ *inverse Abbildung die Permutation* $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1}$ *ist;* d. h., es gilt die Gleichheit

$$(\boldsymbol{q}\boldsymbol{p})^{-1} = \boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1}.$$

Beweis. Es sei $x \in G$ ein beliebiges Element. Nach der Definition der Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1}$ und mit Rücksicht auf die Gültigkeit des Assoziativgesetzes schließen wir auf das Bestehen der Gleichheiten

$$(\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1})(\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}x) = \boldsymbol{p}^{-1}(\boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}x)) = \boldsymbol{p}^{-1}((\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}x);$$

ferner haben wir

$$\boldsymbol{p}^{-1}((\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}x) = \boldsymbol{p}^{-1}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}x)) = \boldsymbol{p}^{-1}((\boldsymbol{e}\boldsymbol{p})x) = \boldsymbol{p}^{-1}(\boldsymbol{p}x) = (\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{p})x = \boldsymbol{e}x = x,$$

wobei $\boldsymbol{e}$ die identische Permutation der Menge G bedeutet. Wir sehen, daß die Permutation $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1}$ das Element $\boldsymbol{qp}x \in G$ auf x abbildet. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.

8. Übungsaufgaben.

1. Man zeige an einem Beispiel, daß eine schlichte Abbildung einer *unendlichen* Menge (z. B. der Menge aller natürlichen Zahlen) in sich keine Permutation zu sein braucht.

2. Es sollen die Symbole aller Permutationen einer aus vier Elementen bestehenden Menge aufgeschrieben und die einzelnen Permutationen durch echte zyklische Permutationen ausgedrückt werden.

3. Es soll eine Regel angegeben werden, die ein sukzessives Aufschreiben der Symbole aller Permutationen einer beliebigen aus n ($\geqq 1$) Elementen bestehenden Menge gestatten würde.

4. Ein reguläres ebenes n-Eck ($n \geqq 3$) besitzt genau n Achsen. Die Drehungen der Ecken, z. B. im positiven Sinn um den Mittelpunkt des n-Ecks um $0°$, $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, $\left(2 \cdot \frac{360}{n}\right)^\circ$, $\ldots$, $\left((n-1) \cdot \frac{360}{n}\right)^\circ$, und ferner die symmetrischen Abbildungen der Ecken in bezug auf die einzelnen Achsen bestimmen $2n$ Permutationen der Eckenmenge; wir wollen die

von diesen Permutationen gebildete Menge mit M_n bezeichnen. Es sollen die folgenden Eigenschaften der Menge M_n festgestellt werden: a) Aus $\boldsymbol{p} \in M_n$, $\boldsymbol{q} \in M_n$ folgt $\boldsymbol{qp} \in M_n$; b) $\boldsymbol{e} \in M_n$; c) aus $\boldsymbol{p} \in M_n$ folgt $\boldsymbol{p}^{-1} \in M_n$.

5. Je zwei zyklische Permutationen einer beliebigen, aus n ($\geqq 1$) Elementen bestehenden Menge, deren Zyklen, die mehr als ein Element enthalten, keine gemeinsamen Elemente besitzen, sind miteinander vertauschbar.

§ 9. Mehrdeutige (allgemeine) Abbildungen

1. Grundlegende Begriffe und Eigenschaften. Der Begriff der eindeutigen Abbildung einer Menge G in eine Menge G^*, dessen Eigenschaften den Gegenstand unserer Untersuchungen in den vorhergehenden Paragraphen bildeten, kann in folgender Weise erweitert werden:

Unter einer *mehrdeutigen* oder *allgemeinen Abbildung der Menge G in die Menge G^** verstehen wir eine Beziehung zwischen den Elementen der beiden Mengen derart, daß jedem Element der Menge G mindestens ein Element der Menge G^* zugeordnet wird.

Es sei $\boldsymbol{g}$ eine mehrdeutige Abbildung der Menge G in die Menge G^*. Dann besitzt bei dieser Abbildung jedes Element $a \in G$ mindestens ein, im allgemeinen mehrere und eventuell auch unendlich viele Bilder in der Menge G^*; die von diesen Bildern gebildete Menge, die sogenannte *Bildmenge*, wird mit $\boldsymbol{g}a$ bezeichnet.

Wenn jedes Element $a^* \in G^*$ in der Bildmenge mindestens eines Elements $a \in G$ enthalten ist, so sagen wir, $\boldsymbol{g}$ sei eine mehrdeutige oder allgemeine Abbildung der Menge G *auf* die Menge G^*. In diesem Fall ist durch die Abbildung $\boldsymbol{g}$ eine mehrdeutige Abbildung der Menge G^* auf die Menge G bestimmt, die sogenannte zu $\boldsymbol{g}$ *inverse Abbildung* $\boldsymbol{g}^{-1}$. Diese Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ wird so definiert, daß jedem Element $a^* \in G^*$ alle Elemente $a \in G$ zugeordnet werden, in deren Bildmengen in $\boldsymbol{g}$ das Element a^* enthalten ist. Nach dieser Definition gelten also die beiden Beziehungen $a^* \in \boldsymbol{g}a$, $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ gleichzeitig, d.h., wenn eine von ihnen gilt, so gilt auch die andere.

Es kann leicht gezeigt werden, daß *die zu $\boldsymbol{g}^{-1}$ inverse Abbildung mit der Abbildung $\boldsymbol{g}$ identisch, d. h. $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{g}$ ist.* In der Tat, aus der Beziehung $a^* \in \boldsymbol{g}a$ folgt $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ und daraus $a^* \in (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$, so daß $\boldsymbol{g}a \subset (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$ gilt; umgekehrt folgt aus $a^* \in (\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a$ die Beziehung $a \in \boldsymbol{g}^{-1}a^*$ und daraus $a^* \in \boldsymbol{g}a$, so daß $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a \subset \boldsymbol{g}a$ ist. Es ergibt sich also $(\boldsymbol{g}^{-1})^{-1}a = \boldsymbol{g}a$.

Mit Rücksicht auf diese Eigenschaft nennen wir die beiden Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}^{-1}$ *zueinander invers*, ohne zu unterscheiden, welche von ihnen zu welcher invers ist.

Ist die Abbildung $\boldsymbol{g}$ eindeutig, so ist die zu ihr inverse Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ im allgemeinen mehrdeutig. In diesem Fall besteht für jeden Punkt $a^* \in \boldsymbol{g}G$ die Bildmenge $\boldsymbol{g}^{-1}a$ aus allen Punkten von G, die sich durch $\boldsymbol{g}$ auf den Punkt a^* abbilden lassen; $\boldsymbol{g}^{-1}a$ stellt also ein Element der zu der Abbildung $\boldsymbol{g}$ gehörigen Zerlegung von G dar.