Offenbar gehören die kartesischen Produkte zu den oben erwähnten Mengen, die von endlichen Folgen gebildet werden. Wir wollen auf diese Begriffe nicht näher eingehen, da sie in unseren weiteren Ausführungen nicht mehr auftreten werden.

**9. $\alpha$-Mengengebilde.** In unseren weiteren Betrachtungen werden wir auch komplizierteren, auf dem Mengenbegriff beruhenden Gebilden begegnen. Wir wollen hier insbesondere die sogenannten $\alpha$-Mengengebilde erwähnen.

Es sei $\alpha(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl und $((A) =)\ (A_1, \ldots, A_\alpha)$ eine Folge von nicht leeren Mengen.

Unter einem *$\alpha$-Mengengebilde bezüglich der Mengenfolge* $(A)$ verstehen wir eine nicht leere Menge $\mathbb{A}$ von folgender Struktur:

Die Elemente $\bar{a} \in \mathbb{A}$ sind $\alpha$-gliedrige Folgen; das Glied $\bar{a}_\gamma$ vom Rang $\gamma$ $(= 1, \ldots, \alpha)$ der Folge $\bar{a}$ ist jeweils eine nicht leere Teilmenge in $A_\gamma$.

Wir werden insbesondere den Fall zu betrachten haben, daß die Mengen $A_1, \ldots, A_\alpha$ von nicht leeren Mengen gebildet werden, also nicht leere Systeme $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ von nicht leeren Mengen darstellen. Solche $\alpha$-Mengengebilde $\mathbb{A}$ haben also die folgende Struktur: Die Elemente $\bar{a} \in \mathbb{A}$ sind $\alpha$-gliedrige Folgen; das Glied $\bar{a}_\gamma$ vom Rang $\gamma$ $(= 1, \ldots, \alpha)$ der Folge $\bar{a}$ ist jeweils ein nicht leeres System von nicht leeren Mengen, die als Elemente in dem System $\bar{A}_\gamma$ vorkommen.

**10. Übungsaufgaben.**

1. $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.
2. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
3. Aus $A \subset B$ folgt $A \cup B = B$, $A \cap B = A$. Gilt umgekehrt eine dieser beiden Gleichheiten, so ist $A \subset B$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. In einer endlichen Menge mit $n(\geqq 0)$ Elementen gibt es genau $2^n$ verschiedene Teilmengen.
7. Das kartesische Produkt einer endlichen Menge mit $m(\geqq 0)$ und einer solchen mit $n(\geqq 0)$ Elementen enthält genau $m\,n$ Elemente.
8. Eine Teilmenge in dem kartesischen Produkt $A \times B$ braucht nicht das kartesische Produkt einer Teilmenge von $A$ und einer Teilmenge von $B$ zu sein.

## § 2. Zerlegungen in Mengen

Unsere folgenden Ausführungen knüpfen an die Betrachtung einer nicht leeren Menge an, die wir stets mit $G$ bezeichnen wollen.

**1. Zerlegung in einer Menge.** Unter einer *Zerlegung in* $G$ verstehen wir ein nicht leeres System von nicht leeren, paarweise disjunkten Teilmengen in $G$.

Der Begriff der Zerlegung in einer Menge gehört zu den wichtigsten, die in sämtlichen weiteren Untersuchungen vorkommen, und bildet die mengentheoretische Grundlage für die aufzubauende Gruppoid- und Gruppentheorie. Der Leser möge insbesondere beachten, daß je zwei verschiedene Elemente einer Zerlegung in einer Menge stets disjunkt sind, also keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Ein einfaches Beispiel einer Zerlegung etwa in der in § 1, Nr. 1 [2] beschriebenen Menge stellt das folgende, von einem einzigen Element gebildete System dar: Dieses Element sei die aus den auf S. 7 dieses Buches vorkommenden Wörtern bestehende Menge. Allgemeiner ist das aus einer nicht leeren Teilmenge in $G$ bestehende System eine Zerlegung in $G$. Das System der Mengen aus § 1, Nr. 1 [4] stellt eine unendliche Zerlegung in der Menge aller natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ dar.

