Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie

§ 6. Abbildungen von Mengen

In: Otakar Borůvka (author): Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. (German). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960. pp. 31--40.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401498

§ 6. Abbildungen von Mengen

Die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelte Theorie der Zerlegungen in Mengen bildet die mengentheoretische Grundlage für die aufzubauende Gruppoid- und Gruppentheorie. Die erzielten Ergebnisse bilden jedoch nur den einen Teil der für die erwähnten Zwecke benötigten Mittel. Den anderen stellt die Theorie der Abbildungen von Mengen dar, mit der wir uns in diesen nächsten Paragraphen befassen werden. Der Leser dürfte es wohl als eine willkommene Abwechslung empfinden, wenn nun nach den stellenweise vielleicht recht anstrengenden Ausführungen wieder einfachere Sachen behandelt werden.

1. Abbildung in eine Menge. Im täglichen Leben begegnen wir häufig Erscheinungen, die mit dem mathematischen Begriff einer Abbildung zusammenhängen. In einfachsten Fällen haben solche Erscheinungen die folgende Struktur: Gegeben sind zwei nicht leere Mengen G, G^*, und es besteht zwischen ihren Elementen eine Beziehung, die jedem Element von G ein bestimmtes Element von G^* zuordnet.

Beispiele. [1] Zwischen den Zuschauern bei einer Theatervorstellung und den für diese Vorstellung ausgegebenen Eintrittskarten besteht die Beziehung, daß jeder Zuschauer auf Grund einer bestimmten, und zwar der von ihm oder für ihn gelösten Karte der Vorstellung beiwohnt.

[2] Zwischen den Schülern einer Schule und den Klassen dieser Schule besteht eine Beziehung, die jeden Schüler in eine bestimmte Klasse einreiht.

[3] Die Feststellung der Anzahl n von irgendwelchen Dingen besteht darin, daß wir jedem Ding genau eine natürliche Zahl $1, 2, \ldots, n$ zuordnen, und zwar im allgemeinen so, daß wir die Dinge einzeln in die Hand nehmen und sie dabei der Reihe nach mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ beschriften oder nur in Gedanken versehen.

Es seien also G, G^* nicht leere Mengen. Unter einer *Abbildung der Menge G in G^** verstehen wir eine Beziehung zwischen den Elementen der beiden Mengen derart, daß jedem Element der Menge G genau ein Element der Menge G^* zugeordnet ist, also eine Beziehung, durch die jedes Element von G genau auf ein Element von G^* abgebildet wird.

Eine Abbildung der Menge G in G^* wird auch *Funktion* auf der Menge G in die Menge G^* genannt. Wenn zwei Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ der Menge G in G^* jedes Element von G auf das gleiche Element von G^* abbilden, so nennen wir sie einander *gleich* und schreiben $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. Im entgegengesetzten Fall nennen wir sie *ungleich* und schreiben $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{h}$.

Wir betrachten eine beliebige Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Menge G in G^*. In der Abbildung $\boldsymbol{g}$ ist jedem Element $a \in G$ ein bestimmtes Element $a^* \in G^*$ zugeordnet. Wir nennen a ein *Urbild des Elements* a^* und a^* das *Bild des Elements* a in oder bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$, und schreiben $a^* = \boldsymbol{g}(a)$ oder $a^* = \boldsymbol{g}a$; wir sagen auch, a^* sei der *Wert* der Funktion $\boldsymbol{g}$ im Element a. Eine andere Schreibweise ist $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$; durch das Symbol $\begin{pmatrix} a & b & \ldots \\ a^* & b^* & \ldots \end{pmatrix}$ drücken wir die Gleichheiten $a^* = \boldsymbol{g}a$, $b^* = \boldsymbol{g}b, \ldots$ aus.

Wenn A eine Teilmenge in G und A^* die aus den Bildern bei $\boldsymbol{g}$ der einzelnen Elemente von A bestehende Teilmenge in G^* ist, so schreiben wir $A^* = \boldsymbol{g}(A)$ oder $A^* = \boldsymbol{g}A$. Wenn $A \neq \emptyset$ ist, können wir jedem Element $a \in A$ das Element $\boldsymbol{g}a \in G^*$ zuordnen und erhalten so eine Abbildung der Menge A in die Menge G^*. Diese Abbildung nennen wir die durch $\boldsymbol{g}$ bestimmte *partielle Abbildung* (*Funktion*) und bezeichnen sie mit $\boldsymbol{g}_A$.

Nach dem obigen Abbildungsbegriff wird durch eine Abbildung jedem Element der Urbildmenge genau ein Bild zugeordnet. Mit Rücksicht darauf nennt man solche Abbildungen *eindeutig*.

Im Laufe unserer Betrachtungen werden Fälle auftreten, in denen gleichzeitig mehrere Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \ldots$ vorkommen. In solchen Fällen werden wir gelegentlich einzelnen Begriffen das entsprechende Zeichen $\boldsymbol{g}$-, $\boldsymbol{h}$-, ... vorsetzen; z. B. werden wir von $\boldsymbol{g}$-Bildern, $\boldsymbol{h}$-Urbildern usw. sprechen.

