Algebra.

MATICE.

1. Číselné těleso.

Definice. Číselné těleso je každá množina komplexních čísel, která:

a/ obsahuje aspoň jedno číslo od nuly různé,

b/ má tu vlastnost, že do množiny patří také součet, rozdíl, součin a podíl /s dělitelem od nuly různým/ každých dvou stejných nebo různých čísel z množiny.

Příklady: 1. Množina všech komplexních čísel je číselné těleso, a to těleso největší v tom smyslu, že každé jiné číselné těleso je v něm obsaženo./ Každé jiné číselné těleso je podmnožinou množiny všech komplexních čísel./

2. Množina všech reálních čísel je číselné těleso.

3. Množina všech celých čísel není číselným tělesem /neboť podíl každých dvou čísel není číslo celé/.

Věta 1.1.: Každé číselné těleso obsahuje těleso čísel racionálních. -/ Je tedy množina čísel racionálních nejmenší číselné těleso/.

Důkaz. Buď K libovolné číselné těleso. Podle definice obsahuje K aspoň jedno číslo od nuly různé. Označme je a. Podle druhé části definice obsahuje K především podíl a:a = 1, pak také čísla 1+1 = 2, 2+1 = 3, ... ,1-1 = 0, 0-1= -1, 0-2=-2, ..., tedy všechna čísla celá. Mimo to, opět podle druhé části definice, obsahuje těleso K podíl a:b každých dvou celých čísel a, b $\neq$ 0, tedy každé číslo racionální.

2. Matice v tělese.

Definice. Maticí v libovolném tělese K rozumíme množinu čísel z tělesa K uspořádaných do určitého počtu /řekněme m / řádků a určitého počtu sloupců /řekněme n /.

Příklad: Množina čísel

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

je příkladem matice v tělese čísel reálních. Matice má $m = 2$ řádky a $n = 4$ sloupce.

Definice. Matice čtvercová. Jestliže počet řádků matice je týž jako počet sloupců, tedy $m = n$, pravíme, že matice je čtvercová řádu n.

na př.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
jest příkladem matice čtvercové řádu 3 v tělese reálních čísel.

Mysleme si napsánu nějakou matici v tělese K o m řádcích a n sloupcích. Čísla této matice výhodně pojmenujeme, t.j. označíme podle tohoto pravidla: Číslo nacházející se v matici v určitém řádku, řekněme v j-tém, a v k-tém sloupci označíme jedním písmenem s indexy j,k, tedy znakem $a_{j,k}$. Při tomto označení se pak každá matice o m řádcích a n sloupcích píše v tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tak na př. v hořejší matici třetího řádu je $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = \sqrt{2}$, $a_{21} = 3$, atd.

Vyskytnou-li se v nějaké úvaze dvě nebo více matic, značíme čísla jedné na př. $a_{11}, a_{12}, \ldots,$

$b_{11}, b_{12}, \ldots$ atd.

Matici samu označujeme často stručně jediným, ~~obyčejně velkým~~ písmenem jako A, B, ... a podobně, po příp. s indexy

A_1, B_2, A', B' a pod.

Poznámka:

V dalších úvahách budeme místo „matice o m řádcích a n sloupcích" užívati kratšího výrazu „matice typu m/n".

3. Některé zvláštní matice čtvercové /řádu $n > 1$ / .

V následujících odstavcích předpokládáme, že bylo zvoleno určité číselné těleso K a všechny uvažované matice jsou v tomto tělese K .

3.1. Matice nulová. Velmi jednoduché je matice čtvercová libovolného řádu n , v níž se všechna čísla rovnají nule. Je to matice

$$n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n}\right. = 0$$

Říkáme jí matice nula nebo nulová. Značí se písmenem O .

3.2. Matice jednotková E . Je čtvercová matice řádu n , v níž všechna čísla v t. zv. hlavní diagonále jsou jedničky a všechna ostatní čísla jsou nuly. Je to tedy matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3.3. Matice E_{jk}. Rovněž důležité jsou čtvercové matice libovolného řádu n, které mají jeden prvek rovný jedničce a všechny ostatní rovny nule.

Je-li ta jednička napsána v j-tém řádku a k-tém sloupci, kde $1 \leq j,\ k \leq n$

pak matice má tvar

$$E_{jk} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ k.\text{sloupec} \end{array}$$

Takových matic je celkem n^2, a to: $E_{11}, E_{12}, \dots E_{1n}, \dots E_{nn}$.

4. Matice sdružené, symetrické a polosymetrické.

4.1. Matice sdružené. Je-li dána nějaká matice A typu m/n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

můžeme z jejích čísel utvořiti matici novou

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Má tedy matice A' vzhledem k matici A vyměněny řádky za sloupce, takže je typu n/m. Nazývá se matice sdružená s maticí A a značí se A'.

Je patrno, že matice $A'' = A$, t.j. matice sdružená s maticí sdruženou A' je původní matice A.

Příklady: 1. S maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ je sdružena matice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. Matice sdružená s maticí čtvercovou 3.řádu /str.2/

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ je matice } B' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ tedy } B = B'.$$

3. Také si všimněme, že $O' = O$

$E' = E$

$E'_{jk} = E_{kj}$ · pro $j,k = 1,2 \dots n$.

4.2. Matice symetrická. Je-li nějaká matice S čtvercová řádu n a má-li tu vlastnost, že matice s ní sdružená $S' = S$, nazývá se matice S symetrická.

V takové matici jsou tedy čísla položená symetricky vzhledem k hlavní diagonále sobě rovna, t.j. pro její prvky s_{jk} platí rovnosti

$$s_{jk} = s_{kj} \quad \text{pro } j,k = 1,2, \dots n .$$

Na př. matice B (4.1.2) je symetrická.

Také matice O, E jsou symetrické.

4.3. Matice polosymetrická. Je-li nějaká matice T čtvercová libovolného řádu n a pro její čísla $t_{j,k}$ platí vztahy

$$t_{jk} = - t_{kj} \quad \text{pro } j,k = 1,2 \dots n ,$$

nazývá se T matice polosymetrická.

V takové matici jsou čísla v hlavní diagonále vesměs nuly, kdežto čísla položená symetricky vzhledem k hlavní diagonále se liší právě znaménkem.

Příklad: Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ je polosymetrická.}$$

5. Rovnost matic, sečítání, skalární násobení, násobení matic.

5.1. Rovnost matic. Nechť A, B jsou dvě matice téhož typu m/n . Pravíme, že obě matice A, B jsou si rovny, a píšeme $A = B$, když ~~každé~~ číslo a_{jk} ~~matice~~ A se rovná stejnolehlému číslu b_{jk} matice B ~~; tedy platí-li~~

$$a_{jk} = b_{jk} \quad \text{pro} \quad j = 1,2,\dots,m; \; k = 1,2,\dots,n \; .$$

Stručně řečeno: Dvě matice A, B jsou si rovny, když jsou úplně stejné.

Rovnice $A = B$ vyjadřuje tedy celkem $m.n$ rovností:

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{12} = b_{12}, \; \dots \; a_{mn} = b_{mn} \; ,$$

tedy tolik rovností, kolik čísel je v každé z obou matic.

Podle toho, co bylo řečeno o rovnosti dvou matic, platí tedy na př. pro každou symetrickou matici S

$$S' = S \; .$$

5.2. Sečítání matic je operace, která dvěma maticím A, B typu m/n přiřazuje novou matici, které se říká součet matic $A + B$. Součet $A + B$ je opět matice typu m/n a je z čísel a_{jk} v A a z čísel b_{jk} v B utvořena sečtením stejnolehlých čísel v obou maticích. Je tedy

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12} , & \dots\dots\dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1}, & a_{m2} + b_{m2}, & \dots\dots\dots & a_{m1} + b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Vzhledem k definici číselného tělesa je součet obou matic $A + B$ matice opět v témže tělese jako jsou matice A, B.

Příklady: 1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 + \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2/ Je zřejmé, že pro každou matici A platí vztah

$$A + O = A \; .$$

5.3. <u>S k a l á r n í n á s o b e n í m a t i c</u> je operace, která k libovolné matici A typu m/n a k libovolnému číslu k z téhož tělesa, v němž je A, přiřazuje novou matici, které se říká s k a l á r n í s o u č i n m a t i c e A s č í s l e m k. Značíme jej symbolem Ak. Skalární součin Ak je matice opět typu m/n a je z čísel $a_{jk} \vee A$ a z čísla k utvořena takto:

$$Ak = \begin{pmatrix} a_{11}k & a_{12}k & \dots & a_{1n}k \\ a_{21}k & a_{22}k & & a_{2n}k \\ \vdots & & \dots & \\ a_{m1}k & a_{m2}k & \dots & a_{mn}k \end{pmatrix},$$

tedy násobením čísel a_{jk} matice A číslem k. Vzhledem k definici číselného tělesa je skalární součin Ak opět v témže číselném tělese jako je matice A a číslo k.

Podobně s k a l á r n í s o u č i n č í s l a k s m a t i c í A značíme symbolem kA a je to matice

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí rovnost těchto dvou matic:

$$kA = Ak ,$$

takže je jedno, mluvíme-li o skalárním součinu matice A s číslem k anebo čísla k s maticí A.

Místo $-1.A$ píšeme stručněji $-A$.

Podle definice polosymetrické matice 4.3 platí pro <u>každou polosymetrickou matici</u> vztah

$$\underline{T = -T'} ;$$

a zřejmě platí také opak: když nějaká čtvercová matice T vyhovuje tomuto vztahu, jest polosymetrická.

15.1

5.4. N á s o b e n í d v o u m a t i c jest operace, která k matici A typu m/n a k další matici typu n/h přiřazuje novou matici typu m/h, které se říká s o u č i n m a t i c e A s m a t i c í B /v tomto pořadí/ a značí se symbolem AB. Tento součin jest z čísel a_{jk} matice A / $j = 1,2,\dots m$; $k = 1,2,\dots n$ / a z čísel b_{kr} matice B / $k = 1,2,\dots n$; $r = 1,2,\dots h$ / utvořen podle tohoto pravidla: číslo c_{jr} v tomto součinu jest

$$c_{jr} = a_{j1} b_{1r} + a_{j2} b_{2r} + \dots + a_{jn} b_{nr} \quad , \text{ kde}$$

$$j = 1,2,\dots m \; ; \; r = 1,2,\dots h \quad .$$ 16.10.

Ačkoliv jest toto pravidlo na první pohled dosti složité a zdá se umělé, uslyšíme brzy, že jeho původ je zcela přirozený.

Příklad:

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

pak součin $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Zřejmě platí, že jsou-li matice A, B v tělese K, jest AB také v tělese K.

Když A jest čtvercová matice libovolného řádu n můžeme utvořit součin $A.A$ a značíme jej

$$A.A = A^2 \quad .$$

Zřejmě jest: $OA = AO = O$; $EA = AE = A$.

6. Pravidla o počítání s maticemi.

Důsledky plynoucí z předchozích definic se dají stručně vystihnouti takto:

Celá řada pravidel, která platí pro počítání s obyčejnými komplexními čísly platí formálně stejně pro počítání s maticemi.

Přesněji řečeno, z předchozích definic plynou tyto vztahy, které formálně platí i pro počítání s komplexními čísly:

I. $A + B = B + A$;

$(A + B) + C = A + (B + C)$.

Platnost prvního vztahu vyjadřujeme tím, že pro s e č í t á n í platí zákon k o m u t a t i v n í ; platnost druhého, že pro sečítání platí zákon a s o c i a t i v n í .

II. $aA = Aa$; $a(bA) = (ab)A$; $(aA)(bB) = (ab)(AB)$;

t.j. pro s k a l á r n í n á s o b e n í platí zákon k o m u t a t i v n í a zákony a s o c i a t i v n í .

III. $(a + b)A = aA + bA$; $a(A + B) = aA + aB$;

t.j. pro s k a l á r n í n á s o b e n í platí zákony d i s t r i b u t i v n í .

IV. $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;

t.j. pro n á s o b e n í platí zákony d i s t r i b u t i v n í .

V. $(AB)C = A(BC)$;

t.j. pro n á s o b e n í platí zákon a s o c i a t i v n í .

VI. Ať A jest jakékoliv čtvercové matice řádu n , existují čísla a_{jk} $(j,k=1, \dots, n)$ taková, že $A = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}E_{jk}$; t.j. matice E_{jk} tvoří b a s i všech čtvercových matic řádu n .

V hořejších vzorcích se předpokládá, že matice, o něž jde, jsou vhodného typu. Tak na př. ve vztazích II. v třetím vzorci se předpokládá, je-li matice A typu m/n , pak matice B je typu n/h . Ve vztahu V. se předpokládá, že je-li matice A typu m/n , je matice B typu n/h a matice C typu h/p .

D ů k a z y hořejších vzorců jsou většinou velmi jednoduché. Trochu složitější je důkaz vzorce V ./asociativní zákon pro násobení/ a na ten se omezíme. Ostatní důkazy nechť si čtenář provede jako cvičení.

Důkaz vzorce V.

Nechť čísla jednotlivých matic A, B, C jsou a_{jk}, b_{kr}, c_{rs}, při čemž $j = 1,2,\dots m$; $k = 1,2,\dots u$; $r = 1,2,\dots h$; $s = 1,2,\dots p$. Matice A B jest pak typu m/h ; označme její čísla u_{jr}. Podle definice 5·4 máme

$$u_{jr} = a_{j1} b_{1r} + \dots + a_{jn} b_{nr} .$$

(AB)C jest typu m/p a podle definice ~~5·4 jsou její čísla~~ /označme je v_{js} / :

$$v_{js} = u_{j1} c_{1s} + \dots + u_{jh} c_{hs} ,$$

takže máme:

$$v_{js} = \sum_{r=1}^{h} u_{jr} c_{rs} = \sum_{k=1,r=1}^{u,h} a_{jk} b_{kr} c_{rs} .$$

Na druhé straně je (B C) matice typu n/p ; označme její čísla u'_{ks}. Opět podle 5·4 je

$$u'_{ks} = \sum_{r=1}^{h} b_{kr} c_{rs} .$$

Matice A(BC) je typu m/p ; označme její čísla v'_{js}.