**2. Zerlegung auf einer Menge.** Es sei $\bar{A}$ eine Zerlegung in $G$. Ein Element von $G$ kann höchstens in einem Element von $\bar{A}$ als Punkt vorkommen, da zwei verschiedene Elemente dieser Zerlegung keine gemeinsamen Punkte haben. Es kann natürlich der Fall eintreten, daß ein Element von $G$ in keinem Element von $\bar{A}$ liegt.

Wenn die Zerlegung $\bar{A}$ so beschaffen ist, daß jedes Element von $G$ in einem Element von $\bar{A}$ als Punkt vorkommt, so sagen wir, daß *die Zerlegung $\bar{A}$ die Menge $G$ bedeckt*, oder, „*$\bar{A}$ ist eine Zerlegung auf der Menge $G$*“, „*$\bar{A}$ ist eine Zerlegung der Menge $G$*“ oder „*$\bar{A}$ liegt auf der Menge $G$*“.

Ist also $\bar{A}$ eine Zerlegung auf $G$, so gibt es zu jedem Element $a \in G$ ein Element $\bar{a} \in \bar{A}$ derart, daß $a \in \bar{a}$ ist. Zum Beispiel stellt das letzte der oben angeführten Beispiele von Zerlegungen in einer Menge eine Zerlegung auf der Menge aller natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ dar. Jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ ist nämlich entweder eine Primzahl oder das Produkt von einigen Primzahlen, also jedenfalls in einem Element der erwähnten Zerlegung enthalten.

Wichtige Zerlegungen auf der Menge $G$ sind die sogenannten *extremen Zerlegungen*, und zwar die größte und die kleinste Zerlegung der Menge $G$. Unter der *größten Zerlegung* $\bar{G}_{\max}$ von $G$ verstehen wir die aus dem einzigen Element $G$ bestehende Zerlegung der Menge $G$. Unter der *kleinsten Zerlegung* $\bar{G}_{\min}$ von $G$ verstehen wir das System aller von je einem Element von $G$ gebildeten Mengen. Zum Beispiel wird auf der Menge aller natürlichen Zahlen (§ 1, 1 [3]) die größte Zerlegung von dieser Menge selbst, die kleinste von allen je aus einer natürlichen Zahl bestehenden Mengen gebildet.

Wir wollen beachten, daß eine Zerlegung $\bar{A}$ in der Menge $G$ zugleich eine Zerlegung auf der Menge $\mathbf{s}\bar{A}$ darstellt. Diese Tatsache ermöglicht es, Eigenschaften von Zerlegungen in Mengen weitgehend durch diejenigen von Zerlegungen auf Mengen zu beschreiben.

**3. Hülle und Durchdringung.** Es sei $\bar{A}$ eine Zerlegung und $B$ eine Untermenge in $G$.

Unter der *Hülle* der Untermenge $B$ in der Zerlegung $\bar{A}$ verstehen wir die Menge aller mit $B$ inzidenten Elemente von $\bar{A}$, die wir mit $B \sqsubset \bar{A}$ oder $\bar{A} \sqsupset B$ bezeichnen. Da jedes mit $B$ inzidente Element von $\bar{A}$ zugleich mit $B \cap \mathbf{s}\bar{A}$ inzident ist und umgekehrt, gilt $B \sqsubset \bar{A} = (B \cap \mathbf{s}\bar{A}) \sqsubset \bar{A}$. Wir sehen, daß die Hülle $B \sqsubset \bar{A}$ eine Teilmenge von $\bar{A}$ ist, die unter Umständen mit $\bar{A}$ zusammenfallen oder auch leer sein kann. Der erste Fall, $B \sqsubset \bar{A} = \bar{A}$, tritt dann und nur dann ein, wenn jedes Element von $\bar{A}$ mit $B$ inzident ist, der zweite Fall, $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$, genau dann, wenn kein Element von $\bar{A}$ mit $B$ inzident ist. Es ist leicht einzusehen, daß der Fall $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ durch $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = \emptyset$ charakterisiert ist. Wenn die Hülle $B \sqsubset \bar{A}$ nicht leer ist, so stellt sie natürlich eine Zerlegung in $G$ dar.