2. Abbildung auf eine Menge. Nach der Definition einer Abbildung besitzt jedes Element von G bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ ein bestimmtes Bild in G^*; umgekehrt kann es jedoch in G^* Elemente geben, die keine Urbilder haben. Wenn sich nun die Abbildung $\boldsymbol{g}$ dadurch auszeichnet, daß es in G^* keine urbildlosen Elemente gibt, so sagen wir, *$\boldsymbol{g}$ sei eine Abbildung der Menge G auf die Menge G^** oder *die Funktion $\boldsymbol{g}$ bilde die Menge G auf die Menge G^* ab*. Wenn $\emptyset \neq A \subset G$ ist, so stellt offenbar $\boldsymbol{g}_A$ eine Abbildung der Menge A auf die Menge $\boldsymbol{g}A$ dar.

In Nr. 1 haben wir drei Beispiele von Abbildungen angegeben. In [2] und [3] handelt es sich um Abbildungen auf eine Menge: Zu jeder Klasse gibt es wenigstens einen Schüler, der ihr bei jener Abbildung zugeordnet ist; ähnlich haben wir im Fall von n Dingen bei der Feststellung ihrer Anzahl jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ angewendet. Dagegen stellt [1] ein Beispiel einer Abbildung auf eine Menge nur dann dar, wenn das Theater ausverkauft ist, denn sonst blieben an der Kasse Karten übrig, für die es keine Zuschauer gibt.

3. Schlichte Abbildungen. Der Abbildungsbegriff ist gegenüber den beiden Mengen G, G^* noch in einer anderen Hinsicht unsymmetrisch: Bei einer Abbildung $\boldsymbol{g}$ hat jedes Element in G genau ein Bild in G^*, während umgekehrt ein Element in G^* mehrere, eventuell auch unendlich viele Urbilder in G haben kann.

Wenn nun in einer Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Menge G in die Menge G^* jedes Element in G^* höchstens ein Urbild in G hat, so wird die Abbildung $\boldsymbol{g}$ (*eineindeutig* oder) *schlicht* genannt.

Offenbar ist $\boldsymbol{g}$ dann und nur dann eine schlichte Abbildung der Menge G auf die Menge G^*, wenn es zu jedem Element in G^* genau ein Urbild in G gibt.

Von den obigen Beispielen ist [3] ein Beispiel für die schlichte Abbildung einer Menge auf eine Menge; [2] ist nur in dem (theoretischen) Fall eine schlichte Abbildung, daß in jede Klasse ein einziger Schüler gehört; [1] ist nur dann ein Beispiel für die schlichte Abbildung einer Menge auf eine Menge, wenn das Theater ausverkauft ist und in jeder Loge genau ein Zuschauer der Vorstellung beiwohnt (ein Logenbillet berechtigt im allgemeinen mehrere Zuschauer zur Teilnahme an der Vorstellung).

4. Inverse Abbildung. Äquivalente Mengen. Endliche geordnete Mengen. An den Begriff einer schlichten Abbildung knüpfen sich zwei wichtige Begriffe, der Begriff der inversen Abbildung und der von äquivalenten Mengen.

Inverse Abbildung. Wir nehmen an, daß die Abbildung $\mathfrak{g}$ der Menge G auf die Menge G^* schlicht ist. In diesem Fall können wir eine mit $\mathfrak{g}^{-1}$ zu bezeichnende Abbildung der Menge G^* auf G definieren, und zwar in folgender Weise: Jedem Element $a^* \in G^*$ ist bei der Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$ sein $\mathfrak{g}$-Urbild $a \in G$ zugeordnet. Diese Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$ nennen wir *invers* zur Abbildung $\mathfrak{g}$.

Wenn z. B. das Theater ausverkauft ist und in jeder Loge genau ein Zuschauer der Vorstellung beiwohnt, so ist in der zu der oben besprochenen Abbildung inversen Abbildung jeder Eintrittskarte derjenige Zuschauer zugeordnet, der auf Grund dieser Karte an der Vorstellung teilnimmt.

Offenbar ist die inverse Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$ schlicht, und die zu ihr inverse Abbildung $(\mathfrak{g}^{-1})^{-1}$ ist die Abbildung $\mathfrak{g}$ selbst, also $(\mathfrak{g}^{-1})^{-1} = \mathfrak{g}$.

Äquivalente Mengen. Sind nicht leere Mengen G, G^* gegeben, so braucht es keine Abbildung von G auf G^* zu geben; dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn die Menge G von einem und G^* von zwei Elementen gebildet wird. Umsoweniger braucht es eine schlichte Abbildung von G auf G^* zu geben.

Wir wollen beachten, daß aus der Existenz einer schlichten Abbildung $\mathfrak{g}$ der einen Menge, etwa G, auf die andere, G^*, die Existenz einer schlichten Abbildung, nämlich der Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$, in der umgekehrten Richtung, d. h. von G^* auf G, folgt.

Wenn es eine schlichte Abbildung der Menge G auf G^* gibt, so nennen wir die Menge G^* *mit G äquivalent*. In diesem Fall ist auch die Menge G mit G^* äquivalent. Wegen dieser Symmetrie des Äquivalenzbegriffs sprechen wir im allgemeinen von *äquivalenten Mengen* G, G^*, ohne zu unterscheiden, welche von ihnen mit der anderen äquivalent ist. Für die Äquivalenz der Mengen G, G^* schreiben wir $G^* \simeq G$ oder $G \simeq G^*$.

Zum Beispiel ist jede aus $n\,(> 0)$ Elementen bestehende Menge A mit der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ äquivalent; denn wenn man die Elemente von A beliebig mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnet, so ist dadurch eine schlichte Abbildung der Menge A auf die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben, und zwar die Abbildung $\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ 1 \;\, 2 \;\ldots\; n \end{pmatrix}$.