Zřejmě je

$$v'_{js} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} u'_{ks} = \sum_{k=1,r=1}^{u,h} a_{jk} b_{kr} c_{rs} .$$

Tedy skutečně vychází

$$v_{js} = v'_{js} .$$

Poznámka. Z hořejších vzorců odvodí se snadno vzorce obecnější, které platí pro libovolný počet matic. Na př. ze vzorce V. plyne, že libovolný počet matic $A_1, A_2, \dots, A_n$ typů, které vyhovují definici násobení matic, má jediný součin který označujeme $A_1 A_2 \dots A_n$, jenž závisí jenom na pořádku těchto matic, ale nezávisí na tom, jak jej počítáme. Na př. pro čtyři matice máme:

$$A_1A_2A_3A_4 \equiv A_1\left[A_2(A_3A_4)\right] = A_1\left[(A_2A_3)A_4\right] = (A_1A_2)(A_3A_4) =$$
$$= \left[A_1(A_2A_3)\right]A_4 = \left[(A_1A_2)A_3\right]A_4 \ .$$

Je-li A libovolná čtvercová matice, j libovolné přirozené číslo, označujeme součin

$$\underbrace{A.A \ \dots \ A}_{j}$$

stručněji symbolem A^j a nazýváme jej j-tá m o c n i n a matice A. Mimo to definujeme nultou mocninu matice A, totiž A^0, rovností

$$A^0 = E \ .$$

7. Další pravidla pro počítání s maticemi.

Následující dvě pravidla nemají v aritmetice obyčejných komplexních čísel obdoby:

$$(A + B)' = A' + B' \quad ,$$
$$(AB)' = B'A' \quad .$$

D ů k a z prvého vzorce je snadný. Dokažme druhý.

Nechť a_{jk} jsou čísla matice A typu m/n, b_{kr} matice B typu n/h. Potom $A.B$ jest matice typu m/h a její čísla jsou $u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + \dots + a_{jn}b_{nr}$. Sdružená matice $(AB)'$ je typu h/m a její čísla jsou $u'_{rj} = a_{j1}b_{1r} + \dots + a_{jn}b_{nr}$. Matice B' je typu h/n a její čísla jsou $b'_{rk} = b_{kr}$. Matice A' je typu n/m a její čísla jsou $a'_{kj} = a_{jk}$. Tedy matice $B'A'$ je typu h/m a její čísla jsou $n'_{rj} = b'_{r1}a'_{1j} + \dots + b'_{rn}a'_{nj} = b_{1r}a_{j1} + \dots + b_{nr}a_{jn}$. Tedy skutečně platí $u_{rj} = u'_{rj}$.

23.10.53

8. Multiplikační konstanty pro matice E_{jk}.

Podle VI. jest každá čtvercová matice n-tého řádu lineární kombinací /s koeficienty a_{jk}/ matic E_{jk}. Součin $E_{jk}E_{rs}$ jest matice n-tého řádu a tedy lineární kombinací matic E_{jk}. Koeficienty v těchto lineárních kombinacích jsou t. zv. m u l t i p l i k a č n í   k o n s t a n t y   p r o   m a t i c e E_{jk}. Kolik jest těchto multiplikačních konstant ? Všech matic E_{jk} jest n^2 ; tedy všech součinů po dvou maticích $E_{jk} E_{rs}$ jest $(n^2)^2$ a pro každý takový součin máme celkem ~~n^2 mult. konstant~~. Tedy mult. konstant jest celkem $(n^2)^3 = n^6$.

Abychom je určili, stačí vypočísti

$$E_{jk} E_{rs} = \begin{array}{c} \\ j\{ \\ \\ \end{array}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}^{k} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}^{s}\begin{array}{c} \\ \}r \\ \\ \end{array}$$

Pravá strana jest součin dvou čtvercových matic řádu n, ~~tedy opět~~ čtvercová matice řádu n . Tato /podle definice 5'4/ může míti čísla od nuly různé jenom v j-tém řádku a s-tém sloupci. Avšak číslo v j-tém řádku a s-tém sloupci v součinu obou matic jest zřejmě $\begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq r \\ 1 & \text{pro } k = r \end{cases}$.

Tedy jest

$$E_{jk} E_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq r \\ E_{js} & \text{pro } k = r \end{cases} .$$

Těmito vztahy jsou multiplikační konstanty určeny a jest zřejmé, že každá z nich má hodnotu 0 anebo 1 .

<u>Poznámka o abstraktních algebrách .</u>

Množina všech čtvercových matic n-tého řádu v tělese K spolu s operacemi, které jsme právě definovali, je příkladem a l g e b r y   v   t ě l e s e   K .

Algebrou v nějakém tělese K rozumíme množinu alespoň dvou prvků, A , spolu se třemi operacemi, jejichž symboly $\oplus$, $\odot$, $\mathbin{\text{C}}$, které mají tyto vlastnosti: Operace $\oplus$, t. zv. s e č í t á n í , přiřazuje ke každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a, b \in A$ další prvek v A , který se označuje $a \oplus b$

a nazývá se součet prvku a a prvku b; operace $\odot$, t.zv. násobení, přiřazuje ke každým ~~dvěma rovným nebo různým prvkům~~ $a,b \in A$ další prvek v A, který se označuje $a \odot b$ a nazývá se součin prvku a s prvkem b /v tomto pořadí/; konečně operace $\bigcirc$, t.zv. skalární násobení, přiřazuje ke každému prvku $a \in A$ a ke každému číslu $\alpha \in K$ jistý prvek $\alpha \bigcirc a$ a jistý prvek $a \bigcirc \alpha$ v A, který se nazývá skalární součin čísla α s prvkem a a skalární součin prvku a s číslem α. Při tom splňují tyto tři operace tytéž zákony, které jsou popsány v hořejších pravidlech I–VI. Tedy na př. pro každé dva prvky $a,b \in A$ jest

$$a \oplus b = b \oplus a, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

atd. Hořejší pravidlo VI zní zde tak, že existuje jistý počet, n, prvků v A: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vyznačujících se tím, že každý prvek $a \in A$ je součtem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ skalárních součinů vhodných prvků $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ a prvků $v_1, \ldots, v_n$, t.j. prvky $v_1, \ldots, v_n$ tvoří basi algebry A. Všechny výsledky o maticích, pokud jsou odvozeny jenom z hořejších operací, dají se zobecniti na algebry. O algebrách najde čtenář poučení v knize: L.E.Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie /Zürich 1927/.

9. Zaměnitelné matice.

Důležitá vlastnost, která odlišuje počítání s maticemi od počítání s obyčejnými ~~komplexními~~ čísly, jest tato: Když máme dvě libovolná komplexní čísla a,b, pak platí vztah $ab = b.a$, t.j. platí zákon pro násobení. Naproti tomu když máme dvě matice A, B, matici A typu m/n a matici B

typu n/m, takže můžeme utvořiti jak AB, tak BA, n e p l a t í v ž d y c k y /t.j. při každých dvou maticích A, B/ r o v n o s t $AB = BA$. Vskutku, aby takový vztah platil musí především býti $m = n$, takže obě matice A, B musí býti čtvercové téhož řádu n, neboť AB jest matice o m řádcích a BA jest matice o n řádcích. Avšak i když $m = n$, neplatí vždycky $AB = BA$. Na př. když

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jest

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad také ukazuje, že rovnice $AB = 0$ může platit, aniž by jeden z činitelů A, B součinu AB byla matice nulová, na rozdíl od počítání s obyčejnými čísly /jsou-li a, b komplexní čísla, pak $ab = 0$, jenom když alespoň jedno z obou čísel a, b jest nula/. Zejména se může státi, že matice A není 0, avšak některá její mocnina jest 0. Pak se matice A nazývá n i l p o t e n t n í. Na př. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, protože

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

D e f i n i c e. Dvě matice A, B, obě čtvercové a téhož řádu n, nazývají se z a m ě n i t e l n é, když $AB = BA$. Pravíme pak také, že A je zaměnitelná s B anebo B s A. Na př. matice E jest zaměnitelná s každou čtvercovou maticí téhož řádu n.

10. Reciproké matice.

Obdoba mezi počítáním s maticemi a obyčejnými čísly vede nás k této otázce: Zda-li existuje nějaká operace s maticemi, která by byla obdobou dělení ? Nejprve připomeňme, co se rozumí r e c i p r o k o u   h o d n o t o u nějakého čísla a. Reciprokou hodnotou čísla a se rozumí podíl čísla 1 a čísla a; t.j. takové číslo x, že hoví rovnici $ax = 1$. Tato reciproká hodnota se značí symbolem $\frac{1}{a}$ anebo a^{-1}, takže $aa^{-1} = 1$. Z aritmetiky víme, že reciproká hodnota čísla a existuje, když a jen když a není nula. Děliti číslo b číslem $a \neq 0$ znamená násobiti číslo b číslem a^{-1}.

V odst. 5·4 jsme viděli, že pro každou čtvercovou matici A platí vztah $EA = AE = A$, takže jednotková matice E jest obdobou jedničky v aritmetice. Jest tudíž přirozené se tázat, zda k libovolné matici A typu m/n existuje matice X typu n/m taková, že platí

$$AX = E \quad ,$$

nebo zda existuje matice Y typu n/m, že jest

$$YA = E$$

Jestliže zjistíme, že existuje matice X nebo Y, budeme jí říkati m a t i c e   r e c i p r o k á   z p r a v a resp. z l e v a   k   m a t i c i A a značiti ji A^{-1} resp. ${}^{-1}A$.

10·1. Uvažujme nejdříve o vztahu

$$AX = E \, ,$$

kde A je matice typu m/n a X typu n/m a E jest řádu m. Předpokládejme, že existuje matice X hovící tomuto vztahu a označme její čísla x_{kj}. Hořejší vztah zastupuje celkem m^2 rovnic, a sice :

$$a_{j1}\,x_{1r} + a_{j2}\,x_{2r} + \dots + a_{jn}\,x_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq r \\ 1 & \text{pro } j = r \end{cases} ,$$

$j, r = 1, 2, \dots, m$. Při pevně zvoleném r máme tedy rovnice

$$\begin{array}{l} a_{11}x_{1r} + a_{12}x_{2r} + \dots + a_{1n}x_{nr} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_{1r} + a_{r2}x_{2r} + \dots + a_{rn}x_{nr} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_{1r} + a_{m2}x_{2r} + \dots + a_{mn}x_{nr} = 0 \end{array} \qquad /1/$$

Jest jich m a hoví jim n čísel $x_{1r},\dots,x_{nr}$.

Budeme rozeznávat 3 případy podle toho zda

1° $m < n$ $\quad 2^\circ$ $m = n$ $\quad 3^\circ$ $m > n$

10'1·1 Nechť $m < n$. Pak /1/ je soustava m nehomogenních rovnic a n neznámých a $m < n$. Taková soustava má řešení, když a jen když hodnost matice soustavy a matice rozšířené jsou stejné. Nechť p značí hodnost matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \dots\dots & a_{pn} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

t.j. matice A, takže alespoň jeden determinant řádu p , v této matici je od nuly různý, kdežto všechny determinanty řádu $p+1$, když $p < m$, jsou rovny nule. Předpokládejme na př. že determinant řádu p v matici A v levém rohu nahoře jest $\neq 0$. Jestliže $p < m$, pak rozšířená matice soustavy rovnic /1/, v níž místo r píšeme $p+1$, je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & \dots\dots & a_{pn} & 0 \\ a_{p+1,1} & \dots\dots & a_{p+1,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots\dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

a má zřejmě hodnost $p+1$. Jestliže tedy matice X existuje, jak předpokládáme, jest nutně $p = m$. V tomto případě $p = m$ však existuje $n - m$ lineárně nezávislých řešení $x_1^{(1)},\dots x_n^{(1)};\dots;x_1^{(n-m)},\dots,x_n^{(n-m)}$ homogenního systému rovnic patřícího k /1/a obecné řešení rovnic /1/ jest

$$x_{1r} = \lambda_{1,r}\, x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m,r}\, x_1^{(n-m)} + x_{1r}^{o}$$
$$\vdots$$
$$x_{nr} = \lambda_{1,r}\, x_n^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m,r}\, x_n^{(n-m)} + x_{nr}^{o} \quad ,$$

při čemž $x_{1r}^{o}, \dots, x_{nr}^{o}$ značí nějaké partikulární řešení systému nehomogenního /1/ a $\lambda_{1r}, \dots, \lambda_{n-m,r}$ libovolné konstanty. Vychází tedy, že X jest matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m,1} x_1^{(n-m)} + x_{11}^{o}, \dots, \lambda_{1m} x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m,m} x_1^{(n-m)} + x_{1m}^{o} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_{11} x_n^{1} + \dots + \lambda_{n-m,1} x_n^{n-m} + x_{n1}^{o}, \dots, \lambda_{1m} x_n^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m,m} x_n^{(n-m)} + x_{nm}^{o} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \dots\dots x_1^{(n-m)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \dots\dots x_n^{(n-m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \dots\dots \lambda_{1m} \\ \lambda_{n-m,1} \dots \lambda_{n-m,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}^{o} \dots\dots x_{1m}^{o} \\ \vdots \\ x_{n1}^{o} \dots\dots x_{nm}^{o} \end{pmatrix} .$$

Označme

$$H = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \dots x_1^{(n-m)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \dots x_n^{(n-m)} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \dots \lambda_{1m} \\ \vdots \\ \lambda_{n-m,1} \dots \lambda_{n-m,m} \end{pmatrix}, X_o = \begin{pmatrix} x_{11}^{o} \dots x_{1m}^{o} \\ \vdots \\ x_{n1}^{o} \dots x_{nm}^{o} \end{pmatrix} .$$

Máme pak

$$X = H\Lambda + X_o \quad . \qquad /2/$$

Podle definice matic H, Λ, X_o především vidíme, že Λ jest libovolná matice typu $n-m/m$ a X_o jest nějaká matice hovící rovnici $AX_o = E$; taková matice existuje tehdy a jen tehdy, když hodnost matice A (typu m/n, $m < n$) jest m . Pokud jde o matici H , jest zřejmě $AH = 0$ a mimo to hodnost matice H jest $n-m$ (neboť $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; \dots; x_1^{(n-m)}, \dots, x_n^{(n-m)}$ jsou n e z á v i s l á řešení systému homogenního příslušného k /1/) . Naopak se snadno vidí, že každá matice X typu n/m ~~m-s-l-o-u-p-c-í-c-h,~~ která jest tvaru (2), hoví rovnici $AX=E$, jestliže H jest nějaká matice hovící rovnici $AH = 0$, Λ libovolná matice o $n-m$) řádcích a n sloupcích a X_o libovolná matice hovící rovnici $AX_o = E$.

Máme tedy tento výsledek:

K matici A typu m/n, $m<n$, existují řešení X rovnice $AX=E$ tehdy a jen tehdy, když hodnost matice A jest m. Každé řešení X jest tvaru

$$X = H\Lambda + X_0 ,$$

při čemž značí: H t. zv. fundamentální řešení rovnice $AH=0$ t.j. libovolnou matici typu $n/n-m$, která hoví této rovnici a má hodnost $n-m$; Λ libovolnou matici typu $n-m/m$; X_0 libovolné /partikulární/ řešení rovnice $AX=E$.