Unter der *Durchdringung* der Zerlegung $\bar{A}$ (der Untermenge $B$) mit der Untermenge $B$ (der Zerlegung $\bar{A}$) verstehen wir die Menge aller nicht leeren Durchschnitte der einzelnen Elemente von $\bar{A}$ mit der Untermenge $B$. Diese Durchdringung wird mit $\bar{A} \sqcap B$ oder $B \sqcap \bar{A}$ bezeichnet. Wir sehen, daß auch die Durchdringung $\bar{A} \sqcap B$ unter Umständen leer sein kann. Dies tritt genau dann ein, wenn kein Element von $\bar{A}$ mit $B$ inzident ist, und wir wissen, daß dieser Fall durch $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = \emptyset$ charakterisiert ist. Wenn die Durchdringung $\bar{A} \sqcap B$ nicht leer ist, so stellt sie eine Zerlegung in $G$, ja sogar in $B$ dar. Es ist zu beachten, daß diese Zerlegung $\bar{A} \sqcap B$ zugleich eine Zerlegung auf der Menge $B \cap \mathbf{s}\bar{A}$ ist. Offenbar gilt $\mathbf{s}(\bar{A} \sqcap B) = B \cap \mathbf{s}\bar{A}$.

Wir sehen, daß die Hülle $B \sqsubset \bar{A}$ und die Durchdringung $B \sqcap \bar{A}$ immer zugleich nicht leer oder leer sind, je nachdem, ob $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$ oder $= \emptyset$ ist. Wenn $B \neq \emptyset$ ist und die Zerlegung $\bar{A}$ die Menge $G$ bedeckt, so sind $B \sqsubset \bar{A}$ und $B \sqcap \bar{A}$ nicht leere Mengen, von denen die erste eine Teilmenge in $\bar{A}$ und die zweite eine Zerlegung auf $B$ darstellt. Demnach bestimmt jede nicht leere Untermenge $B \subset G$ und eine Zerlegung $\bar{A}$ auf $G$ einerseits eine Teilmenge in $\bar{A}$, und zwar die Hülle $B \sqsubset \bar{A}$, und andererseits eine Zerlegung auf $B$, die Durchdringung $B \sqcap \bar{A}$.

Wir wollen nun die Begriffe der Hülle und der Durchdringung dahin erweitern, daß statt einer Untermenge eine Zerlegung umhüllt bzw. durchdrungen wird.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen in $G$.

Unter der *Hülle* der Zerlegung $\bar{B}$ in $\bar{A}$ verstehen wir die Menge aller mit irgendeinem Element von $\bar{B}$ inzidenten Elemente von $\bar{A}$ und schreiben $\bar{B} \sqsubset \bar{A}$ oder $\bar{A} \sqsupset \bar{B}$. Da jedes mit einem Element von $\bar{B}$ inzidente Element von $\bar{A}$ zugleich mit $\mathbf{s}\bar{B}$ inzident ist und umgekehrt, gilt $\bar{B} \sqsubset \bar{A} = \mathbf{s}\bar{B} \sqsubset \bar{A}$. Durch diese Gleichheit wird der neue Begriff der Hülle auf den vorgehenden der Hülle einer Untermenge in einer Zerlegung zurückgeführt. Wenn die Zerlegung $\bar{B}$ aus dem einzigen Element $B$ besteht, so ist $\bar{B} \sqsubset \bar{A} = B \sqsubset \bar{A}$.