Endliche geordnete Mengen. Eine von $n\,(> 0)$ Elementen gebildete Menge A heißt *geordnet*, wenn eine schlichte Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf die Menge A gegeben ist; diese Abbildung heißt die *Anordnung* der Menge A. Eine solche Anordnung erhält man z. B. so, daß man für die Elemente der Menge A eine Reihenfolge festsetzt, indem man ein Element $a_1 \in A$ als erstes, ein weiteres $a_2 \in A$ als zweites, usw., und das letzte $a_n \in A$ als n-tes Element bezeichnet. In diesem Fall sagt man, A sei die geordnete endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Dieser Begriff hängt also von der Reihenfolge ab, in der die einzelnen Elemente angegeben, also z. B. ihre Namen gelesen oder geschrieben werden. Unter der *invers geordneten Menge* verstehen wir dann die geordnete endliche Menge $\{a'_1, \ldots, a'_{n-1}, a'_n\}$, wobei $a'_1 = a_n, \ldots, a'_{n-1} = a_2$, $a'_n = a_1$ ist.

5. Die Abbildungszerlegung. Es sei $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G auf G^*. Wie wir bereits bemerkt haben, kann ein Element $a^* \in G^*$ in der Abbildung $\boldsymbol{g}$ mehrere Urbilder in G besitzen.

Wir betrachten das System $\bar{G}$ der aus allen Urbildern der einzelnen Elemente $a^* \in G^*$ gebildeten Teilmengen $\bar{a}$ von G. Die Elemente $\bar{a} \in \bar{G}$ sind also die Teilmengen von G, deren Punkte bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ je auf das gleiche Element $a^* \in G^*$ abgebildet werden. Da die Menge G^* wenigstens von einem Element $a^* \in G^*$ gebildet wird, ist das System $\bar{G}$ nicht leer, da es die Menge $\bar{a}$ der Urbilder von a^* als Element enthält. Da ferner $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G *auf* die Menge G^* darstellt, gibt es zu jedem Element $a^* \in G^*$ wenigstens ein Urbild, und wir sehen, daß die von den Urbildern des Elements $a^* \in G^*$ gebildete Menge $\bar{a} \in \bar{G}$ nicht leer ist. $\bar{G}$ ist also ein nicht leeres System von nicht leeren Teilmengen in G.

Ferner ist leicht einzusehen, daß die Elemente von $\bar{G}$ paarweise disjunkt sind und das System $\bar{G}$ die Menge G bedeckt. Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß jedes Element $a \in G$ ein einziges Bild $a^* \in G^*$ besitzt und folglich genau in einem, und zwar in dem aus den Urbildern von a^* bestehenden Element $\bar{a} \in \bar{G}$ enthalten ist. Damit ist gezeigt, daß das System $\bar{G}$ der aus allen Urbildern der einzelnen Elemente in G^* gebildeten Teilmengen in G eine Zerlegung dieser Menge G darstellt. Wir nennen diese Zerlegung die *Abbildungszerlegung in bezug auf* $\boldsymbol{g}$ oder die *zu der Abbildung* $\boldsymbol{g}$ *gehörige Zerlegung.*

Bei der Abbildung [2] besteht die zu ihr gehörige Zerlegung aus den einzelnen Mengen von Schülern, die je in dieselbe Klasse gehören.

Wir wollen insbesondere die folgenden extremen Fälle beachten: Wenn die Menge G^* aus einem einzigen Element besteht, so ist die Abbildungszerlegung die größte Zerlegung $\bar{G}_{\max}$; wenn die Abbildung $\boldsymbol{g}$ schlicht ist, so stellt die zu ihr gehörige Zerlegung die kleinste Zerlegung $\bar{G}_{\min}$ dar.

6. Abbildungen von Mengen in und auf sich. Die obigen Ausführungen über Abbildungen von Mengen schließen nicht den Fall aus, daß die Mengen G, G^* übereinstimmen. Wenn $G^* = G$ ist, so sprechen wir von Abbildungen der Menge G *in* bzw. *auf sich.*

Wenn man z. B. jeder natürlichen Zahl die um 1 größere Zahl zuordnet, so erhält man eine Abbildung der Menge aller natürlichen Zahlen in sich.

Die einfachste Abbildung der Menge G auf sich definiert man so, daß man jedem Element $a \in G$ dasselbe Element a zuordnet. Dies ist die sogenannte *identische Abbildung* der Menge G auf sich, die wir mit $\boldsymbol{e}$ bezeichnen.

Eine schlichte Abbildung der Menge G auf sich heißt *Permutation* der Menge G. Mit Permutationen von endlichen Mengen werden wir uns in § 8 beschäftigen.

7. Zusammensetzung von Abbildungen. *Der Begriff der zusammengesetzten Abbildungen.* Für unsere Zwecke ist der Begriff der sogenannten zusammengesetzten Abbildung von Wichtigkeit.

Es seien G, H, K nicht leere Mengen und ferner $\boldsymbol{g}$ eine Abbildung der Menge G in H und $\boldsymbol{h}$ eine Abbildung der Menge H in K. Dann ist jedem Element $a \in G$ bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ ein bestimmtes Element $\boldsymbol{g}a \in H$ und diesem wiederum bei der Abbildung $\boldsymbol{h}$ ein bestimmtes Element $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ zugeordnet. Wenn man jedem Element $a \in G$ das Element $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ entsprechen läßt, so erhält man eine Abbildung der Menge G in die Menge K. Diese Abbildung nennt man die *aus den Abbildungen* $\boldsymbol{g}$ *und* $\boldsymbol{h}$ (in dieser Reihenfolge) *zusammengesetzte Abbildung;* wir bezeichnen sie mit $\boldsymbol{hg}$. Die Abbildung $\boldsymbol{hg}$ der Menge G in die Menge K ist also durch die Gültigkeit der für jedes Element $a \in G$ bestehenden Gleichheit $(\boldsymbol{hg})a = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$ gekennzeichnet.