Poznámky. Matice H se snadno určí (pomocí Frobeniovy metody pro řešení systému lineárních homogenních rovnic) takto:

Matici A doplníme $n-m$ řádky $z_{11},\dots,z_{1n};\dots;$ $z_{n-m,1},\dots,z_{n-m,n}$ na matici čtvercovou řádu n:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\dots\dots\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\dots\dots\dots a_{mn} \\ z_{11}\dots\dots\dots z_{1n} \\ \vdots \\ z_{n-m,1}\dots\dots z_{n-m,n} \end{pmatrix} \qquad /3/$$

Čísla z můžeme zvoliti libovolně až na to, že determinant utvořený z této čtvercové matice má hodnotu různou od nuly. To lze, protože /podle předpokladu/ matice A má hodnost m.

Poznačme písmenem $x_k^{(i)}$ algebraický komplement prvku z_{ik} $(i=1,\dots,n-m\,;\ k=1,\dots,n)$ v determinantu utvořeném z matice /3/. Pak matice

$$H = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}\dots x_1^{(n-m)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)}\dots x_n^{(n-m)} \end{pmatrix}$$

má /podle vět o reciprokých determinantech/hodnost $n-m$ a podle volby čísel $x_k^{(i)}$ je

$$AH = 0 \ .$$

Dále připomeňme si, že matice X, daná vzorcem /2/, je v tělese K, když matice H, Λ, X_0 jsou v tělese K. A zřejmě v tělese K existují matice H, Λ, X_0 takové, že zmíněná matice X hoví rovnici $AX = E$.

10.1.2 Nechť $m = n$. V tomto případě má systém rovnic /1/(podle Cramerova pravidla) jedno a jen jedno řešení, jestliže hodnost matice A jest n. Jestliže však hodnost matice A je $p < n$ a je-li v této matici na př. determinant p-tého řádu v levém rohu nahoře $\neq 0$, pak systém rovnic /1/, v němž za r klademe $p+1$, nemá řešení. /Matice rozšířená má totiž hodnost $p+1$, kdežto matice A hodnost p /. Neexistuje tedy v tomto případě řešení rovnice $AX = E$. Máme tedy výsledek:

J e - l i m a t i c e A č t v e r c o v á ř á d u n, p a k e x i s t u j e p r á v ě j e d n o ř e š e - n í X r o v n i c e $AX = E$, m á - l i m a t i c e A h o d n o s t n /tedy když determinant A, utvořený z matice A, má hodnotu $\neq 0$ /. J e - l i h o d n o s t m a t i c e A m e n š í n e ž n, p a k r o v n i c e $AX = E$ n e m á ř e š e n í.

P o z n á m k y . Označme písmenem a^{jk} algebraický komplement prvku a_{jk} $(j,k = 1,2,\dots n)$ v determinantu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \ .$$

Matice

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{n1} \\ a^{12} & \dots & a^{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{1n} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

nazývá se **přidružená** neboli **adjungovaná** k matici A. Všimněme si, že prvky matice $\mathrm{Adj}\ A$ v libovolném j-tém **řádku** ~~jsou algebr. komplementy prvků v j-tém~~ **sloupci** determinantu A. Podle známých vět o reciprokých determinantech je

$$|\mathrm{Adj}\ A| = |A|^{n-1} .$$

Matice $\mathrm{Adj}\ A$ je zřejmě v tělese K.

Násobením obdržíme

$$A.\ \mathrm{Adj}\ A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{11}\ldots a^{n1} \\ \vdots \\ a^{1n}\ldots a^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix} =$$

$$= |A| . E .$$

Odtud je patrno, že v případě $|A| \neq 0$ je shora zmíněné jediné řešení rovnice $AX = E$ dáno vzorcem

$$X = \frac{1}{|A|} . \mathrm{Adj}\ A .$$

Matice X je tedy skalární součin čísla $\frac{1}{|A|}$ a matice $\mathrm{Adj}\ A$; je tedy také v tělese K.

0.1.3. Nechť konečně $m > n$. Označme písmenem p hodnost matice A. Pak zřejmě je $p \leq n$. Nechť na př. determinant p-tého řádu v levém rohu nahoře v matici A má hodnotu $\neq 0$. Pišme pak v rovnicích /1/ $p+1$ místo r. Prvním rovnicím v počtu $p+1$ v systému /1/ nelze pak vyhověti /neboť matice soustavy má hodnost p, kdežto matice rozšířená hodnost $p+1$ /.

Máme tedy výsledek:

Je-li v matici A počet řádků m větší než počet sloupců n, neexistuje řešení X rovnice $AX = E$.

0.2. Uvažujme nyní o vztahu

$$YA = E ,$$

kde matice A je typu m/n, matice Y typu n/m a matice E je řádu n. Existuje-li matice Y, která této rovnici hoví, pak nutně platí $n \leq m$. V tom případě totiž existuje matice $X (= A)$, hovící rovnici $YX = E$, což je podle 10·1·1 možno jen tehdy, je-li $n \leq m$.

Podobně jako v 10·1·1 se odvodí věta:

10·2·1. Je-li v matici A počet řádků m větší než počet sloupců n, existují řešení Y rovnice $YA = E$, když a jen když hodnost matice A je $p = n$. Každé řešení Y je tvaru

$$Y = MP + Y_0 ,$$

při čemž značí: P t.zv. fundamentální řešení rovnice $PA = 0$, t.j. libovolnou matici typu $(m-n)/m$, hovící rovnici $PA = 0$ a mající hodnost $(m-n)$; M libovolnou matici typu $n/m-n$; Y_0 libovolné /partikulární/ řešení rovnice $YA = E$.

K tomuto výsledku můžeme připojiti podobné poznámky jako k výsledku 10·1., že totiž matice P se nalezne pomocí metody Frobeniovy, a že je maticí v tělese K. Matice Y je v tělese K, jsou-li matice M a Y_0 v tělese K, což lze vždycky docíliti.

Podobně jako v 10·1·2 se odvodí:

Je-li matice A čtvercová řádu n, pak existuje právě jedno řešení Y rovnice $YA = E$, má-li matice A hodnost n. Je-li hodnost matice A menší než n /t.j. $|A| = 0$ /, pak rovnice $YA = E$ nemá řešení.

Když hodnost matice A je n, t.j.je-li $|A| \neq 0$, pak je toto jediné řešení rovnice $YA = E$ dáno vzorcem

$$Y = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A \ .$$

Toto řešení je zřejmě v tělese K.

Označme písmenem A^{-1} $\left({}^{-1}A\right)$ nějaké řešení rovnice $AX = E$ $\left(YA = E\right)$. Podle toho, co bylo shora řečeno, existuje A^{-1} $\left({}^{-1}A\right)$, jen když $m \leq n$ $\left(m \geq n\right)$. Je-li tedy $m \neq n$, pak neexistují obě matice A^{-1}, ${}^{-1}A$ současně. Naproti tomu je pro $m = n$ vždy $A^{-1} = {}^{-1}A$, když $|A| \neq 0$.

Pro svou jednoduchost a pro aplikace je důležitý právě zmíněný případ $m = n$.

<u>Definice</u>: Nechť A je matice čtvercová řádu n a její hodnost je n. Matice A^{-1} se nazývá <u>reciproká</u> k matici A.

Reciproká matice A^{-1} je tedy jediným řešením rovnice $AX = E$ a současně jediným řešením rovnice $YA = E$. Je definována jenom v případě, že A je čtvercová matice řádu i hodnosti n. Explicitně je matice A^{-1} dána vzorcem

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A \ ,$$

takže je též v tělese K.

Poznámka: 1/ Nechť A je čtvercová matice řádu n. Že každé řešení X rovnice $AX = E$ hoví současně rovnici $YA = E$, jeví se přímo také z následujícího: Je-li X řešení rovnice $AX = E$ a Y řešení rovnice $YA = E$, platí vztah:

$$X = EX = (YA)X = Y(AX) = YE = Y,$$

takže vychází

$$Y = X .$$

10·2. Čtvercová matice se nazývá r e g u l á r n í , když determinant $|A| \neq 0$. Jinak se A nazývá s i n g u l á r n í .
Definovali jsme tedy reciproké matice jenom pro matice regulární.

10·3. Je-li A čtvercová matice řádu n a regulární, matice B libovolná čtvercová matice téhož řádu n , pak obě matice $A^{-1}B$, BA^{-1} nejsou si nutně rovny.
Jsou-li však rovny, t.j. platí-li

$$A^{-1}B = BA^{-1} ,$$

takže A^{-1} je zaměnitelná s B , nazýváme matici $A^{-1}B$ nebo matici BA^{-1} p o d í l m a t i c e B a m a t i c e A a značíme jej někdy také $\frac{B}{A}$.

11. Věty o reciprokých maticích .

Nechť A značí regulární čtvercovou matici řádu n . Platí tyto věty:

Věta 11·1 . $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Věta 11·2 . $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Vskutku $|A^{-1}| = \frac{|\operatorname{Adj} A|}{|A|^n} = \frac{|A|^{n-1}}{|A|^n} = \frac{1}{|A|}$.

Věta 11·3 . $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Vskutku prvek c_{jk} v matici nalevo je $\frac{a^{jk}}{|A|}$.
Prvek c'_{jk} v matici napravo je $\frac{a^{jk}}{|A|}$.
Tedy $c_{jk} = c'_{jk}$ pro $j,k = 1,2,\ldots, n$.

Věta 11·4 . $(A^{-1})^{-1} = A$

Důkaz. Levá strana rovnice je definována jako řešení rovnice

$$A^{-1}X = E ,$$

která má jediné řešení $X = A$.

Věta 11·5 . Budiž také B regulární čtvercová matice řádu n .
Platí rovnice

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} .$$

Důkaz. Levá strana vztahu je řešení rovnice

$$(AB)X = E \quad .$$

Takové řešení X je právě jediné, protože z relace $|AB| = |A| . |B|$ a z předpokladu, že $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ plyne, že matice AB je regulární. ~~Násobením hořejší relace zleva~~ maticí $(B^{-1}A^{-1})$ obdržíme

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)X = (B^{-1}A^{-1})E \quad ,$$

$$B^{-1}(A^{-1}A)BX = B^{-1}A^{-1} \quad ,$$

$$(B^{-1}\ E\ B)X = B^{-1}A^{-1} \quad ,$$

tedy

$$EX = B^{-1}A^{-1}$$

neboli

$$\underline{X = B^{-1}A^{-1}} \quad .$$

Z této věty plyne obecnější věta:

J s o u - l i $A, B, C \ldots$ regulární čtvercové matice řádu n, pak je

$$(ABC\ldots)^{-1} = \ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1} \quad .$$

Věta 11·6. N e c h ť p l a t í p ř e d p o k l a d y věty 11.5. J s o u - l i m a t i c e A, B z a m ě n i t e l n é, j s o u t a k é A^{-1}, B^{-1} z a m ě n i t e l n é.

Důkaz. Matice $B^{-1}A^{-1}$ je řešení rovnice

$$(AB)X = E \ , \quad \text{jak plyne z věty 11·5} \ .$$

Podobně $A^{-1}B^{-1}$ je řešením rovnice

$$(BA)X = E \ .$$

Když tedy $AB = BA$, je matice $A^{-1}B^{-1}$ též řešením rovnice

$$(AB)X = E \ .$$

Avšak tato rovnice má jediné řešení, takže platí

$$B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1} \quad .$$

Věta 11·7 . Nechť platí předpoklady věty 11·5 .

J s o u - l i A,B z a m ě n i t e l n é , p a k t a k é A^{-1},B j s o u z a m ě n i t e l n é .

Důkaz. Ze vztahu $AB = BA$ plyne

$$B = A^{-1}BA \text{ a tedy}$$

$$BA^{-1} = (A^{-1}BA)A^{-1} = (A^{-1}B)(AA^{-1}) = (A^{-1}B)E = A^{-1}B .$$

Odtud a z věty 10·3 vychází, že podíl $\frac{B}{A}$ je definován tehdy a jen tehdy, jsou-li matice A,B zaměnitelné a matice A je regulární.

Věta 11·8 . Nechť také matice B,C jsou regulární čtverocvé matice řádu n . Nechť z matic A,B,C každé dvě jsou zaměnitelné.

$$\text{Pak je } \frac{A}{B} = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{BC} = \frac{AC}{CB} = \frac{AC}{BC} .$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$AB^{-1} = B^{-1}A = B^{-1}C^{-1}CA = (CB)^{-1}(CA) = (BC)^{-1}(CA) =$$
$$= (CB)^{-1}(AC) = (BC)^{-1}(AC) .$$

13.II.58

12. Vektory .

Vektor v n-rozměrném prostoru je uspořádaná skupina n čísel $x_1,\dots,x_n$. Takové skupině můžeme přiřaditi 2 matice, a to buď matici typu $1/n$ $(x_1,\dots,x_n)$, nebo matici typu $n/1$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. V dalších úvahách budeme zpravidla přiřazovati vektorům matice typu $n/1$, a takové matice přímo identifikovati s vektory. Vektory budeme značiti $(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, kde čísla $x_1,x_2,\dots x_n$ se nazývají složky vektoru. Pro vektory v n- rozměrném prostoru definujeme tyto 3 základní operace: 1/ rovnost, 2/ sečítání, 3/ skalární násobení, a to tím způsobem, že vektory identifikujeme s maticemi typu $n/1$ a na ně pak aplikujeme dříve definované příslušné operace s maticemi.

12·1. Tedy r o v n o s t dvou vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je vyjádřena rovnicemi $x_1 = y_1$, $x_n = y_n$ a vyjadřuje se symbolicky $(x) = (y)$.

12·2. S o u č e t v e k t o r ů (x) a (y) je vektor $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ jenž se označuje $(x)+(y)$.

12·3. S k a l á r n í s o u č i n čísla k s vektorem $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor $\begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$ a označuje se $k(x)$. Podobně skalární součin vektoru (x) s číslem k se označuje $(x).k$. Pro tyto operace platí pak opět pravidla I-III odst.6 /str.9/.

Každou matici typu m/n můžeme považovati za uspořádaný systém n vektorů v m - rozměrném prostoru anebo za uspořádaný systém m vektorů v n - rozměrném prostoru.