Unter der *Durchdringung* der Zerlegung $\bar{A}$ mit der Zerlegung $\bar{B}$ verstehen wir die Menge aller nicht leeren Durchschnitte der einzelnen Elemente von $\bar{A}$ mit den Elementen von $\bar{B}$. Diese Durchdringung bezeichnen wir mit $\bar{A} \sqcap \bar{B}$. Aus der Definition sehen wir, daß $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{B} \sqcap \bar{A}$ ist. In Hinsicht auf diese Symmetrie sprechen wir auch von der *Durchdringung der Zerlegungen* $\bar{A}, \bar{B}$. Da für je zwei Elemente $\bar{a} \in \bar{A}, \bar{b} \in \bar{B}$ die Beziehung $\bar{a} \cap \bar{b} = (\bar{a} \cap \mathbf{s}\bar{B}) \cap (\bar{b} \cap \mathbf{s}\bar{A})$ besteht, gilt $\bar{A} \sqcap \bar{B} = (\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}) \sqcap (\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A})$. Jede der beiden Mengen $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}$, $\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$ ist eine Zerlegung von $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B}$ oder ist leer, je nachdem, ob $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} \neq \emptyset$ oder $= \emptyset$ ist. Wir sehen, daß die Durchdringung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ im Fall $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} \neq \emptyset$ mit einer der beiden auf $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B}$ liegenden Zerlegungen $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}$, $\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$ zusammenfällt, während sie im Fall $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} = \emptyset$

die Nullmenge darstellt. Wir wollen beachten, daß die Durchdringung von zwei auf derselben Menge liegenden Zerlegungen immer eine Zerlegung dieser Menge ist. Wenn die Zerlegung $\bar{B}$ aus dem einzigen Element $B$ besteht, so ist $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{A} \sqcap B$.

**4. Überdeckung und Verfeinerung einer Zerlegung.** Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen in $G$.

Wir nennen die Zerlegung $\bar{A}(\bar{B})$ *Überdeckung* (*Verfeinerung*) von $\bar{B}(\bar{A})$, wenn jedes Element von $\bar{A}$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{B}$ und zugleich jedes Element von $\bar{B}$ in einem Element von $\bar{A}$ als Teilmenge enthalten ist. Diese Beziehung der Überdeckung bzw. Verfeinerung zwischen den beiden Zerlegungen drücken wir durch $\bar{A} \geqq \bar{B}$ oder $\bar{B} \leqq \bar{A}$ aus. Wir sehen, daß nach dieser Definition die Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nur dann möglich ist, wenn die beiden Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ auf derselben Menge $\mathbf{s}\bar{A} = \mathbf{s}\bar{B}$ liegen. Wenn $\bar{A} \geqq \bar{B}$ und zugleich $\bar{A} \neq \bar{B}$ ist, so wird die Überdeckung (Verfeinerung) $\bar{A}$ ($\bar{B}$) von $\bar{B}$ ($\bar{A}$) *echt* genannt; in diesem Fall schreiben wir gelegentlich auch $\bar{A} > \bar{B}$ oder $\bar{B} < \bar{A}$. Wir wollen auch folgendes beachten: Bedecken die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ die Menge $G$, so ist $\bar{A}$ eine Überdeckung von $\bar{B}$, wenn jedes Element von $\bar{A}$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{B}$ ist.

Es sei nun $\bar{A} \geqq \bar{B}$. Dann ist jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{B}$, und man sieht, daß diese Elemente eine Zerlegung von $\bar{a}$ bilden. Ferner sieht man, daß das System aller Teilmengen in $\bar{B}$, die von den je in einem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ enthaltenen Elementen von $\bar{B}$ gebildet werden, eine Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ auf $\bar{B}$ darstellt. Wir sagen, $\bar{A}$ sei die durch diese Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ *erzwungene Überdeckung* von $\bar{B}$. Zusammenfassend gilt: Man erhält die Verfeinerung $\bar{B}$ von $\bar{A}$, indem man jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ durch eine passende Zerlegung desselben ersetzt. Man erhält die Überdeckung $\bar{A}$ von $\bar{B}$ mit Hilfe einer passenden Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ auf $\bar{B}$ und der Bildung von Summen aller je in einem Element von $\bar{\bar{B}}$ enthaltenen Elemente von $\bar{B}$.