Wir wollen einige spezielle Fälle besprechen.

Wenn die Abbildung $\boldsymbol{g}$ die Menge G *auf* H und die Abbildung $\boldsymbol{h}$ die Menge H *auf* K abbildet, so stellt offenbar $\boldsymbol{hg}$ eine Abbildung der Menge G *auf* K dar.

Wenn die Abbildungen $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{h}$ schlicht sind, so hat auch die Abbildung $\boldsymbol{hg}$ dieselbe Eigenschaft, da dann zwei verschiedene Elemente in G bei der Abbildung $\boldsymbol{g}$ zwei verschiedene Bilder in H haben und diese sich bei der Abbildung $\boldsymbol{h}$ wiederum auf verschiedene Elemente in K abbilden.

Wenn die Menge K mit G zusammenfällt, so daß die Abbildung $\boldsymbol{h}$ die Menge H in die Menge G abbildet, so ist $\boldsymbol{hg}$ eine Abbildung der Menge G in sich oder, wenn es sich um Abbildungen auf die Menge H bzw. G handelt, auf sich; ist insbesondere die Abbildung $\boldsymbol{g}$ schlicht und stimmt $\boldsymbol{h}$ mit der inversen Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ überein, so stellt $\boldsymbol{hg}$ die identische Abbildung der Menge G auf sich dar.

Wenn die Mengen H und K mit G zusammenfallen, so daß $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{h}$ die Menge G in sich abbilden, so ist auch $\boldsymbol{hg}$ eine Abbildung der Menge G in sich oder, wenn es sich um Abbildungen auf die Menge G handelt, eine Abbildung der Menge G auf sich.

Eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{g}$ der Menge G auf sich heißt *involutorisch*, wenn die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{gg}$ mit der identischen Abbildung $\boldsymbol{e}$ der Menge G auf sich übereinstimmt. Offenbar ist die zu einer involutorischen Abbildung $\boldsymbol{g}$ inverse Abbildung $\boldsymbol{g}^{-1}$ mit $\boldsymbol{g}$ identisch, also $\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}$.

Schließlich wollen wir bemerken, daß für die identische Abbildung $\boldsymbol{e}$ der Menge G auf sich und eine beliebige Abbildung $\boldsymbol{g}$ von G in sich die Gleichheiten $\boldsymbol{eg} = \boldsymbol{ge} = \boldsymbol{g}$ gelten.

Als Beispiel einer zusammengesetzten Abbildung führen wir folgendes an: Wenn $\boldsymbol{g}$ die in Nr. 1, [1] beschriebene Abbildung der Menge von Zuschauern in die Menge der für eine Vorstellung ausgegebenen Eintrittskarten bedeutet und $\boldsymbol{h}$ eine Abbildung der Menge dieser Karten in eine Farbenskala darstellt, wobei jede Karte auf ihre Farbe abgebildet wird, so ordnet die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{hg}$ jedem Zuschauer eine Farbe der Skala zu, und zwar die Farbe seiner Karte.

Das Assoziativgesetz über Zusammensetzung von Abbildungen. Wir betrachten drei Abbildungen $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$, wobei $\boldsymbol{k}$ eine Abbildung der Menge K in eine Menge L bedeutet; L kann eventuell mit einigen der Mengen G, H, K zusammenfallen.

Eine wichtige Eigenschaft von zusammengesetzten Abbildungen besteht in der Gültigkeit der Gleichheit

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg}) = (\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}.$$

Diese Eigenschaft wird das *Assoziativgesetz über Zusammensetzung von Abbildungen* genannt. Die obige Gleichheit drückt aus, daß die beiden Abbildungen $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})$ und $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ jedes Element der Menge G je auf dasselbe Element in L abbilden.

Zum Beweis betrachten wir das Bild $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})a$ eines beliebigen Elements $a \in G$ bei der Abbildung $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})$. Nach der Definition von $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})$ fällt das erwähnte Bild mit dem von $(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})a$ bei der Abbildung $\boldsymbol{k}$ zusammen; das Element $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g})a$ wird demnach erhalten, indem man das Element $\boldsymbol{g}a \in H$ auf das Element $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ abbildet und zu diesem sein Bild bei der Abbildung $\boldsymbol{k}$ bestimmt. Nun ist aber nach Definition der Abbildung $\boldsymbol{k}\boldsymbol{h}$ das Bild von $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$ bei der Abbildung $\boldsymbol{k}$ dasselbe wie das Bild von $\boldsymbol{g}a$ bei der Abbildung $\boldsymbol{k}\boldsymbol{h}$, und nach Definition von $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ fällt das $\boldsymbol{k}\boldsymbol{h}$-Bild von $\boldsymbol{g}a$ mit dem Bild von a der Abbildung $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ zusammen. Damit ist die Gültigkeit der obigen Gleichheit bewiesen.