13. Lineární substituce.

Nechť A je matice typu m/n. Nechť (x) je vektor v n-rozměrném prostoru. Matice

$$(x^*) = A(x)$$

je pak typu m/1. Je to tedy vektor v m- rozměrném prostoru. Pravíme, že vektor (x^*) vznikl z vektoru (x) l i n e á r n í t r a n s f o r m a c í a nebo l i n e á r n í s u b s t i t u c í O matici A. Při obvyklém označení čísel v matici A jsou složky vektoru (x^*)

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_m^* &= a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \end{aligned}.$$

V souvislosti s pojmem lineární substituce objeví se nám definice rovnosti, sečítání, skalárního násobení a násobení matic, jak jsme je zavedli v odst. 5 na str.5-8, velmi přirozenými.

13·1. R o v n o s t. Nechť A,B značí matice typu m/n. Transformuje-li lineární substituce o matici A každý vektor (x) v týž vektor jako lineární substituce o matici B, pak je A = B.

Důkaz: Za daných předpokladů platí

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n & = & b_{11}x_1+\dots+b_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n & = & b_{m1}x_1+\dots+b_{mn}x_n \end{array}$$

Odtud plynou, dosadíme-li na př. za $x_1=1$, $x_2=\dots=x_n=0$, rovnosti $a_{11}=b_{11}$, $\dots$, $a_{m1}=b_{m1}$, atd., a tedy $A=B$.

13·2. S e č í t á n í . Nechť opět A,B značí matice typu m/n. Nechť (x) značí libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, (x^*) vektor transformovaný z vektoru (x) lineární substitucí o matici A, (x^{**}) vektor transformovaný z vektoru (x) lineární substitucí o matici B. Pak matice $A+B$, t.j. součet obou matic A a B, je právě taková, že lineární substituce o matici $(A+B)$ transformuje týž vektor (x) ve vektor $(x^*)+(x^{**})$.

Důkaz. Z rovnic $(x^*)=A(x)$, $(x^{**})=B(x)$ plyne $(x^*)+(x^{**})=A.(x)+B(x)=(A+B).(x)$ podle pravidla 6,IV. /str.9/.

13·3. S k a l á r n í n á s o b e n í . Nechť A značí matici typu m/n. Nechť k značí libovolné číslo. Dále budiž (x) libovolný vektor v n - rozměrném prostoru a (x^*) vektor vzniklý z vektoru (x) lineární substitucí o matici A. Pak matice kA /t.j. skalární součin čísla k a matice A/ je právě taková, že lineární substituce o matici kA transformuje vektor (x) ve vektor $k(x^*)$.

Důkaz. Z rovnice $(x^*)=A\cdot(x)$ plyne

$$k(x^*)=k[A(x)]=(kA)\cdot(x) .$$

13·4. N á s o b e n í . Nechť A značí matici typu m/n, B matici typu h/m. Dále budiž (x) libovolný vektor v n-rozměrném prostoru, (x^*) vektor vzniklý z vektoru (x) lineární substitucí o matici A, (x^{**}) vektor vzniklý z tohoto nového vektoru (x') lineární substitucí o matici B. Pak matice BA, t.j. součin matice B s maticí A, je právě taková, že lineární substituce o matici BA transformuje týž vektor (x) ve vektor (x'').

Důkaz. Z rovnic $(x') = A.(x)$, $(x'') = B(x')$ plyne

$$(x'') = B[A(x)] = (BA).(x)$$

13.5. D ě l e n í . Nechť A značí regulární čtvercovou matici řádu n. Nechť (x) značí libovolný vektor v n-rozměrném prostoru a (x') vektor vzniklý z vektoru (x) lineární substitucí o matici A. Pak matice A^{-1}, t.j. reciproká matice k matici A, je právě taková, že lineární substituce o matici A^{-1} transformuje vektor (x') v původní vektor (x).

Důkaz. Z rovnic $(x') = A.(x)$, $(x'') = A^{-1}(x')$

plyne $(x'') = A^{-1}[A.(x)] = (A^{-1}A)(x) = (x)$.

P o z n á m k a . Všimněme si, že každý vektor v n-rozměrném prostoru se libovolnou substitucí o matici typu m/n transformuje ve vektor v prostoru m-rozměrném.

14. Charakteristická rovnice matice.

Nechť A značí libovolnou čtvercovou matici řádu n. Hledejme, zda existuje v n-rozměrném prostoru vektor (x), který se lineární substitucí o matici A změní ve vektor (x') tvaru $\lambda(x)$, při čemž λ značí nějaké číslo. V této úloze je /pro $\lambda = 1$ / zahrnuta úloha: Vyhledati vektory, které se lineární substitucí o matici A nezmění. Při tom nás ovšem zajímají jenom vektory, jejichž všechny složky nejsou nuly.

Označme čísla matice A písmeny a_{jk}, takže $A = \| a_{jk} \|$. Každý vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, mající uvažovanou vlastnost, hoví lineárním rovnicím

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} ,$$

a tedy rovnicím

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 .\end{aligned} \qquad /1/$$

Existuje-li vektor (x) s uvedenými vlastnostmi, pak je nutně

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad /2/$$

Levá strana tohoto vztahu je polynom ~~n-tého stupně~~ v λ, takže vzorec /2/ vyjadřuje algebraickou rovnici n-tého stupně pro λ. Polynom tento nazýváme charakteristický polynom matice A a příslušnou rovnici charakteristická rovnice matice A.

Když se tedy nějaký vektor (x), jehož všechny složky nejsou nuly, lineární substitucí o matici A transformuje ve vektor (x), je číslo λ kořenem charakteristické rovnice matice A. Ke každému takovému λ se pak příslušné vektory vypočtou z rovnic (1).

Podotkněme ještě, že charakteristickou rovnici /2/ můžeme stručněji psáti ve tvaru

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad /3/$$

Připomeňme si ještě, že označíme-li si charakteristický polynom matice A symbolem $\varphi(\lambda)$ a jeho kořeny $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, platí zřejmě vztah

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) .$$

20/11

15. Orthogonální matice.

15.1. V euklidovské geometrii se každému vektoru v n-rozměrném prostoru přiřazuje určitá délka, a to tak, že délkou vektoru $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ se rozumí číslo

$$s = \left|\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right| .$$

čtverec délky vektoru (x) je tedy

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

a je to číslo, z něhož se skládá matice typu 1/1 :

$$(x_1, \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)' \cdot (x) \quad ,$$

t.j. matice, která je součinem matice $(x)'$ sdružené s maticí (x) a matice (x) .

Lineární substituce $\quad (x^*) = R.(x)$

o čtvercové matici R se nazývá o r t h o g o n á l n í , když vždycky vektor transformovaný (x^*) má tutéž délku jako vektor původní (x) neboli jinými slovy, k d y ž z a c h o v á v á d é l k y v e k t o r ů .

M a t i c e R se pak nazývá o r t h o g o n á l n í .

Lineární orthogonální substituce jsou pro euklidovskou geometrii velmi důležité. V této geometrii se totiž studují vlastnosti útvarů /na př. vektorů, lineárních prostorů, křivek a pod./, které se nemění orthogonálními substitucemi.

Budiž
$$(x^*) = R.(x) \qquad /1/$$
orthogonální substituce, takže platí

$$(x^*)' (x^*) = (x)' (x) \quad .$$

Odtud je
$$[R.(x)]' [R.(x)] = (x)' (x) \quad , \text{ takže}$$
$$(x)' [R'R] (x) = (x)' (x) \qquad /2/$$

Tato rovnice je zřejmě splněna, je-li

$$R'R = E \quad . \qquad /3/$$

Je tedy platnost rovnice /3/ d o s t a č u j í c í p o d m í n k o u k tomu, aby substituce /1/ byla orthogonální. Je však také, jak ukážeme, p o d m í n k o u n u t n o u .

Důkaz. Označme písmeny c_{jk} $[j,k = 1,2,\dots,n]$ čísla matice $R'R$. Protože $(R'R)' = R'R$, je matice $R'R$ symetrická. Tedy $c_{jk} = c_{kj}$ pro $j,k = 1,2,\dots,n$. Zvolme za vektor (x) vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule mimo j-té, která je rovna 1. Pro levou stranu vztahu /8/ pak máme

$$\underbrace{(0 \ldots 1}_{j} \ldots 0) \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} j = (c_{jj}) ,$$

kdežto pravá strana $(0 \ldots 1 \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1)$.

Je tedy $c_{jj} = 1$ pro $j = 1,2, \ldots n$.

Zvolme nyní za (x) vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\}j$ $\}k$, jehož všechny složky jsou rovny nule, kromě složky j-té a k-té, které jsou rovny 1 $(j < k)$. Pak levá strana vztahu /8/ je

$$(0 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 0) \begin{pmatrix} c_{11} \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \\ c_{n1} \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} = (c_{jj} + c_{kj} + c_{jk} + c_{kk}) ,$$

kdežto pravá strana $(x)'\cdot(x) = (2)$.

Tedy

$$c_{jj} + c_{kk} + c_{jk} + c_{kj} = 2 .$$

Avšak $c_{jj} = c_{kk} = 1$, jak bylo zjištěno, takže

$$c_{jk} = - c_{kj} ,$$

a protože současně platí $c_{jk} = c_{kj}$, je $c_{jk} = 0$ pro $j \neq k$.

Je tedy $R'R = E$.

Obdrželi jsme tedy větu:

Č t v e r c o v á m a t i c e R j e o r t h o g o n á l n í, k d y ž a j e n k d y ž s p l ň u j e r o v n i c i

$$R R' = E .$$

15·2. Nechť R je čtvercová orthogonální matice. Pak je nutně regulární a její determinant $|R| = \pm 1$.

Důkaz. Z rovnice $R'R = E$ plyne bezprostředně

$$|R'R| = |R'|.|R| = |E| = 1$$

a protože $|R'| = |R|$, je

$$|R|^2 = 1$$

a odtud $$|R| = \pm 1.$$

D e f i n i c e . Matice R se nazývá v l a s t n í /resp. n e v l a s t n í / o r t h o g o n á l n í m a t i c e , když je $|R| = 1$ /resp. $|R| = -1$ / .

15·3 . Protože matice R je regulární, plyne z rovnice ~~$R'R = E$~~ ~~násobením~~ zprava reciprokou maticí R^{-1} vztah

$$R'(R\,R^{-1}) = E\,R^{-1}$$

a odtud $$R' = R^{-1} .$$

Avšak $R^{-1} = \frac{1}{|R|} \cdot \operatorname{Adj} R = \pm \operatorname{Adj} R$.

Tedy $$R' = \pm \operatorname{Adj} R ,$$

při čemž platí znaménko + , když je R vlastní orthogonální matice, znaménko − , je-li R nevlastní.

Označíme-li písmeny r_{jk} čísla matice R a r^{jk} algebraický komplement prvku r_{jk} v determinantu $|R|$, je v j-tém řádku a k-tém sloupci matice na levé straně rovnice $R' = \pm \operatorname{Adj} R$ číslo r_{kj} a stejnolehlé číslo na pravé straně $\pm r^{kj}$.

Vychází tedy $r'_{jk} = \pm r^{jk}$ pro $j,k = 1,2,\ldots n$.

Platí tedy věta :

V d e t e r m i n a n t u R k a ž d é o r t h o g o n á l n í m a t i c e R j e a l g e b r a i c k ý k o m p l e m e n t l i b o v o l n é h o p r v k u r o v e n h o d n o t ě t o h o t o p r v k u , je-li R v l a s t n í o r t h o g o n á l n í m a t i c e ; j e p a k r o v e n z á p o r n é h o d n o t ě t o h o t o p r v k u , k d y ž R j e n e v l a s t n í o r t h o g o n á l n í m a t i c e .

P ř í k l a d y . 15·3·1. Příkladem v l a s t n í orthogonální matice je

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

při čemž φ značí libovolné číslo.

Zřejmě je $|R| = 1$. Lineární substituce o této matici

$$x_1^* = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi$$
$$x_2^* = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi$$

je rotace v euklidovské rovině. Při této lineární substituci se v případě $\varphi \neq 2k\pi$, k celé, nemění pouze jediný vektor, a to vektor $\binom{0}{0}$. Vskutku, aby se nějaký vektor $\binom{x_1}{x_2}$ touto substitucí neměnil, je nutné a stačí, aby platily rovnice

$$x_1 = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi$$
$$x_2 = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi ,$$

tedy, aby jeho složky hověly rovnicím

$$x_1 (\cos\varphi - 1) + x_2\sin\varphi = 0$$
$$-x_1\sin\varphi + x_2(\cos\varphi - 1) = 0 .$$

Determinant soustavy je

$$(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \neq 0$$

pro $\varphi \neq 2k\pi$; je tedy $x_1 = x_2 = 0$.

15·3·2. Příkladem n e v l a s t n í orthogonální matice je

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je $|R| = -1$. Lineární substituce o této matici, daná vztahy

$$x_1^* = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi ,$$
$$x_2^* = x_1\sin\varphi - x_2\cos\varphi ,$$

je složena z rotace $x_1^{**} = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi$

$$x_2^{**} = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi$$

a symetrie vzhledem k ose x_1

$$x_1^* = x_1^{**}, \quad x_2^* = -x_2^{**} .$$

V tomto případě existují vektory, které se substitucí /1/ nemění.

Vskutku, z rovnic

$$x_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi$$
$$x_2 = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi$$

plyne

$$x_1(\cos\varphi - 1) + x_2 \sin\varphi = 0$$
$$x_1 \sin\varphi - x_2 (\cos\varphi + 1) = 0 \quad .$$

Determinant soustavy je

$$-(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + 1) - \sin^2\varphi = -\cos^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi = 0$$

Vidíme, že řešení těchto rovnic je

$$x_1 = \lambda \sin\varphi$$
$$x_2 = \lambda(1 - \cos\varphi) \quad \text{při libovolném } \lambda \quad ,$$

takže všechny vektory $\begin{pmatrix} \lambda \sin\varphi \\ \lambda(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$ se transformací /1/ nemění.

16. Charakteristická rovnice orthogonální matice R. 4.12.5.

Nechť R značí libovolnou orthogonální matici řádu n.

Ukážeme, že k d y ž m a t i c e R j e r e á l n í, t.j. když je v tělese reálních čísel, p a k v š e c h n y k o ř e n y c h a r a k t e r i s t i c k é r o v n i c e $|R - \lambda E| = 0$ m a j í a b s o l u t n í h o d n o t u rovnu 1, t.j. jsou tvaru

$$\lambda_k = e^{i\varphi_k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots n$$

kde φ_k značí vhodné reální číslo. Ovšem komplexní kořeny jsou vždy po dvou komplexně sdružené, neboť rovnice $|R - \lambda E| = 0$ má reální koeficienty.