**5. Ketten von Zerlegungen.** Es seien $A \supset B$ nicht leere Untermengen in $G$.

Unter einer *Kette von Zerlegungen von $A$ nach $B$* oder *Kette von $A$ nach $B$* verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha (\geqq 1)$ Zerlegungen $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_\alpha$ in $G$ mit den folgenden Eigenschaften: a) $\bar{K}_1$ liegt auf $A$; b) $\bar{K}_{\gamma+1}$ liegt auf einem Element von $\bar{K}_\gamma$ für $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$; c) $B \in \bar{K}_\alpha$. Eine solche Kette wird mit

$$\bar{K}_1 \to \cdots \to \bar{K}_\alpha$$

oder kürzer mit $[\bar{K}]$ bezeichnet. Für $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ bezeichnen wir die Menge $\mathbf{s}\bar{K}_\gamma$ mit $\bar{a}_\gamma$; es ist also insbesondere $\bar{a}_1 = A$. Außerdem setzen wir $\bar{a}_{\alpha+1} = B$. Aus der Definition der Kette folgen die Beziehungen $\bar{a}_2 \in \bar{K}_1, \ldots, \bar{a}_{\alpha+1} \in \bar{K}_\alpha$ und ferner $A = \bar{a}_1 \supset \ldots \supset \bar{a}_{\alpha+1} = B$. Die Mengen $A, B$ werden *Enden der Kette* $[\bar{K}]$ genannt. Man sieht, daß jedes Element von $\bar{K}_\alpha$ ein Ende der Kette $[\bar{K}]$ darstellen kann. Die Zerlegungen $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_\alpha$ werden als *Glieder der Kette* $[\bar{K}]$ bezeichnet. $\bar{K}_1$ heißt das *Anfangs-* und $\bar{K}_\alpha$ das *Endglied der Kette* $[\bar{K}]$. Unter der *Länge der Kette* $[\bar{K}]$ verstehen wir die Anzahl $\alpha$ der Glieder in $[\bar{K}]$.

Einen wichtigen Typus von Ketten von Zerlegungen bilden die sogenannten elementaren Ketten über einer Zerlegung.

Es sei $\bar{A}$ eine Zerlegung in $G$ und $B$ ein Element von $\bar{A}$, also $B \in \bar{A}$. Wir setzen $A = \mathbf{s}\,\bar{A}$. Unter einer *elementaren Kette von Zerlegungen von $A$ nach $B$ über $\bar{A}$* oder *elementaren Kette über $\bar{A}$* verstehen wir eine Kette von Zerlegungen von $A$ nach $B$,

$$([\mathring{K}] =)\, \mathring{K}_1 \to \cdots \to \mathring{K}_\alpha,$$

die so beschaffen ist, daß für $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ das Glied $\mathring{K}_\gamma$ die Zerlegung $(\bar{A}_\gamma =)\, \bar{A} \sqcap \bar{a}_\gamma$ überdeckt; dabei ist $\bar{a}_\gamma = \mathbf{s}\mathring{K}_\gamma (\bar{a}_1 = A)$.

In einer solchen Kette ist also zuerst die Zerlegung $\mathring{K}_1$ eine Überdeckung von $\bar{A}_1 (= \bar{A})$. Ferner gibt es in $\bar{a}_1 (= A)$ genau eine durch die Beziehungen $B \subset \bar{a}_2 \in \mathring{K}_1$ bestimmte Teilmenge $\bar{a}_2$. Auf dieser liegt die Zerlegung $(\bar{A}_2 =)$ $\bar{A} \sqcap \bar{a}_2$. Diese Zerlegung $\bar{A}_2$ enthält die Menge $B$ als Element und ist eine Teilmenge von $\bar{A}_1$. Ferner ist die Zerlegung $\mathring{K}_2$ eine Überdeckung von $\bar{A}_2$. Wiederum gibt es in $\bar{a}_2$ genau eine durch die Beziehungen $B \subset \bar{a}_3 \in \mathring{K}_2$ bestimmte Teilmenge $\bar{a}_3$. Auf ihr liegt die Zerlegung $(\bar{A}_3 =)\, \bar{A} \sqcap \bar{a}_3$. Diese Zerlegung $\bar{A}_3$ enthält die Menge $B$ als Element und ist eine Teilmenge von $\bar{A}_2$. Ferner ist die Zerlegung $\mathring{K}_3$ eine Überdeckung von $\bar{A}_3$, usw. Schließlich ist die Zerlegung $\mathring{K}_\alpha$ eine Überdeckung von $(\bar{A}_\alpha =)\, \bar{A} \sqcap \bar{a}_\alpha$, und es gilt die Beziehung $B \in \mathring{K}_\alpha$.