Wir bemerken, daß die in der obigen Gleichheit auf beiden Seiten auftretende Abbildung gewöhnlich mit $\boldsymbol{k}\boldsymbol{h}\boldsymbol{g}$ bezeichnet wird.

8. Die Äquivalenzsätze. Wir wollen nun drei Sätze angeben, die im folgenden *Äquivalenzsätze* genannt werden sollen. Sie können wegen ihrer einfachen Struktur nicht mit Unrecht als Beschreibungen von Beispielen äquivalenter Mengen angesehen werden. Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie die mengentheoretische Struktur der in der Gruppoid- und Gruppentheorie zu behandelnden Isomorphiesätze darlegen.

Satz 1. *Wenn die Menge G auf die Menge G^* abgebildet werden kann, so ist G^* mit einer auf G liegenden Zerlegung äquivalent, und umgekehrt. Die Abbildung der zu einer Abbildung $\boldsymbol{g}$ von G auf G^* gehörigen Zerlegung $\bar{G}$ auf die Menge G^*, bei der jedes Element $\bar{a} \in \bar{G}$ auf das $\boldsymbol{g}$-Bild der in $\bar{a}$ enthaltenen Punkte von G abgebildet wird, ist schlicht.*

Beweis. Kann die Menge G mittels einer Abbildung $\boldsymbol{g}$ auf die Menge G^* abgebildet werden, so ist G^* mit der zu $\boldsymbol{g}$ gehörigen Zerlegung $\bar{G}$ äquivalent. Man erhält eine schlichte Abbildung von $\bar{G}$ auf G^*, indem man jedem Element $\bar{a} \in \bar{G}$ das $\boldsymbol{g}$-Bild der in $\bar{a}$ enthaltenen Punkte $a \in G$ zuordnet. Wenn es umgekehrt eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{i}$ einer auf G liegenden Zerlegung $\bar{G}$ auf die Menge G^* gibt, so kann zunächst G auf $\bar{G}$ abgebildet werden, und zwar so, daß man jedem Punkt $a \in G$ das diesen Punkt enthaltende Element $\bar{a} \in \bar{G}$ zuordnet. Sodann bildet die zusammengesetzte Abbildung $\boldsymbol{i}\boldsymbol{g}$ die Menge G auf die Menge G^* ab, wobei $\bar{G}$ zugleich die zu dieser Abbildung gehörige Zerlegung darstellt.

Satz 2. *Je zwei verknüpfte Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ in G sind äquivalente Mengen, also $\bar{A} \simeq \bar{B}$. Die Abbildung von $\bar{A}$ auf $\bar{B}$, bei der jedes Element in $\bar{A}$ auf das mit ihm inzidente Element in $\bar{B}$ abgebildet wird, ist schlicht.*

Ein wichtiger Spezialfall (§ 4, Nr. 1) dieses Satzes betrifft die Äquivalenz der Hülle und der Durchdringung einer Teilmenge $X \subset G$ und einer Zerlegung $\bar{Y}$ in G: *Für $X \cap \mathbf{s}\bar{Y} \neq \emptyset$ gilt die mittels Inzidenz von Elementen realisierte Äquivalenzbeziehung $X \sqsubset \bar{Y} \simeq \bar{Y} \sqcap X$.*

Satz 3. *Eine beliebige auf einer Zerlegung $\bar{B}$ der Menge G liegende Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ und die durch $\bar{\bar{B}}$ erzwungene Überdeckung $\bar{A}$ der Zerlegung $\bar{B}$ sind äquivalente Mengen, also $\bar{\bar{B}} \simeq \bar{A}$. Die Abbildung der Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ auf die Überdeckung $\bar{A}$, bei der jedes Element $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ auf das durch Summenbildung aller in $\bar{\bar{b}}$ enthaltenen Elemente von $\bar{B}$ entstandene Element $\bar{a} \in \bar{A}$ abgebildet wird, ist schlicht.*

9. Abbildungen von Folgen und von α-Mengengebilden. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einigen komplizierteren Äquivalenzbegriffen beschäftigen, denen wir im Laufe unserer Überlegungen begegnen werden.

1. *Abbildungen von Folgen.* Es sei $\alpha\,(\geqq 1)$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten zwei α-gliedrige Folgen $(a) = (a_1, \ldots, a_\alpha)$, $(b) = (b_1, \ldots, b_\alpha)$.

a) *Unter einer Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Folge (a) auf die Folge (b)* verstehen wir natürlich eine (schlichte (Nr. 10,2)) Abbildung der Gliedermenge von (a) auf diejenige von (b). In einer Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Folge (a) auf die Folge (b) wird also einem jeden Glied a_γ von (a) genau ein Glied $b_\delta = \boldsymbol{a} a_\gamma$ von (b) zugeordnet, wobei zwei Gliedern von (a) mit verschiedenen Indizes wiederum Glieder mit verschiedenen Indizes zugeordnet werden. Eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ von (a) auf (b) kann offenbar durch eine gewisse Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ charakterisiert werden, und zwar im Sinne der Formel $\boldsymbol{a} a_\gamma = b_{\boldsymbol{p}\gamma}$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Natürlich stellt die zu einer Abbildung von (a) auf (b) inverse Abbildung eine Abbildung von (b) auf (a) dar.

Offenbar gibt es (genau $\alpha!$) Abbildungen der Folge (a) auf die Folge (b) und umgekehrt. Diese Tatsache drücken wir so aus, daß die Folgen (a) und (b) äquivalent sind.

b) Wir nehmen an, daß die Glieder $a_1, \ldots, a_\alpha$ von (a) und ebenso die Glieder $b_1, \ldots, b_\alpha$ von (b) nicht leere Mengen darstellen.