Důkaz. Uvažujme o matici $(R - \lambda E)^{-1}$, kde λ je libovolné číslo takové, že $|R - \lambda E| \neq 0$.

Zřejmě platí

$$(R - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{|R - \lambda E|} \cdot \operatorname{Adj}(R - \lambda E) \; .$$

Prvky matice $\operatorname{Adj}(R - \lambda E)$ jsou /podle definice adjungované matice/ algebr. komplementy prvků v determinantu $|R - \lambda E|$. Jsou to tedy polynomy stupně nejvýše /n-1/-ho v proměnné λ .Proto prvky matice $(R-\lambda E)^{-1}$ jsou lomené racionální funkce v λ a dají se tedy rozložiti v částečné zlomky.

Nechť λ_0 značí libovolný kořen rovnice $|R-\lambda E| = 0$ a nechť tento kořen je h_n- násobný.Pro společného dělitele všech minorů (n-1)-ho stupně v determinantu $|R-\lambda E|$ nechť je tento kořen h_{n-1}- násobný(může ovšem $h_{n-1}= 0$), tedy pro čitatele každého prvku v matici $(R-\lambda E)^{-1}$ je tento kořen a l e s p o ň h_{n-1}- násobný a pro čitatele alespoň jednoho prvku v této matici je p r á v ě h_{n-1}- násobný.Derivace determinantu $|R-\lambda E|$ je $D_\lambda |R-\lambda E| =$

$$= \begin{vmatrix} -1 & r_{12} \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22}-\lambda \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & r_{n2} \dots & r_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_{11}-\lambda & 0 & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & -1 & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{n1} & 0 & \dots & r_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} r_{11}- & r_{12} & \dots 0 \\ r_{21} & r_{22}- & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots -1 \end{vmatrix}$$

a je tedy součtem minorů (n-1)-ho stupně a proto je dělitelná výrazem $(\lambda-\lambda_0)^{h_{n-1}}$. Je tudíž λ_0 alespoň $(h_{n-1}+1)$- násobným kořenem rovnice $|R-\lambda E| = 0$. Odtud vyplývá, že $h_n > h_{n-1}$. Označíme-li $\alpha = h_n - h_{n-1}\ (>0)$, bude rozklad v částečné zlomky libovolného prvku c_{jk} v matici $(R-\lambda E)^{-1}$ tvaru

$$c_{jk} = \frac{a_{jk}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}} + \frac{b_{jk}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha-1}} + \dots ,$$

kde a_{jk}, b_{jk}, ... značí čísla a ~~nenapsané~~ členy obsahují kořenového činitele $(\lambda-\lambda_0)$ v mocnosti $m > 1-\alpha$ a kromě toho kořenové činitele patřící k ostatním kořenům rovnice $|R-\lambda E| = 0$. Všechna čísla a_{jk} $(j,k = 1,2,\dots,n)$ nejsou rovna nule,neboť pro čitatele alespoň jednoho prvku v matici $(R-\lambda E)^{-1}$ je λ_0 kořen právě h_{n-1}- násobný,takže rozklad tohoto prvku v částečné zlomky je tvaru $\frac{a}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}} + \dots$, kde konstanta $a \neq 0$.

Je tedy

$$(R-\lambda E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}}+\dots, & \dots, & \frac{a_{1n}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}}+\dots \\ \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}}+\dots, & \dots, & \frac{a_{nn}}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}}+\dots \end{pmatrix}$$

a matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$. Tedy je

$$(R - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} \cdot A + \dots \; .$$

Násobením maticí $(R - \lambda E) = -(\lambda - \lambda_0) \cdot E + (R - \lambda_0 E)$ plyne odtud

$$E = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} \left[-(\lambda - \lambda_0) A + (RA - \lambda_0 A) + \dots \right]$$

a tedy také

$$(\lambda - \lambda_0)^\alpha \cdot E = (RA - \lambda_0 A) - (\lambda - \lambda_0) A + \dots \; .$$

Porovnáním koeficientů při $(\lambda - \lambda_0)^0$ obdržíme

$$RA - \lambda_0 A = 0$$

neboli

$$RA = \lambda_0 A \; . \qquad /1/$$

Nechť $\bar{\lambda}_0$ značí číslo komplexně sdružené s λ_0 a $\bar{A}$ matici komplexně sdruženou s maticí A , t.j. $\bar{A} = \| \bar{a}_{jk} \|$.

Záměnou $-i$ za $+i$ plyne z poslední relace /R je reální/

$$R\bar{A} = \bar{\lambda}_0 \bar{A} \; ,$$

a dále

$$\bar{A}' R' = \bar{\lambda}_0 \bar{A}' \; ;$$

odtud násobením s rovnicí /1/ obdržíme

$$\bar{A}' (R'R) A = \bar{\lambda}_0 \lambda_0 \bar{A}' A \; .$$

A ježto $R'R = E$, je

$$(1 - \bar{\lambda}_0 \lambda_0) \bar{A}' A = 0 \; .$$

Avšak $\bar{A}' A \neq 0$, neboť $A \neq 0$, takže nutně je

$$\bar{\lambda}_0 \cdot \lambda_0 = 1 \; .$$

Z toho vidíme, že λ_0 má vskutku absolutní hodnotu rovnu 1 .

17. Určení všech orthogonálních matic R , pro něž platí vztah $|R + E| \neq 0$.

Nechť R je libovolná orthogonální matice řádu n taková, že

$$|R + E| \neq 0 \; ,$$

t.j. že charakteristická rovnice matice R nemá kořen -1

{takže neexistuje nenulový vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, který se lineární substitucí o matici R transformuje ve vektor opačného směru, t.j. ve vektor $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$. }

Pomocí matice R utvořme následující matici T

$$T = (E - R)(E + R)^{-1} .$$

Násobíme-li tuto matici zprava maticí $(E + R)$, obdržíme

$$T(E + R) = E - R \qquad /17 \cdot 1/$$

a přejdeme-li k maticím sdruženým, dostaneme

$$(E + R)'T' = (E - R)' ,$$

neboli

$$(E + R')T' = E - R' .$$

Násobíme-li nyní zleva tuto matici maticí R a užijeme vztahu $RR' = E$, obdržíme

$$(R + E)T' = R - E .$$

Odtud vychází násobením zleva maticí $(R + E)^{-1}$

$$T' = (R + E)^{-1} . [-(E - R)] ,$$

t.j.

$$T' = -(R + E)^{-1}(E - R) .$$

Matice $(R + E)^{-1}$, $(E - R)$ jsou zaměnitelné, jak plyne z dalšího. Je totiž $(R + E)(E - R) = R + E - R^2 - R = E - R^2 = (E-R)(R+E)$, takže matice $(R + E)$, $(E - R)$ jsou zaměnitelné a podle věty 11.7 jsou také matice $(R + E)^{-1}$, $(E - R)$ zaměnitelné. Vychází tedy

$$T' = -(E - R)(R + E)^{-1} = -T .$$

Tedy matice T je p o l o s y m e t r i c k á . Dále se snadno odvodí, že m a t i c e $(E + T)$ j e r e g u l á r n í .

Platí totiž

$$E + T = (E+R)(E+R)^{-1} + (E-R)(E+R)^{-1} =$$

$$= (E+R + E - R)(E+R)^{-1} = 2E(E+R)^{-1} ,$$

takže

$$|E+T| = 2^n |E+R|^{-1} \neq 0 .$$

Dále plyne ze vztahu /17·1/

$$T + TR = E-R$$

$$R + TR = E-T ,$$

$$(E + T)R = E-T .$$

Matice $(E+T)$ je regulární, jak jsme zjistili, takže platí

$$R = (E+T)^{-1}\,(E-T) \,.$$

Matice $(E+T)^{-1}$, $(E-T)$ jsou zřejmě zaměnitelné, takže poslední vztah můžeme psáti ve tvaru

$$R = \frac{E-T}{E+T} \qquad /17\cdot 2/$$

Došli jsme k tomuto výsledku:

Nechť R je libovolná orthogonální matice taková, že $|E+R| \neq 0$. Pak existuje polosymetrická matice T vyznačující se tím, že $|E+T| \neq 0$ a matice

$$\frac{E-T}{E+T} = R \,.$$

Naopak, značí-li T jakoukoliv polosymetrickou matici takovou, že $|E+T| \neq 0$, je matice

$$R = \frac{E-T}{E+T}$$

orthogonální a matice $(E+R)$ je regulární.

Důkaz. Z /17·2/ plyne

$$R' = \left[(E-T)(E+T)^{-1}\right]' = \left[(E+T)^{-1}\right]' \cdot (E-T)' =$$
$$= \left[(E+T)'\right]^{-1} (E+T) = (E-T)^{-1} (E+T) \,.$$

Tedy $\quad R'R = (E-T)^{-1}(E+T)(E+T)^{-1}(E-T) = E \,,$

takže matice R je orthogonální.

Dále plyne z /17·2/

$$R\,(E+T) = E-T \,,$$
$$(R + E - E)(E+T) = E-T$$
$$(R+E)(E+T) - (E+T) = E-T \,,$$
$$(R+E)(E+T) = 2E$$
$$|R+E| = 2^n\,|E+T|^{-1} \neq 0 \,.$$

Takže můžeme vysloviti větu:

Věta 17·3 : Všechny orthogonální matice n-tého řádu, R, pro něž $|R+E| \neq 0$, jsou vyjádřeny vzorcem

$$R = \frac{E - T}{E + T} ,$$

v němž T značí libovolnou polosymetrickou matici řádu n, která hoví vztahu $|E + T| \neq 0$.

Příklad 17·3·1 : Napišme explicitně výraz /17·2/ pro orthogonální matici R řádu n = 2.

Pro n = 2 je každá polosymetrická matice tvaru

$$T = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix} ,$$

kde u značí nějaké číslo.

Determinant

$$|E + T| = \begin{vmatrix} 1 & u \\ -u & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2 ,$$

takže budeme předpokládati $1 + u^2 \neq 0$

Jest:
$$E + T = \begin{pmatrix} 1 & u \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(E + T) = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{pmatrix} .$$

Dále máme $$(E+T)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,(E+T)}{|E+T|} = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+u^2} .$$

Orthogonální matice je pak

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+u^2} = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1+u^2} & -\frac{u}{1+u^2} \\ \frac{u}{1+u^2} & \frac{1}{1+u^2} \end{pmatrix} ,$$

tedy

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} , & \frac{-2u}{1+u^2} \\ \frac{2u}{1+u^2} , & \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{pmatrix} .$$

Dosadíme-li do této matice za $u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, obdržíme

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Tím jsme obdrželi všechny orthogonální matice 2.řádu,hovící rovnici $|R+E| \neq 0$;vidíme,že jsou to právě všechny v l a s t n í orthogonální matice.

Příklad 17·3·2 : Pro m a t i c e o r t h o g o n á l n í 3. ř á d u obdržíme podobně polosymetrickou matici

$$T = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -u & 0 & w \\ -v & -w & 0 \end{pmatrix} ,$$

kde u, v, w značí nějaká čísla.

Determinant

$$|E + T| = \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ -u & 1 & w \\ -v & -w & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2 + v^2 + w^2 ,$$

takže budeme předpokládati,že $1 + u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$.

Dále určíme

$$\operatorname{Adj}(E+T) = \begin{pmatrix} 1+w^2 & -u-vw & -v+uw \\ u-vw & 1+v^2 & -w-uv \\ v+uw & w-uv & 1+u^2 \end{pmatrix} ,$$

$$(E-T)\operatorname{Adj}(E+T) = \begin{pmatrix} 1 & -u & -v \\ u & 1 & -w \\ v & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+w^2 & -u-vw & -v+uw \\ u-vw & 1+v^2 & -w-uv \\ v+uw & w-uv & 1+u^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-u^2-v^2+w^2 & -2u-2vw & -2v+2uw \\ 2u-2vw & 1-u^2+v^2-w^2 & -2w-2uv \\ 2v+2uw & 2w-2uv & 1+u^2-v^2-w^2 \end{pmatrix}$$

Tedy,

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{1-u^2-v^2+w^2}{1+u^2+v^2+w^2}, & -2\,\dfrac{u+v\,w}{1+u^2+v^2+w^2}, & -2\,\dfrac{v-uw}{1+u^2+v^2+w^2} \\ 2\,\dfrac{u-v\,w}{1+u^2+v^2+w^2}, & \dfrac{1-u^2+v^2-w^2}{1+u^2+v^2+w^2}, & -2\,\dfrac{w+uv}{1+u^2+v^2+w^2} \\ 2\,\dfrac{v+u\,w}{1+u^2+v^2+w^2}, & 2\,\dfrac{w-u\,v}{1+u^2+v^2+w^2}, & \dfrac{1+u^2-v^2-w^2}{1+u^2+v^2+w^2} \end{pmatrix}.$$

je explicitní výraz pro všechny orthogonální matice 3.řádu,pro něž $|R+E| \neq 0$.

18) Unitární matice.

18·1 Je-li A libovolná matice,značíme matici komplexně sdruženou s maticí A symbolem $\bar{A}$, takže prvek a^*_{jk} matice $\bar{A}$

$$a^*_{jk} = \bar{a}_{jk} ,$$

kde $\bar{a}_{jk}$ je číslo komplexně sdružené s číslem a_{jk} .

Když matice A je v tělese reálních čísel,pak zřejmě $\bar{A} = A$. V e u k l i d o v s k é geometrii se obvykle uvažuje o r e á l n í c h v e k t o r e c h , kdežto v geometrii h e r m i t e o v s k é se uvažuje o v e k t o r e c h k o m p l e x n í c h ,t.j.vektorech,jejichž složky jsou komplexní.

V hermitovské/parabolické/geometrii se ke každému vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ přiřazuje určitá délka,při čemž se délkou uvedeného vektoru rozumí číslo

$$s = \left| \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n} \right| \geq 0 .$$

Čtverec délky vektoru (x) je tedy číslo,z něhož se skládá součin matice $(\bar{x})'$ s maticí (x) , tedy

$$(s^2) = (\bar{x})'(x) .$$

18·2. L i n e á r n í s u b s t i t u c e $(x^*) = U.(x)$ o čtvercové matici U se nazývá u n i t á r n í , k d y ž t r a n s f o r m o v a n ý v e k t o r (x^*) m á t u- **t é ž h e r m i t e o v s k o u d é l k u j a k o p ů- v o d n í v e k t o r (x)**

Matice U se pak nazývá unitární. Podmínka, aby matice U byla unitární, najde se podobně jako u matic orthogonálních. Nechť

$$(x^*) = U.(x)$$

značí unitární substituci, takže

$$(\bar{x}^*)'\,(x^*) = (\bar{x})'\,(x)$$

Odtud plyne

$$\left[\bar{U}.\,(\bar{x})\right]'\left[U.(x)\right] = (\bar{x})'.(x)\ ,$$

takže str. 31

$$(\bar{x})'\,(\bar{U}'U)\,(x) = (\bar{x})'.(x) \qquad (18.1)$$

~~Podobně jako u orthogonálních substitucí ukážeme, že tato relace~~ je splněna pro každý vektor (x), když a jen když

$$\bar{U}'U = E\ . \qquad (18.2)$$

Důkaz. a/ Je-li splněna rovnice ~~(18.2), pak zřejmě~~ platí (18.1).

b/ Nechť tedy naopak platí (18.1) pro každý vektor (x). Označme písmeny c_{jk} $(j,k = 1,\dots,n)$ ~~čísla matice~~ $\bar{U}'U$.