Zum Beispiel ist die aus der einzigen Zerlegung $\bar{A}$ bestehende Kette eine elementare Kette von $A$ nach $B$ über $\bar{A}$ (von der Länge 1). Wenn man vor (hinter) die Zerlegung $\bar{A}$ eine beliebige endliche Anzahl von größten Zerlegungen der Menge $A\,(B)$ hinzufügt, so erhält man ebenfalls eine elementare Kette von $A$ nach $B$ über $\bar{A}$.

Wir betrachten eine beliebige Kette $([\bar{K}] =)\, \bar{K}_1 \to \cdots \to \bar{K}_\alpha$ von $A$ nach $B$ und wenden die obigen Bezeichnungen an.

Wenn eine Zerlegung $\bar{K}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ von der größten Zerlegung der Menge $\bar{a}_\gamma$ verschieden ist, wenn also $\bar{a}_{\gamma+1}$ in $\bar{a}_\gamma$ echt ist, so wird das Glied $\bar{K}_\gamma$ *wesentlich* genannt. Anderenfalls ist $\bar{K}_\gamma$ *unwesentlich*. $\bar{K}_\gamma$ ist also genau dann unwesentlich, wenn $\bar{a}_{\gamma+1}$ mit $\bar{a}_\gamma$ übereinstimmt. Gibt es in $[\bar{K}]$ wenigstens ein unwesentliches Glied $\bar{K}_\gamma$, so heißt $[\bar{K}]$ (wegen $\bar{a}_{\gamma+1} = \bar{a}_\gamma$) *Kette mit Wiederholungen*. Sind alle Glieder der Kette $[\bar{K}]$ wesentlich, so heißt $[\bar{K}]$ *Kette ohne Wiederholungen*. Die Anzahl $\alpha'$ wesentlicher Glieder in der Kette $[\bar{K}]$ ist die *reduzierte Länge der Kette* $[\bar{K}]$. Es gilt $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, wobei die Gleichheit $\alpha' = \alpha$ Ketten ohne Wiederholungen charakterisiert. Im Fall $A = B$ sind alle Glieder in $[\bar{K}]$ unwesentlich, so daß $\alpha' = 0$ ist, und umgekehrt. Wenn $A \neq B$ ist, so kann die Kette $[\bar{K}]$ durch Streichung aller unwesentlichen Glieder *reduziert*, d. h. auf eine Kette $[\bar{K}']$ ohne Wiederholungen von $A$ nach $B$ verkürzt werden. Die Länge der reduzierten Kette $[\bar{K}']$ ist gleich der reduzierten Länge $\alpha'$ der Kette $[\bar{K}]$. Umgekehrt kann die Kette $[\bar{K}]$ durch Eingliederung von unwesentlichen Gliedern zwischen zwei beliebige Glieder $\bar{K}_\gamma$, $\bar{K}_{\gamma+1}$ bzw. vor (hinter) das Anfangsglied (Endglied) $\bar{K}_1 (\bar{K}_\alpha)$ der Kette *verlängert* werden und zwar durch Eingliederung der größten Zerlegung auf $\bar{a}_{\gamma+1}$ bzw. auf $\bar{a}_1 (\bar{a}_{\alpha+1})$ oder einer beliebigen endlichen Anzahl solcher Zerlegungen. Jede Verkürzung (Verlängerung) von $[\bar{K}]$ entsteht offenbar durch sukzessive Streichungen (Eingliederungen) je einer größten Zerlegung auf einer der Untermengen

$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\alpha+1}$. Es ist auch klar, daß jede verkürzte oder verlängerte Kette von $[\bar{K}]$ dieselbe reduzierte Länge hat wie die Kette $[\bar{K}]$.