Wir nennen die Folge (b) *stark äquivalent mit der Folge* (a), wenn der folgende Sachverhalt vorliegt: Es gibt eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Folge (a) auf die Folge (b) mit folgender Auswirkung: Zu jedem in (a) enthaltenen Glied a_γ gibt es eine Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$, die das Glied a_γ auf das Glied $b_\delta = \boldsymbol{a} a_\gamma$ von (b) punktweise schlicht abbildet.

Wenn die Folge (b) mit der Folge (a) stark äquivalent ist, so hat auch die Folge (a) in bezug auf (b) dieselbe Eigenschaft; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *stark äquivalenten* Folgen (a), (b).

c) Wir nehmen nun an, daß die Glieder $a_1, \ldots, a_\alpha$ von (a) und ebenso die Glieder $b_1, \ldots, b_\alpha$ von (b) Zerlegungen in der Menge G darstellen.

Wir nennen die Folge (b) *halbverknüpft* (*verknüpft*) *mit der Folge* (a), wenn der folgende Sachverhalt vorliegt: Es gibt eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Folge (a) auf die Folge (b) derart, daß jedes in (a) enthaltene Glied a_γ mit seinem $\boldsymbol{a}$-Bild $b_\delta = \boldsymbol{a} a_\gamma$ von (b) halbverknüpft (verknüpft) ist.

Wenn die Folge (b) mit der Folge (a) halbverknüpft (verknüpft) ist, so hat auch die Folge (a) in bezug auf (b) dieselbe Eigenschaft; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *halbverknüpften* (*verknüpften*) *Folgen* (a), (b).

Wir nehmen an, die Folge (b) sei mit der Folge (a) halbverknüpft, und bezeichnen mit $\boldsymbol{a}$ die entsprechende Abbildung von (a) auf (b). Wir betrachten ein beliebiges Glied a_γ von (a) und sein $\boldsymbol{a}$-Bild $b_\delta = \boldsymbol{a} a_\gamma$ in (b). Dann sind die beiden Hüllen $\mathrm{H} a_\gamma = b_\delta \sqsubset a_\gamma$, $\mathrm{H} b_\delta = a_\gamma \sqsubset b_\delta$ von der Nullmenge $\emptyset$ verschieden und verknüpft (§ 4, Nr. 1). Nach dem zweiten Äquivalenzsatz (Nr. 8) ist die Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ der Hülle $\mathrm{H} a_\gamma$ auf die Hülle $\mathrm{H} b_\delta$, in der jedes Element in $\mathrm{H} a_\gamma$ auf das mit ihm inzidente Element in $\mathrm{H} b_\delta$ abgebildet wird, schlicht. Wenn insbesondere die Folge (b) mit der Folge (a) verknüpft ist, so gilt $\mathrm{H} a_\gamma = a_\gamma$, $\mathrm{H} b_\delta = b_\delta$. Wir sehen, daß *zwei verknüpfte Folgen stets stark äquivalent sind.*

2. *Abbildungen von α-Mengengebilden.* Es seien $\alpha (\geqq 1)$ eine natürliche Zahl und $((A) =)\ (A_1, \ldots, A_\alpha)$, $((B) =)\ (B_1, \ldots, B_\alpha)$ zwei beliebige Folgen von nicht leeren Mengen. Ferner sei $\mathbb{A}$ ein α-Mengengebilde bezüglich der Mengenfolge (A) und $\mathbb{B}$ ein solches bezüglich der Mengenfolge (B) (§ 1, Nr. 9).

Wir wollen daran erinnern, daß jedes Element $\bar{a} \in \mathbb{A}$ $(\bar{b} \in \mathbb{B})$ eine α-gliedrige Mengenfolge ist, $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$ $(\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha))$, wobei jedes Glied $\bar{a}_\gamma$ $(\bar{b}_\gamma)$ eine nicht leere Teilmenge in $A_\gamma (B_\gamma)$ darstellt $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Wir nehmen an, daß es eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{f}$ des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ gibt.

a) Wir nennen die Abbildung $\boldsymbol{f}$ *starke Äquivalenz des α-Mengengebildes* $\mathbb{A}$ *auf das α-Mengengebilde* $\mathbb{B}$, wenn der folgende Sachverhalt vorliegt:

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Zu jedem in einem beliebigen Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \mathbb{A}$ enthaltenen Glied $\bar{a}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ gibt es eine Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$, die das Glied $\bar{a}_\gamma$ auf das in dem Element $\boldsymbol{f}\bar{a} = \bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \mathbb{B}$ enthaltene Glied $\bar{b}_\delta$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, punktweise schlicht abbildet.

Es ist leicht einzusehen, daß die zu einer starken Äquivalenz $\boldsymbol{f}$ des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ inverse Abbildung $\boldsymbol{f}^{-1}$ eine starke Äquivalenz des α-Mengengebildes $\mathbb{B}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{A}$ darstellt.