Zvolíme-li za (x) vektor, jehož složky jsou nuly mimo j-tou, která jest 1, obdržíme podobně jako u orthogonálních matic

$$c_{jj} = 1\ .$$

Zvolíme-li dále za (x) vektor, jehož složky jsou nuly mimo j-tou a k-tou $(j \neq k)$, které jsou rovny 1, obdržíme podobně

$$c_{jk} + c_{kj} = 0$$

Zvolíme-li konečně za (x) vektor, jehož složky jsou nuly mimo j-tou, která je $= 1$, a mimo k-tou, která je $= i$ $(j \neq k)$, obdržíme podobně

$$c_{jk} - c_{kj} = 0\ .$$

Vidíme tedy, že vychází

$$c_{jj} = 1,\quad c_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad j,k = 1,2,\dots,n\ .$$

18.3. Jako příklad unitární matice vezměme případ pro $n = 2$.

Je-li matice $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ unitární, platí vztahy/podle definice/

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

takže čísla $u_{11}, u_{12}, \ldots$ splňují vztahy

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11} u_{11} + \bar{u}_{21} u_{21} &= 1 , & \bar{u}_{12} u_{11} + \bar{u}_{22} u_{21} &= 0 \\ \bar{u}_{11} u_{12} + \bar{u}_{21} u_{22} &= 0 , & \bar{u}_{12} u_{12} + \bar{u}_{22} u_{22} &= 1 \end{aligned} \qquad (18.3)$$

Z těchto vztahů plyne především, že čísla u_{11}, u_{22} mají stejné absolutní hodnoty.

$$u_{11} \bar{u}_{11} = u_{11} \bar{u}_{11}(u_{12} \bar{u}_{12} + u_{22} \bar{u}_{22}) = \bar{u}_{11} u_{12} \cdot u_{11} \bar{u}_{12} + u_{11} \bar{u}_{11} u_{22} \bar{u}_{22} =$$
$$= - \bar{u}_{21} u_{22} \cdot u_{11} \bar{u}_{12} + u_{11} \bar{u}_{11} u_{22} \bar{u}_{22} = \bar{u}_{21} u_{22} \cdot \bar{u}_{22} u_{21} + u_{11} \bar{u}_{11} u_{22} \bar{u}_{22} =$$
$$= (u_{11} \bar{u}_{11} + \bar{u}_{21} u_{21}) u_{22} \bar{u}_{22} = u_{22} \bar{u}_{22} .$$

Odtud a z první a poslední rovnice /18.3/ plyne odečtením

$u_{12} \bar{u}_{12} = u_{21} \bar{u}_{21}$.

Tedy také čísla u_{12}, u_{21} mají stejné absolutní hodnoty.

Označíme-li tedy absolutní hodnoty $|u_{11}| = u$, $|u_{12}| = v$, takže $u, v \geq 0$, máme

$$\begin{aligned} u_{11} &= u\, e^{i\varphi} , & u_{12} &= v\, e^{i\psi} , \\ u_{21} &= v\, e^{i\chi} , & u_{22} &= u\, e^{i\omega} , \end{aligned} \qquad /18.4/$$

při vhodných reálních $\varphi, \psi, \chi, \omega$.

Z relací /18.3/ pak plyne

$$u^2 + v^2 = 1 , \quad e^{i(\psi - \varphi)} + e^{i(\omega - \chi)} = 0 .$$

Existuje tedy $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$ takové, že

$$u = \cos \Phi , \quad v = \sin \Phi ,$$

a z relace $e^{i(\psi - \varphi)} = - e^{i(\omega - \chi)}$ plyne při $vu \neq 0$

$$\psi - \varphi = \omega - \chi + \pi + 2k\pi ,$$

při čemž k značí celé číslo. Avšak čísla $\psi, \varphi, \omega, \chi$ jsou rovnicemi /18.4/ určena, až na celé násobky čísla 2π. Můžeme tedy v poslední rovnici člen $2k\pi$ vynechati, takže je

$$\psi - \varphi = \omega - \chi + \pi \quad (= 2\tau)$$

odtud plyne $\psi = \varphi + 2\tau$, $\omega = 2\tau + \chi - \pi$

píšeme-li $\varphi = \varphi_1 - \tau$, $\chi = \chi_1 - \tau$,

máme $\psi' = \varphi_1 + \tau$, $\omega = \chi_1 + \tau - \pi$

a rovnice /18.4/přejdou v následující/vynecháme-li indexy 1 u φ, χ /

$$u_{11} = \cos\phi . e^{i(\varphi-\tau)}, \quad u_{12} = \sin\phi . e^{i(\varphi+\tau)}$$
$$u_{21} = \sin\phi . e^{i(\chi-\tau)}, \quad u_{22} = -\cos\phi . e^{i(\chi+\tau)}$$

Naopak při každém systému reálních hodnot $\phi, \varphi, \chi, \tau$ je matice

$$U = \begin{pmatrix} \cos\phi \, e^{i(\varphi-\tau)} & \sin\phi . e^{i(\varphi+\tau)} \\ \sin\phi . e^{i(\chi-\tau)} & -\cos \, e^{i(\chi+\tau)} \end{pmatrix} \qquad /18.5/$$

unitární, jak se zjistí snadným počtem. Vzorec /18.5/ dává tedy všechny unitární matice řádu 2 .

19) Charakteristická rovnice unitární matice.

Věta: Charakteristická rovnice každé unitární matice má všechny kořeny o absolutní hodnotě $= 1$.

Důkaz. Tento výsledek se obdrží zcela podobně jako u matice orthogonální. Vskutku, je-li U libovolná unitární matice, existuje rozvoj

$$(U - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}} A + \dots , \qquad /19.1/$$

kde λ_0 je nějaký kořen charakteristické rovnice $|U - \lambda E| = 0$, $\alpha \geqq 1$, $A \neq 0$ a nenapsané členy obsahují kořenového činitele $(\lambda-\lambda_0)$ v mocnině $> -\alpha$, jakož i další členy, patřící k ostatním kořenům.

Násobíme-li rovnici /19.1/ maticí $U - \lambda E = -(\lambda-\lambda_0) E + (U - \lambda_0 E)$, obdržíme

$$E = \frac{(U - \lambda_0 E)A}{(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}} + \dots ,$$

a odtud porovnáním koeficientů při $(\alpha-\alpha_0)^{-\alpha}$ plyne

$$U A = \lambda_0 A .$$

Zřejmě pak je $$\overline{U}\,\overline{A} = \overline{\lambda}_0\,\overline{A}\ ,$$
$$\overline{A}'\,\overline{U}' = \overline{\lambda}_0\,\overline{A}'\ ,$$
takže $$\overline{A}'\,\overline{U}'\,UA = \overline{\lambda}_0\,\lambda_0\,\overline{A}'A\ ,$$
a ježto $$\overline{U}'U = E\ ,\quad A \neq 0\ ,$$
je $$\overline{\lambda}_0\,\lambda_0 = 1\ .$$

J i n ý d ů k a z . Označme symbolem S matici $(\overbrace{1,\dots,1}^{n})$.
Pak pro libovolný vektor $(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, je
$$S.(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\ .$$
Nechť $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ /kde α, β jsou reální čísla/ je libovolný kořen charakteristické rovnice libovolné unitární matice U ,
$$|U - \lambda E| = 0\ .$$
Nechť $(a+ib) = \begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \vdots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}$ je příslušný invariantní vektor lineární substituce o matici U, při čemž složky vektoru nejsou všechny rovny nule a čísla a, b jsou reální.

Platí tedy $$(\alpha + i\beta)(a+ib) = U\,(a+ib)$$
Jest pak $$S\,(a^2+b^2) = (a+ib)'\,(a-ib) = (a+ib)'\,U'\overline{U}\,(a-ib) =$$
$$= \left[U\,(a+ib)\right]'\left[\overline{U}\,(a-ib)\right] =$$
$$= \left[(\alpha+i\beta)\,(a+ib)\right]'\left[(\alpha-i\beta)\,(a-ib)\right] =$$
$$= (\alpha^2+\beta^2)\,(a+ib)'\,(a-ib) = (\alpha^2+\beta^2)\,S(a^2+b^2)$$
Avšak $S\,(a^2+b^2) > 0$. takže
$$1 = \alpha^2 + \beta^2\ .$$

30 Určení všech unitárních matic .

30.1. D e f i n i c e . Čtvercová matice H nazývá se h e r m i - t e o v s k á , platí-li
$$H' = \overline{H}\ ,$$
t.j. když čísla v hlavní diagonále matice H jsou reální a čísla symetricky položená vzhledem k této diagonále jsou komplexně sdružená.

Uvažujme nyní o libovolné unitární matici U řádu n-tého.

Předpokládejme nejprve, že

$$|U + E| \neq 0 ,$$

takže matice $U + E$ je regulární.

Pomocí matice U utvořme matici H :

$$H = i(E-U)(E+U)^{-1} \qquad /20.1/$$

Násobením zprava maticí $E+U$ obdržíme

$$H(E+U) = i(E-U) \qquad /20.1.1/$$

a záměnou $-i$ za $+i$

$$\bar{H}(E+\bar{U}) = -i(E-\bar{U}) .$$

Přejděme k maticím sdruženým. Pak je

$$(E+\bar{U}')\bar{H}' = +i(\bar{U}'-E) .$$

Násobením zleva maticí U a dosazením $U\bar{U}' = E$ obdržíme

$$(U+E)\bar{H}' = i(E-U) .$$

Násobením zleva maticí $(U+E)^{-1}$ dostaneme

$$\bar{H}' = i(U+E)^{-1}(E-U) .$$

Matice $U+E$, $E-U$ jsou zřejmě zaměnitelné. Tedy i matice $(U+E)^{-1}$, $E-U$ jsou zaměnitelné, takže podle /20.1/ je

$$\bar{H}' = i(E-U)(U+E)^{-1} = H ,$$

tedy

$$\bar{H}' = H$$

Tudíž matice H je hermiteovská.

Dále matice $E - iH$ je regulární, neboť

$$E - iH = (E+U)(E+U)^{-1} + (E-U)(E+U)^{-1} =$$
$$= (E+U + E-U)(E+U)^{-1} = 2E(E+U)^{-1} ,$$

takže $|E-iH| = 2^n |E+U|^{-1} \neq 0$.

Ze vztahu /20.1.1/ plyne

$$(H + iE)U = iE - H ,$$

takže jest

$$U = \frac{E + iH}{E - iH} . \qquad /20.2/$$

Odtud máme tedy výsledek:

Věta 20.2. N e c h ť U j e l i b o v o l n á u n i - t á r n í m a t i c e, p r o n i ž $U+E \neq 0$. P a k e x i s t u j e t a k o v á h e r m i t e o v s k á m a t i c e H, ž e m a t i c e $E-iH$ j e r e g u - l á r n í a m a t i c e $\frac{E+iH}{E-iH}$ j e m a t i c e U.
Naopak ~~platí, že pro~~ libovolnou ~~hermiteovskou matici~~ H, z níž utvořené matice $E-iH$ je regulární, matice

$$U = \frac{E+iH}{E-iH}$$

je u n i t á r n í.

Vskutku, je pak
$$\bar{U} = \frac{E-i\bar{H}}{E+i\bar{H}},$$

$$\bar{U}' = \frac{E-i\bar{H}'}{E+i\bar{H}'},$$

a ježto matice H je hermiteovská, platí

$$\bar{U}' = \frac{E-iH}{E+iH},$$

~~takže platí rovnice~~
$$\bar{U}'U = E .$$

Máme tedy výsledek:

Věta 20.3.: V š e c h n y u n i t á r n í m a t i c e U ř á d u $(n \geq 2)$, p r o n ě ž $|U+E| \neq 0$, j s o u v y j á d ř e n y v z o r c e m

$$U = \frac{E+iH}{E-iH}, \qquad /20.3/$$

v n ě m ž H z n a č í h e r m i t e o v s k o u m a t i c i ř á d u n, ~~vyznačující se tím, že~~ $|E-iH| \neq 0$.

~~Dosud jsme předpokládali, že matice~~ $U+E$ je regulární. V další ~~úvaze chceme~~ tento předpoklad odstraniti.

Nechť U značí libovolnou unitární matici n-tého řádu, takže
$$\bar{U}'U = E .$$

Nechť φ značí libovolné reální číslo. P a k m a t i c e $V = e^{i\varphi}U$ j e t a k é u n i t á r n í .

Vskutku, $\bar{V} = e^{-i\varphi}\bar{U}$, takže

$$\bar{V}' = e^{-i\varphi}\bar{U}'.$$

Je tedy $\bar{V}'V = \bar{U}'U = E$.

Dále je $|V-\lambda E| = |e^{i\varphi}U - \lambda E| = e^{in\varphi}|U-\lambda e^{-i\varphi}E|$,

takže je-li λ_0 kořenem charakteristické rovnice matice U , jest $\lambda_0 e^{i\varphi}$ kořenem charakteristické rovnice matice V . Podle odstavce 19. jsou všechny kořeny charakteristické rovnice matice U tvaru

$$e^{i\varphi_1}, \ e^{i\varphi_2}, \ \ldots \ e^{i\varphi_n} ,$$

při čemž $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ značí vhodná reální čísla, příp. i stejná, určená až na celé násobky čísla 2π .

Zřejmě můžeme zvoliti takové reální číslo φ , že

$$\varphi_k + \varphi \not\equiv \pi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) , \text{ kde } k = 1, 2, \ldots n ,$$

t.j. takové φ , že žádné z čísel $\varphi_1 + \varphi, \varphi_2 + \varphi, \ldots \varphi_n + \varphi$ se nerovná lichému násobku čísla π .