Unter einer *Verfeinerung* $[\mathring{K}]$ *der Kette* $[\bar{K}]$ verstehen wir eine Kette von Zerlegungen in $G$ mit beliebigen, den Beziehungen $A_0 \supset A \supset B \supset B_0$ genügenden Enden $A_0, B_0$:

$$\bar{K}_{0,0} \to \bar{K}_{1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{1,\beta_1-1} \to \bar{K}_{1,\beta_1} \to \bar{K}_{2,1} \to \cdots \to \bar{K}_{2,\beta_2-1} \to \bar{K}_{2,\beta_2} \to \cdots$$
$$\to \bar{K}_{\alpha,\beta_\alpha} \to \bar{K}_{\alpha+1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1} \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}} \to \bar{K}_{\alpha+2,1} \to \cdots \bar{K}_{\alpha+2,\beta_{\alpha+2}-1}.$$

In diesen Formeln bedeuten die $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+2}$ natürliche Zahlen. Ferner stellt für $\delta = 0, \ldots, \alpha + 1$ $(\beta_0 = 0)$

$$([\bar{K}'] =)\, \bar{K}_{\delta,\beta_\delta} \to \cdots \to \bar{K}_{\delta+1,\beta_{\delta+1}-1}$$

eine Kette von Zerlegungen in $G$ dar (im Fall $\beta_{\delta+1} = 1$ wird nur das Anfangsglied $\bar{K}_{\delta,\beta_\delta}$ gelesen), und zwar von folgender Art: für $\delta = 0$ eine Kette von $\bar{a}_0$ $(= A_0)$ nach $\bar{a}_1$ $(= A)$, die jedoch im Fall $A_0 = A$ nicht vorhanden zu sein braucht; für $\delta = 1, \ldots, \alpha$ eine elementare Kette von $\bar{a}_\delta$ nach $\bar{a}_{\delta+1}$ über der Zerlegung $\bar{K}_\delta$; für $\delta = \alpha + 1$ eine Kette von $\bar{a}_{\alpha+1}$ $(= B)$ nach $\bar{a}_{\alpha+2}$ $(= B_0)$, die im Fall $B = B_0$ ebenfalls nicht vorhanden zu sein braucht.

Man erhält also eine jede Verfeinerung der Kette $[\bar{K}]$, indem man jedes Glied $\bar{K}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ der Kette $[\bar{K}]$ durch eine elementare Kette von $\bar{a}_\gamma$ nach $\bar{a}_{\gamma+1}$ über $\bar{K}_\gamma$ ersetzt und eventuell noch eine nach (aus) dem Ende $A$ $(B)$ von $[\bar{K}]$ laufende Kette vor das Anfangsglied $\bar{K}_1$ (nach dem Endglied $\bar{K}_\alpha$) hinzufügt.

Wenn man insbesondere jedes Glied der Kette $[\bar{K}]$ durch die aus diesem Glied bestehende elementare Kette ersetzt, so erhält man wiederum die Kette $[\bar{K}]$. Die Kette $[\bar{K}]$ ist also zugleich ihre eigene Verfeinerung.

Die reduzierte Länge jeder Verfeinerung von $[\bar{K}]$ ist gleich der Summe reduzierter Längen der einzelnen elementaren Ketten und der hinzugefügten Ketten. Dieselbe ist also gleich oder größer als die reduzierte Länge von $[\bar{K}]$.

### 6. Übungsaufgaben.

1. $\boldsymbol{s}\bar{A} \sqsubset \bar{A} = \bar{A} = \boldsymbol{s}\bar{A} \sqcap \bar{A}$.

2. $\boldsymbol{s}(B \sqsubset \bar{A}) \sqsubset \bar{A} = B \sqsubset \bar{A}$; $\boldsymbol{s}(B \sqcap \bar{A}) \sqcap \bar{A} = B \sqcap \bar{A}$;
$\boldsymbol{s}(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap \bar{A} = B \sqsubset \bar{A} = \boldsymbol{s}(B \sqcap \bar{A}) \sqsubset \bar{A}$.

3. Wenn $B \sqsubset \bar{A} = B \sqcap \bar{A}$ ist, so gilt für jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ entweder $\bar{a} \subset B$ oder $\bar{a} \cap B = \emptyset$, und umgekehrt.