Wenn es eine starke Äquivalenz des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ gibt, nennen wir $\mathbb{B}$ *stark äquivalent mit* $\mathbb{A}$. Offenbar ist dieser Begriff der starken Äquivalenz symmetrisch in bezug auf die beiden α-Mengengebilde $\mathbb{A}, \mathbb{B}$; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *stark äquivalenten α-Mengengebilden* $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

b) Wir nehmen nun an, daß die Mengenfolgen (A) und (B) von Zerlegungen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ und $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_\alpha$ in der Menge G gebildet werden. In diesem Fall ist also jedes Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \mathbb{A}$ $(\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \mathbb{B})$ eine α-gliedrige Folge, von der jedes Glied $\bar{a}_\gamma (\bar{b}_\gamma)$ eine aus gewissen Elementen der Zerlegung $\bar{A}_\gamma (\bar{B}_\gamma)$ bestehende Zerlegung in der Menge G darstellt $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Wir nennen die Abbildung $\boldsymbol{f}$ *Äquivalenz mit Halbverknüpfung* (*Äquivalenz mit Verknüpfung*) des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$, wenn der folgende Sachverhalt vorliegt:

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Jedes in einem beliebigen Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \mathbb{A}$ enthaltene Glied $\bar{a}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ und das in dem Element $\boldsymbol{f}\bar{a} = \bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \mathbb{B}$ enthaltene Glied $\bar{b}_\delta$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, stellen halbverknüpfte (verknüpfte) Zerlegungen in G dar.

Es ist leicht einzusehen, daß die zu einer Äquivalenz $\boldsymbol{f}$ mit Halbverknüpfung bzw. Äquivalenz mit Verknüpfung des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ inverse Abbildung $\boldsymbol{f}^{-1}$ eine Äquivalenz derselben Art des α-Mengengebildes $\mathbb{B}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{A}$ darstellt.

Es sei $\boldsymbol{f}$ eine Äquivalenz mit Halbverknüpfung des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$. Wir betrachten zwei in der oben beschriebenen Beziehung stehende Glieder $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\delta$, so daß $\bar{a}_\gamma$ in $\bar{a}$, $\bar{b}_\delta$ in $\boldsymbol{f}\bar{a} = \bar{b}$ enthalten und $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ ist. Dann sind die beiden Hüllen $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{b}_\delta \sqsubset \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\delta = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{b}_\delta$ von der Nullmenge $\emptyset$ verschieden und verknüpft (§ 4, Nr. 1). Nach dem zweiten Äquivalenzsatz (Nr. 8) ist die Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ der Hülle $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ auf die Hülle $\mathrm{H}\bar{b}_\delta$, in der jedes Element in $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ auf das mit ihm inzidente Element in $\mathrm{H}\bar{b}_\delta$ abgebildet wird, schlicht. Ist $\boldsymbol{f}$ insbesondere eine Äquivalenz mit Verknüpfung, so gilt $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\delta = \bar{b}_\delta$. Wir sehen, daß *jede Äquivalenz mit Verknüpfung des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ eine starke Äquivalenz darstellt.*

Wenn es eine Äquivalenz mit Halbverknüpfung (Äquivalenz mit Verknüpfung) des α-Mengengebildes $\mathbb{A}$ auf das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ gibt, so nennen wir das α-Mengengebilde $\mathbb{B}$ *äquivalent und halbverknüpft* (*äquivalent und verknüpft*) mit dem α-Mengengebilde $\mathbb{A}$. Offenbar sind diese Begriffe in bezug auf die beiden α-Mengengebilde $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ symmetrisch; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *äquivalenten und halbverknüpften* (*äquivalenten und verknüpften*) *α-Mengengebilden* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$. *Insbesondere sind zwei äquivalente und verknüpfte α-Mengengebilde* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *stark äquivalent.*

10. Übungsaufgaben.

1. Der Leser möge sich die mit dem Abbildungsbegriff zusammenhängenden Umstände an Beispielen von einfachen Funktionen einer reellen Veränderlichen, wie $y = ax + b$, $y = x^2$ u. a. klarmachen.

2. Wenn die Menge G endlich ist und G^* eine Menge von derselben Ordnung darstellt, so gilt: a) Jede Abbildung der Menge G *auf* die Menge G^* ist schlicht; b) jede *schlichte* Abbildung der Menge G in die Menge G^* stellt eine Abbildung *auf* die Menge G^* dar.

3. Es sei $A \subset G$ eine Teilmenge in G. Man definiert eine Abbildung $\boldsymbol{g}[A]$ der Menge G in die Menge $\{0,1\}$ so, daß für $a \in G$ entweder $\boldsymbol{g}[A]a = 1$ oder 0 ist, je nachdem, ob a in A liegt oder nicht. Es soll die Gültigkeit der folgenden Beziehungen gezeigt werden:
a) $\boldsymbol{g}[A \cap B]a = (\boldsymbol{g}[A]a) \cdot (\boldsymbol{g}[B]a) = \mathrm{Min}(\boldsymbol{g}[A]a, \boldsymbol{g}[B]a)$;
b) $\boldsymbol{g}[A \cup B]a = \mathrm{Max}(\boldsymbol{g}[A]a, \boldsymbol{g}[B]a)$;
c) im Fall $A \cap B = \emptyset$ besteht die Gleichheit $\boldsymbol{g}[A \cup B]a = \boldsymbol{g}[A]a + \boldsymbol{g}[B]a$.