Pak žádné z čísel $e^{i(\varphi_1+\varphi)}, e^{i(\varphi_2+\varphi)}, \ldots, e^{i(\varphi_n+\varphi)}$ není rovno -1 , a tedy charakteristická rovnice hořejší matice V , v níž φ značí toto číslo, nemá kořen -1. Existuje proto hermiteovská matice H taková, že $E+iH \neq 0$ a

$$V = e^{i\varphi}U = \frac{E+iH}{E-iH} ,$$

neboli

$$U = e^{-i\varphi}\frac{E+iH}{E-iH} .$$

Máme tedy výsledek:

Věta 20.4. V š e c h n y u n i t á r n í m a t i c e U n-tého řádu j s o u v y j á d ř e n y v z o r c e m

$$U = e^{i\varphi}\frac{E+iH}{E-iH} ,$$

v němž H značí hermiteovskou matici řádu n, a φ reálné číslo.

20.5. **Příklad.** Vypočtěme explicitně všechny unitární matice druhého řádu. Zvolme takovou libov. hermit. matici H druhého řádu, aby $|E-iH| \neq 0$, totiž matici

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+ib_{12} \\ a_{12}-ib_{12} & a_{22} \end{pmatrix} , \qquad /20.5.1/$$

při čemž $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{12}$ jsou čísla reální, omezená jedině nerovností

$$\begin{vmatrix} 1-ia_{11} & -ia_{12}+b_{12} \\ -ia_{12}-b_{12} & 1-ia_{22} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad /20.5.2/$$

To znamená, že tato čísla splňují nerovnost

$$1+a_{12}^2+b_{12}^2 - a_{11}a_{22} - i\,(a_{11}+a_{22}) \neq 0 , \qquad /20.5.3/$$

takže alespoň jedno z obou čísel

$$a_{11}+a_{22} ,$$
$$1+a_{12}^2 + b_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

je od nuly různé. Je-li však $a_{11}+a_{22} = 0$, t.j. $a_{22} = -a_{11}$, je $1+a_{12}^2+b_{12}^2-a_{11}a_{22} \geq 1$. Je-li $1+a_{12}^2+b_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, je

$$a_{11}a_{22} = 1+a_{12}^2+b_{12}^2 > 0 ,$$

a tedy obě čísla a_{11}, a_{22} jsou od nuly různá a mají stejné znaménko, takže

$$a_{11}+a_{22} \neq 0 .$$

Vidíme tedy, že ať zvolíme H jakkoliv, je vždycky vyhověno vztahu /20.5.2/.

Jest

$$\mathrm{Adj}\,(E-iH) = \begin{pmatrix} 1-ia_{22} & ia_{12}-b_{12} \\ ia_{12}+b_{12} & 1-ia_{11} \end{pmatrix}$$

a dále

$$(E+iH) . \mathrm{Adj}\,(E-iH) = \begin{pmatrix} 1+ia_{11} & ia_{12}-b_{12} \\ ia_{12}+b_{12} & 1+ia_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-ia_{22} & ia_{12}-b_{12} \\ ia_{12}+b_{12} & 1-ia_{11} \end{pmatrix}$$

Je tedy

$$(E+iH).\,\mathrm{Adj}\,(E-iH) = \begin{pmatrix} 1+a_{11}a_{22}-a_{12}^2-b_{12}^2+i(a_{11}-a_{22}) & -2(b_{12}-ia_{12}) \\ 2(b_{12}+ia_{12}) & 1+a_{11}a_{22}-a_{12}^2-b_{12}^2-i(a_{11}-a_{22}) \end{pmatrix}$$

takže

$$U = e^{i\varphi}\frac{E+iH}{E-iH} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \dfrac{1+a_{11}a_{22}-a_{12}^2-b_{12}^2+i(a_{11}-a_{22})}{1-a_{11}a_{22}+a_{12}^2+b_{12}^2-i(a_{11}+a_{22})} & 2\dfrac{(-b_{12}+ia_{12})}{1-a_{11}a_{22}+a_{12}^2+b_{12}^2-i(a_{11}+a_{22})} \\ 2\,\dfrac{b_{12}+ia_{12}}{1-a_{11}a_{22}+a_{12}^2+b_{12}^2-i(a_{11}+a_{22})} & \dfrac{1+a_{11}a_{22}-a_{12}^2-b_{12}^2-i(a_{11}-a_{22})}{1-a_{11}a_{22}+a_{12}^2+b_{12}^2-i(a_{11}+a_{22})} \end{pmatrix}$$

~~je~~ explicitní výraz pro všechny unitární matice druhého řádu. Tento výraz se ovšem dá převésti na transcendentní tvar /18.5/.

21 Poznámka o maticích, které danou matici převádějí v sebe.

Nechť A je daná čtvercová matice řádu n. Jestliže nějaká čtvercová matice P řádu n má tu vlastnost, že

$$P'AP = A\,, \qquad /21.1/$$

říkáme, že m a t i c e P p ř e v á d í m a t i c i A v s e b e .

Aby nějaká matice P převáděla matici A ~~v sebe, musí ovšem míti zvláštní~~ vlastnosti. Z těchto uveďme jenom tyto:

1./ Z relace /21.1/ plyne

$$|P'|\,.\,|A|\,.\,|P| = |A| \quad , \quad \text{t.j.}$$

$$|P|^2\,.\,|A| = |A|\,.$$

Je-li tedy matice A regulární, t.j. $|A| \neq 0$, jest

$$|P^2| = 1\,,$$

$$\text{tedy} \quad |P| = \pm 1\,.$$

<u>Věta 21.1.</u> P ř e v á d í - l i m a t i c e P r e g u l á r n í m a t i c i v s e b e , j e s t j e j í d e r m i n a n t $|P| = \pm 1$.

Definice. Je-li $|P| = +1$, pravíme, že **transformace** matice A v sebe je **vlastní**. V druhém případě říkáme, že transformace je **nevlastní**.

Věta 31.2. *Transformuje-li matice P matici A v sebe, je matice P zaměnitelná s maticí $A^{-1}A'$.*

Důkaz. Z relace $\quad P'AP = A$

plyne $\quad P^{-1}A^{-1}P'^{-1} = A^{-1}$,

a odtud $\quad (P^{-1}A^{-1}P'^{-1})(P'A'P) = A^{-1}.A'$,

t.j. $\quad P^{-1}A^{-1}(P'^{-1}P')A'P = A^{-1}.A'$,

tedy $\quad P^{-1}(A^{-1}A')P = A^{-1}A'$

Odtud ihned vychází násobením zleva maticí P

$$(A^{-1}A')P = P(A^{-1}A') .$$

Věta 31.3. *Je-li A regulární matice, pak $A^{-1}A'$ transformuje matici A v sebe, a to transformací vlastní.*

Důkaz. Jest totiž

$$(A^{-1}A')'A\,(A^{-1}A') = [A(A^{-1})']A[A^{-1}A'] = A(A')^{-1}(AA^{-1})A' =$$

$$= A(A')^{-1}EA' = A[(A')^{-1}A'] = AE = A$$

Dále je $\quad |A^{-1}A'| = |A^{-1}|.|A'| = |A|^{-1}.|A| = \dfrac{|A|}{|A|} = 1 .$

Poznámka. Zvolíme-li zvláště za A matici jednotkovou E, vidíme, že všecky matice R, které matici E převádějí v sebe, hoví vztahu $\quad R'ER = E$, $\quad$ t.j.

$$R'R = E ,$$

takže jsou to matice orthogonální. Každá orthogonální matice má tedy vlastnosti 31.1 - 31.3 /kromě jiných/, ale jak vidíme, jsou výroky vět 31.2, 31.3 pro ni triviální.

Kdybychom definici transformace matice A v sebe maticí Q definovali vztahem $\quad \bar{Q}'AQ = A$,

obdrželi bychom podobné výsledky, a jako zvláštní případ pro $A = E$ dostali bychom matice unitární.

22. Racionální funkce matic.

Nechť A značí libovolnou čtvercovou matici řádu n. Matici $\underbrace{A.A \dots A}_{\alpha}$ (α přirozené) značíme A^{α} /viz odst.6/.

Z associativního zákona pro násobení matic ihned plyne

$$A^{\alpha} . A^{\beta} = A^{\alpha+\beta} \qquad /22.1/$$

Klademe-li $A^0 = E$, platí rovnice /22.1/ i když některý z exponentů je 0. Jestliže A je r e g u l á r n í, takže existuje A^{-1}, značíme matici

$\underbrace{A^{-1}.A^{-1} \dots A^{-1}}_{\alpha}$ (α přirozené) symbolem $A^{-\alpha}$, takže

$$A^{-\alpha} = (A^{-1})^{\alpha}$$

Rovnice /22.1/ platí, i když oba nebo jeden z ~~exponentů jsou~~ záporné. Jsou-li oba záporné, je to zřejmé, neboť pro $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$ $(\alpha', \beta' > 0)$ je

$$A^{\alpha} . A^{\beta} = A^{-\alpha'} . A^{-\beta'} = \overbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}^{\alpha'} . \overbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}^{\beta'} = \overbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}^{\alpha'+\beta'} =$$

$$= A^{-\alpha'-\beta'} = A^{-(\alpha'+\beta')} = A^{\alpha+\beta} .$$

Je-li jenom α záporné a je-li na př. $-\alpha < \beta$, je

$$\underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{-\alpha} . \underbrace{A \dots A}_{\beta} = A^{-1} \dots A^{-1} . (A^{-1}A) A \dots A = \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{-\alpha-1} . \underbrace{A \dots A}_{\beta-1} =$$

$$= \underbrace{A \dots A}_{\beta-\alpha} = A^{\beta+(\alpha)}$$

. Odtud plyne výsledek

Věta 22.1. R o v n i c e $A^{\alpha} . A^{\beta} = A^{\alpha+\beta}$ p l a t í p r o v š e c h n y e x p o n e n t y c e l é n e z á p o r n é a j e-l i A r e g u l á r n í, i p r o e x p o n e n t y z á p o r n é .

Dále platí tyto věty:

Věta 22.2 : Pro každé celé α je $E^{\alpha} = E$.

Věta 22.3 : Je-li a libovolná konstanta, α celé, jest

$$(a A)^{\alpha} = a^{\alpha} A^{\alpha}$$

existuje-li matice na levé straně.

Věta 22.4 : Pro α celé je $(A^{\alpha})' = (A')^{\alpha}$, existuje-li A^{α} .

Věta 22.5 : $|A^{\alpha}| = |A|^{\alpha}$ pro všechna celá α, existuje-li A^{α} .

D e f i n i c e . Nechť $g(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1}+\dots+ a_m$ značí polynom stupně m ($\geqq 0$) , takže $a_0,a_1,\dots,a_m$ značí konstanty, z nichž alespoň $a_0 \neq 0$. Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n .

Matice $a_0A^m + a_1 A^{m-1} +\dots+ a_m A^0$ se nazývá p o l y n o m /stupně m/ v m a t i c i A a značí se $g(A)$.

Tedy $g(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} +\dots+ a_mA^0$

Ke každému polynomu $g(x)$ a každé čtvercové matici A můžeme přiřaditi matici $g(A)$ uvedeným způsobem.

Platí tyto věty:

Věta 22.6 : $[g(A)]' = g(A')$.

Vskutku, jest

$$[g(A)]' = [a_0A^m+ a_1A^{m-1}+\dots+ a_mA^0]' = (a_0A^m)'+(a_1A^{m-1})'+\dots+(a_mA^0)' =$$
$$= a_0(A')^m+ a_1(A')^{m-1} +\dots+ a_m(A')^0 = g(A') .$$

Věta 22.7 : K a ž d é d v a p o l y n o m y v m a t i c i A j s o u z a m ě n i t e l n é .

Důkaz. Jsou-li $g(A) = a_0A^m+ a_1A^{m-1} +\dots+ a_mA^0$

a $h(A) = b_0A^k +b_1A^{k-1} +\dots+ b_kA^0$

polynomy v matici A , jest každá z matic $a_0A^m ,a_1A^{m-1},\dots,a_mA^0$ zaměnitelná s každou z matic $b_0A^k,b_1A^{k-1},\dots,b_kA^0$, a tedy též polynom $g(A)$ je zaměnitelný s polynomem $h(A)$.

Věta 22.8 : J s o u - l i $g(A)$, $h(A)$ p o l y n o m y v m a t i c i A, a k r o m ě t o h o j e $h(A)$ r e - g u l á r n í , j s o u p o l y n o m y $g(A)$, $[h(A)]^{-1}$ z a m ě n i t e l n é .

Důkaz. Podle věty 22.7 jsou $g(A)$ a $h(A)$ zaměnitelné, a tedy podle věty 11.7 /str.25/ také $g(A)$, $[h(A)]^{-1}$ jsou zaměnitelné.

D e f i n i c e . Jsou-li $g(A)$, $h(A)$ polynomy v matici A a $h(A)$ je regulární, jest matice $f(A) = \dfrac{g(A)}{h(A)}$ definována a nazývá se r a c i o n á l n í f u n k c e v m a t i c i A.

Platí tyto věty:

Věta 22.9 : $$\left[\frac{g(A)}{h(A)}\right]' = \frac{g(A')}{h(A')} .$$

Vskutku, levá strana je
$$\left(g(A)\,[h(A)]^{-1}\right)' = \left([h(A)]^{-1}\right)' . [g(A)]' = [h(A')]^{-1} . g(A') =$$
$$= \frac{g(A')}{h(A')} .$$

Věta 22.10 : J s o u - l i m a t i c e A, B z a m ě n i t e l n é, j e k a ž d á r a c i o n á l n í f u n k c e v m a t i c i A z a m ě n i t e l n á s k a ž d o u r a c i o n á l n í f u n k c í v m a t i c i B.

D ů s l e d e k : K a ž d é d v ě r a c i o n á l n í f u n k c e v m a t i c i A j s o u z a m ě n i t e l n é.

Důkaz. Jsou-li matice A, B zaměnitelné, je A^j zaměnitelná s B^k pro všechna celá $j, k \geq 0$. Jest totiž

$$A^j B^k = \underbrace{A.A\ldots(A}_{j}\underbrace{.B)\,B\ldots B}_{k} = \underbrace{A\ldots A}_{j-1}\,(B\,A)\,\underbrace{B\ldots B}_{k-1} =$$
$$= \underbrace{A\ldots A}_{j-2}.BA.A\,\underbrace{B\ldots B}_{k-1} = B\,\underbrace{A\ldots A}_{j}.\underbrace{B\ldots B}_{k-1} = B.B\,\underbrace{A\ldots A}_{j}.\underbrace{B\ldots B}_{k-2} =$$
$$= \underbrace{B\ldots B}_{k}.\underbrace{A\ldots A}_{j} = B^k A^j .$$

Tedy každý polynom v A je zaměnitelný s každým polynomem v B.