4. $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}) \sqcap \bar{A} = \boldsymbol{s}\bar{C} \sqcap \bar{A}$.

5. Wenn $B \supset C$ ist, so gelten die folgenden Beziehungen: a) $(C \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = C \sqsubset (\bar{A} \sqcap B)$. Wegen dieser Gleichheit wird die angegebene Menge mit $C \sqsubset \bar{A} \sqcap B$ bezeichnet. Insbesondere (für $C = B$) haben wir $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = \bar{A} \sqcap B$. b) $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap C = \bar{A} \sqcap C$.

6. Wenn eine der drei folgenden Aussagen gilt, so gelten auch die zwei übrigen: a) Jedes Element von $\bar{A}$ ist wenigstens mit einem Element von $\bar{C}$ inzident; b) $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$; c) $\boldsymbol{s}\bar{A} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\bar{C} \sqsubset \bar{A})$.

7. Jede Verlängerung einer Kette $[\bar{K}]$ ist eine Verfeinerung derselben.

8. Die Gesamtzahl $p_{n+1}$ der auf einer endlichen Menge von der Ordnung $n+1$ $(\geqq 1)$ liegenden Zerlegungen ist endlich. Die Zahlen $p_{n+1}$ sind durch die Formel $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i$ $(p_0 = 1)$ gegeben. Man hat also $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15$, $p_5 = 52$, $p_6 = 203, \ldots$.

## § 3. Zerlegungen auf Mengen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit Zerlegungen *auf* Mengen befassen. Wie wir bereits erwähnt haben (§ 2, Nr. 2), kommen die diesbezüglichen Ergebnisse auch für Zerlegungen in Mengen weitgehend zur Geltung, da jede Zerlegung $\bar{A}$ in der Menge $G$ zugleich eine auf der Menge $\boldsymbol{s}\bar{A}$ darstellt.

**1. Bindungen in einer Zerlegung.** Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen auf $G$. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$.

Unter einer *Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ in der Zerlegung $\bar{A}$ in bezug auf die Zerlegung $\bar{B}$* verstehen wir eine endliche Folge von Elementen in $\bar{A}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \qquad (\alpha \geqq 2),$$

die so beschaffen sind, daß $\bar{a}_1 = \bar{a}$, $\bar{a}_\alpha = \bar{p}$ ist und je zwei benachbarte Glieder $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$ mit einem Element $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$ inzident sind. Wir sagen, daß eine solche Bindung von der Zerlegung $\bar{B}$ *gebildet* wird. Kürzer sprechen wir von der *Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$* oder von einer *Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$.*

Es ist zu betonen, daß die in einer Bindung vorkommenden Elemente nicht durchweg voneinander verschieden zu sein brauchen.

Wenn eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ existiert, so drücken wir dies auch so aus, daß sich das Element $\bar{p}$ mit dem Element $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ *verbinden* läßt; kürzer sagen wir, daß Element $\bar{p}$ lasse sich mit $\bar{a}$ verbinden.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Bindungen besprechen.

Zunächst ist es leicht einzusehen, und wir möchten die entsprechende Überlegung dem Leser überlassen, daß für beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ die folgenden Behauptungen gelten.

a) *Das Element $\bar{a}$ läßt sich mit sich selbst verbinden.*

b) *Wenn es eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{b}$ und eine von $\bar{b}$ nach $\bar{c}$ gibt, so gibt es auch eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{c}$.*

c) *Wenn es eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{b}$ gibt, so gibt es auch eine von $\bar{b}$ nach $\bar{a}$.*

Wegen der nach c) bestehenden Symmetrie bei der Bindung zweier Elemente sprechen wir auch von Bindungen zwischen zwei Elementen, ohne die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen.

*Wenn sich die Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{c} \in \bar{A}$ verbinden lassen, so lassen sie sich auch miteinander verbinden;* denn nach Voraussetzung läßt sich $\bar{a}$ mit $\bar{c}$ und $\bar{c}$ mit $\bar{b}$, also auch $\bar{a}$ mit $\bar{b}$ verbinden (nach c) und b)).