4. Es sei a eine (reelle) Zahl. Man definiert eine Abbildung $\boldsymbol{f}[a]$ einer Geraden auf sich so, daß jedem Punkt mit der Koordinate x der Punkt mit der Koordinate $x' = x + a$ zugeordnet wird. Analog wird die Abbildung $\boldsymbol{g}[a]$ mit Hilfe der Formel $x' = -x + a$ erklärt. Die Entfernung zweier Punkte der Geraden, d. h. der absolute Betrag der Differenz ihrer Koordinaten, und diejenige ihrer Bilder bei den Abbildungen $\boldsymbol{f}[a]$, $\boldsymbol{g}[a]$ sind einander gleich. Bei der Abbildung $\boldsymbol{f}[a]$ wird kein Punkt der Geraden auf sich abgebildet, es sei denn, daß $a = 0$ ist; in diesem Fall stellt $\boldsymbol{f}[a]$ die identische Abbildung der Geraden auf sich dar. Bei der Abbildung $\boldsymbol{g}[a]$ wird genau ein Punkt der Geraden auf sich abgebildet. Das Zusammensetzen der Abbildungen verhält sich nach den folgenden Formeln:

$$\boldsymbol{f}[b]\boldsymbol{f}[a] = \boldsymbol{f}[a + b]; \qquad \boldsymbol{g}[b]\boldsymbol{f}[a] = \boldsymbol{g}[-a + b];$$
$$\boldsymbol{f}[b]\boldsymbol{g}[a] = \boldsymbol{g}[a + b]; \qquad \boldsymbol{g}[b]\boldsymbol{g}[a] = \boldsymbol{f}[-a + b].$$

Wir bemerken, daß die Abbildungen $f[a]$ und $g[a]$ *euklidische Bewegungen auf der Geraden* genannt werden.

5. Es seien α, a, b (reelle) Zahlen. Man definiert eine Abbildung $f[\alpha; a, b]$ einer Ebene auf sich so, daß jedem Punkt mit den Koordinaten x, y der Punkt mit den Koordinaten

$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha + a,$$
$$y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + b$$

zugeordnet wird. Analog wird die Abbildung $g[\alpha; a, b]$ mit Hilfe der Formeln

$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha + a,$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha + b$$

definiert. Die Entfernung zweier Punkte der Ebene mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2, d. h. die Zahl $\left|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right|$, und diejenige ihrer Bilder bei den erwähnten Abbildungen sind einander gleich. Bei der Abbildung $f[\alpha; a, b]$, und zwar für $\alpha = m \cdot 2\pi$ (m ganz), wird kein Punkt der Ebene auf sich abgebildet, es sei denn, daß $a = b = 0$ ist; in diesem Fall stellt diese Abbildung die identische Abbildung der Ebene auf sich dar. Wenn α kein ganzes Vielfaches von 2π ist, so wird genau ein Punkt der Ebene auf sich abgebildet. Bei der Abbildung $g[\alpha; a, b]$ bildet sich kein Punkt der Ebene auf sich ab, es sei denn, daß

$$a \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha + b \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha = 0$$

ist; in diesem Fall erzeugen die Punkte, die auf sich abgebildet werden, eine Gerade. Das Zusammensetzen der Abbildungen $f[\alpha; a, b]$, $g[\alpha; a, b]$ verhält sich nach den folgenden Formeln:

$$f[\beta; c, d]\, f[\alpha; a, b] = f[\alpha + \beta; a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta + c, -a \cdot \sin\beta + b \cdot \cos\beta + d],$$
$$g[\beta; c, d]\, f[\alpha; a, b] = g[\alpha + \beta; a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta + c, \quad a \cdot \sin\beta - b \cdot \cos\beta + d],$$
$$f[\beta; c, d]\, g[\alpha; a, b] = g[\alpha - \beta; a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta + c, -a \cdot \sin\beta + b \cdot \cos\beta + d],$$
$$g[\beta; c, d]\, g[\alpha; a, b] = f[\alpha - \beta; a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta + c, \quad a \cdot \sin\beta - b \cdot \cos\beta + d].$$

Wir bemerken, daß die Abbildungen $f[\alpha; a, b]$ und $g[\alpha; a, b]$ *euklidische Bewegungen in der Ebene* genannt werden.

6. Eine α-gliedrige (unendliche) Folge ist die Gesamtheit der Bilder bei einer Abbildung der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ ($\{1, 2, \ldots\}$) auf eine Menge A (§ 1, Nr. 7).

7. Über die Äquivalenz von nicht leeren Mengen A, B, C gelten folgende Aussagen: a) $A \simeq A$ (*Reflexivität*); b) aus $A \simeq B$ folgt $B \simeq A$ (*Symmetrie*); c) aus $A \simeq B$, $B \simeq C$ folgt $A \simeq C$ (*Transitivität*) (Nr. 4).

8. Es seien g, h Abbildungen der Menge G in sich und $\bar{G}_g$, $\bar{G}_h$, $\bar{G}_{hg}$ die zu den Abbildungen g, h, hg gehörigen Zerlegungen der Menge G. Es soll die Gültigkeit der folgenden Beziehungen gezeigt werden:

a) $hgG \subset hG, \qquad \bar{G}_{hg} \geq \bar{G}_g$;

b) aus $hgG = hG$ folgt $gG \sqsubset \bar{G}_h = \bar{G}_h$, und umgekehrt;

c) aus $\bar{G}_{hg} = \bar{G}_g$ folgt $gG \sqcap \bar{G}_h = (\overline{gG})_{\min}$, und umgekehrt

($(\overline{gG})_{\min}$ bedeutet die kleinste Zerlegung der Menge gG).

9. Zwei adjungierte Ketten von Zerlegungen in G besitzen stets verknüpfte Verfeinerungen. (Zum Beweis wird die in § 4, Nr. 2 beschriebene Konstruktion verwendet.)