Jsou-li tedy $\dfrac{g_1(A)}{h_1(A)}$, $\dfrac{g_2(B)}{h_2(B)}$

libovolné racionální funkce, je každý z polynomů $g_1(A)$, $h_1(A)$ zaměnitelný s každým z polynomů $g_2(B)$, $h_2(B)$. Tedy i každá z matic $g_1(A)$, $[h_1(A)]^{-1}$ je zaměnitelná s každou z matic $g_2(B)$, $[h_2(B)]^{-1}$. Tedy $g_1(A) . [h_1(A)]^{-1}$ je zaměnitelná s $g_2(B) . [h_2(B)]^{-1}$.

23. Charakteristická rovnice racionální funkce v A.

Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n.
Víme, že k matici A přísluší určitá t.zv. charakteristická rovnice, t.j. rovnice $|A-\lambda E| = 0$ /odst.14/.
Jestliže $\frac{g(A)}{h(A)} = f(A)$ značí libovolnou racionální funkci v matici A, má tato racionální funkce také charakteristickou rovnici, totiž

$$|f(A) - \lambda E| = 0 .$$

Mezi kořeny charakteristické rovnice matice A a matice $f(A)$ platí pak určité vztahy.

Věta 23.1: Nechť $g(A)$ je polynom v A. Determinant $|g(A)|$ je resultant polynomu $g(\lambda)$ a charakteristické funkce $|A-\lambda E|$ matice A.

Důkaz. Nechť

$$g(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m = a_0(\lambda-h_1)(\lambda-h_2)\dots(\lambda-h_m) ,$$

kde $h_1, h_2, \dots h_m$ značí kořeny algebr. rovnice $g(\lambda) = 0$.
Zřejmě je

$$g(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \dots + a_mE = a_0(A-h_1E)(A-h_2E)\dots(A-h_mE)$$

a tedy $|g(A)| = a_0^n\,|A-h_1E|.|A-h_2E|\dots|A-h_mE|$.
Označme $\varphi(\lambda) = |A-\lambda E|$ charakteristickou funkci matice A.
Vidíme, že je

$$|g(A)| = a_0^n\,\varphi(h_1).\varphi(h_2)\dots\varphi(h_m) ,$$

takže věta je správná.

P o z n á m k a 23.1.1. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ značí kořeny charakteristické rovnice $|A-\lambda E| = 0$, t.j. rovnice $\varphi(\lambda) = 0$.

Pak jest
$$\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$
a tedy
$$|g(A)| = a_0^n \cdot (-1)^n (h_1-\lambda_1)(h_1-\lambda_2)\dots(h_1-\lambda_n) \cdot$$
$$\cdot (-1)^n (h_2-\lambda_1)(h_2-\lambda_2)\dots(h_2-\lambda_n) \cdot$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cdot (-1)^n (h_m-\lambda_1)(h_m-\lambda_2)\dots(h_m-\lambda_n) \cdot$$
$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot g(\lambda_2) \dots g(\lambda_n).$$

P o z n á m k a 23.1.2. Z věty 23.1 plyne/podle vlastnosti resultantu dvou algebr. rovnic/, že matice $g(A)$ je s i n g u l á r n í , když a jen když algebr. rovnice $g(\lambda) = 0$ a charakteristická rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice A mají společný kořen.

<u>Věta 23.2.</u> N e c h ť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ j s o u k o ř e n y c h a r a k t e r i s t i c k é r o v n i c e m a t i c e A. N e c h ť $f(A)$ z n a č í r a c i o n á l n í f u n k c i v m a t i c i A.

Pak
$$|f(A)| = f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n).$$

Důkaz. Je-li $f(A)$ p o l y n o m v matici A, je věta správná podle věty 23.1./poznámka 23.1.1/. Nechť tedy
$$f(A) = \frac{g(A)}{h(A)},$$
kde $g(A)$, $h(A)$ jsou polynomy, $|h(A)| \neq 0$. Pak jest
$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot g(\lambda_2) \dots g(\lambda_n),$$
$$|h(A)| = h(\lambda_1) \cdot h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n),$$
$$|f(A)| = |g(A)| \cdot |h(A)|^{-1} = g(\lambda_1) \dots g(\lambda_n) \cdot [h(\lambda_1) \dots h(\lambda_n)]^{-1} =$$
$$= \frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} \cdot \frac{g(\lambda_2)}{h(\lambda_2)} \dots \frac{g(\lambda_n)}{h(\lambda_n)} = f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n).$$

<u>Věta 23.3.</u>: N e c h ť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ j s o u k o ř e n y c h a r a k t e r i s t i c k é r o v n i c e m a t i c e A.

N e c h ť $f(A)$ z n a č í r a c i o n á l n í f u n k c i o m a t i c i A.
P a k k o ř e n y c h a r a k t e r i s t i c k é r o v n i c e m a t i c e $f(A)$ j s o u

$$f(\lambda_1),\ f(\lambda_2), \dots,\ f(\lambda_n) .$$

Důkaz. Pro každé číslo λ jest

$$\lambda A^0 - f(A)$$

racionální funkce v matici A, Tedy podle věty 23.2 jest

$$|\lambda E - f(A)| = |\lambda A^0 - f(A)| = [\lambda.\lambda_1^0 - f(\lambda_1)][\lambda\lambda_2^0 - f(\lambda_2)]\dots[\lambda\lambda_n^0 - f(\lambda_n)] =$$
$$= [\lambda - f(\lambda_1)][\lambda - f(\lambda_2)]\dots [\lambda - f(\lambda_n)] .$$

Avšak levá strana rovnice, až na znaménko $(-1)^n$, je charakteristická funkce matice $f(A)$, kdežto pravá strana jest její rozklad v kořenové činitele.

P o z n á m k a 23.3.1. Nechť $\varphi(\lambda)$ značí charakt. funkci matice A. Podle poznámky 23.1.2. je $\varphi(A)$ singulární matice. Podle věty 23.3 má charakt. rovnice matice $\varphi(A)$ kořeny: $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \dots \varphi(\lambda_n)$, při čemž $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou kořeny charakt. rovnice matice A, t.j. $\varphi(\lambda) = 0$.
Tedy $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = \dots = \varphi(\lambda_n) = 0$.
Je tudíž $|\varphi(A) - \lambda E| = \lambda^n$.

(24). Minimální polynom matice.

24.1. D e f i n i c e . Nechť $A, B, C, \dots$ značí čtvercové matice téhož řádu n. Tyto m a t i c e se nazývají n e z á v i s l é , když rovnici

$$aA + bB + cC + \dots = 0 ,$$

kde pravá strana značí matici nulovou, lze vyhověti čísly $a, b, c, \dots$ jen tehdy, je-li $a = b = c = \dots = 0$.
Jinak se matice $A, B, C \dots$ nazývají z á v i s l é .

Na př. nezávislé jsou matice

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť rovnici

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

t.j. rovnici
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

lze vyhověti jenom tak, že $a = b = c = d = 0$.

<u>Věta 24.1.</u>: Každé čtvercové matice n-řádu $A_1, A_2, \dots A_{n^2+k}$, kde $k \geq 1$, tedy v počtu větším než n^2 , jsou závislé.

Důkaz. Rovnice

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_r = 0 \text{ , kde } r = n^2 + k ,$$

zastupuje celkem n^2 lineárních homogenních rovnic o $r = n^2+k$ neznámých: $a_1, a_2, \dots a_r$. Tyto rovnice mají, jak známo, netriviální řešení, neboť neznámých je víc než rovnic.

Poznámka 24.1.1. Z této věty plyne, že každý systém nezávislých čtvercových matic řádu n obsahuje nejvýše n^2 matic.

Na druhé straně však snadno dokážeme, že ať zvolíme přirozené číslo $p \leq n^2$ jakkoliv, vždycky existují matice n-tého řádu v počtu p , které jsou nezávislé.

Vskutku, stačí zvoliti matici typu n^2/p tak, aby měla hodnost p . Označme její prvky

$$n^2 \left\{ \begin{matrix} a_{11}^1 & a_{11}^2 & \dots & a_{11}^p \\ a_{12}^1 & a_{12}^2 & \dots & a_{12}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^1 & a_{1n}^2 & \dots & a_{1n}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ik}^1 & a_{ik}^2 & \dots & a_{ik}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}^1 & a_{nn}^2 & \dots & a_{nn}^p \end{matrix} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{p}$$

Pak rovnice

$$\alpha_1 a_{ik}^1 + \alpha_2 a_{ik}^2 + \dots + \alpha_p a_{ik}^p = 0$$

o neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ jsou nezávislé a lze jim vyhověti jenom tak, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

Tedy matice: $A_1 = \| a_{ik}^1 \|$, kterou tedy utvoříme z prvků prvního sloupce, $A_2 = \| a_{ik}^2 \|$, kterou utvoříme z prvků druhého sloupce, ..$A_p = \| a_{ik}^p \|$, kterou utvoříme z prvků p-tého sloupce, jsou nezávislé.

24.3. D e f i n i c e . Nechť A je čtvercová matice libovolného řádu n. V řadě matic $A^0, A, A^2, \dots$ existuje matice A^p taková, že matice $A^0, A, A^2, \dots A^{p-1}$ jsou n e z á v i s l é, kdežto matice $A^0, A, A^2, \dots A^{p-1}, A^p$ jsou z á v i s l é .

Nechť $a_0, a_1, \dots, a_p$ značí taková čísla, že

$$a_0 A^p + a_1 A^{p-1} + \dots + a_p A^0 = 0 , \quad \text{kde} \quad a_0 \neq 0 .$$

Pak polynom $\psi(\lambda) = a_0 \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p$ se nazývá m i n i m á l n í p o l y n o m m a t i c e A.

P o z n á m k a 24.3.1. Minimální polynom matice A jest jednoznačně určen až na konstantní faktor, který je od nuly různý.

Vskutku, platí-li současně

$$a_0 A^p + a_1 A^{p-1} + \dots + a_p A^0 = 0$$

$$b_0 A^p + b_1 A^{p-1} + \dots + b_p A^0 = 0 , \quad \text{kde} \quad a_0 b_0 \neq 0 ,$$

pak v případě, že $a_0 = b_0$, obdržíme odečtením obou rovnic $a_1 = b_1, \ldots a_p = b_p$, neboť $A^{p-1}, \ldots A^0$ jsou nezávislé.

V případě, že $a_0 \neq b_0$, jest

$$\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}\right) A^{p-1} + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{b_2}{b_0}\right) A^{p-1} + \ldots + \left(\frac{a_p}{a_0} - \frac{b_p}{b_0}\right) A^0 = 0 ,$$

a tedy

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_p}{b_p} = \mu \quad \text{/konstantní faktor } \neq 0 \text{ /.}$$

24.3. Mezi charakteristickým polynomem $\varphi(\lambda)$ a minimálním polynomem $\psi(\lambda)$, patřícími k téže matici A řádu n, platí určité jednoduché vztahy. Abychom si odvodili, dokažme především tuto důležitou větu:

<u>Věta 24.2</u> : Nechť A je čtvercová matice libovolného řádu n. Nechť $\varphi(\lambda)$ jest její charakteristický polynom. Pak matice A je nulová, t.j. $\varphi(A) = 0$.

Důkaz. Nechť

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n , \quad \text{kde} \quad c_0 = (-1)^n .$$

Matice $\mathrm{Adj}\,(A-\lambda E)$ má za prvky algebr. komplementy prvků v determinantu $|A-\lambda E|$. Tyto prvky a^{jk} jsou tedy polynomy stupně nejvýše $n-1$ v proměnné λ.

Je tudíž

$$a^{jk} = \sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh}\lambda^h , \quad \text{takže}$$

$$\mathrm{Adj}(A-\lambda E) = \| a^{jk} \| = \Big\| \sum_{h=0}^{n-1} a_{jkh}\lambda^h \Big\| = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h \| a_{jkh} \| = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h A_h ,$$

při čemž A_h značí matici

$$A_h = \begin{pmatrix} a_{11h} & \ldots & a_{1nh} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1h} & \ldots & a_{nnh} \end{pmatrix}$$

Podle definice matice $\mathrm{Adj}\,(A-\lambda E)$ je

$$(A-\lambda E) . \mathrm{Adj}\,(A-\lambda E) = |A-\lambda E| . E ,$$

takže $$(A-\lambda E)\cdot\sum_{h=0}^{n-1}\lambda^h A_h=\left(\sum_{h=0}^{n} c_{n-h}\lambda^h\right)E\ ,$$

a odtud plyne $$A\sum_{h=0}^{n-1}\lambda^h A_h-\sum_{h=0}^{n-1}\lambda^{h+1}A_h=\sum_{h=0}^{n}(c_{n-h}E)\lambda^h\ .$$

Porovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \dots \lambda^n$ obdržíme

$$\begin{aligned}
AA_0 &= c_nE\ ,\\
AA_1-A_0 &= c_{n-1}E,\\
AA_2-A_1 &= c_{n-2}E,\\
\cdots\ \ &\\
AA_{n-1}-A_{n-2} &= c_1E\ ,\\
-A_{n-1} &= c_0E\ .
\end{aligned}$$

Násobme zleva tyto rovnice po řadě $A^0, A, A^2, \dots A^n$ a sečtěme.

Obdržíme

$$AA_0+(A^2A_1-AA_0)+(A^3A_2-A^2A_1)+\dots+(A^nA_{n-1}-A^{n-1}A_{n-2})-A^nA_{n-1}=\varphi(A)$$

Jak patrno, se všechny součiny na levé straně navzájem ruší. Je tedy

$$\varphi(A)=0\ .$$

P ř í k l a d . Nechť $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Pak

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)=\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-$$
$$-a_{12}a_{21}$$

tedy

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

Dále je

$$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21}+a_{22}^2\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{11}\cdot a_{12}+a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21}+a_{22}^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix}(a_{11}+a_{22})+$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right] .$$

Odtud obdržíme $\varphi(A) =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - (a_{11}+a_{22})a_{12} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} - (a_{11}+a_{22})a_{21}, & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 - (a_{11}+a_{22})a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

takže

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

P o z n á m k a 24.2.2. Z věty 24.2. plyne, že stupeň ~~minimálního polynomu libovolné matice~~ n-tého řádu je $\leq n$.

P o z n á m k a 24.2.3. Z věty ~~24.2. plyne bezprostředně~~, že m a t i c e $A^0, A, A^2, \ldots A^n$ j s o u v ž d y z á v i s l é.

Věta 24.3 N e c h ť A j e č t v e r c o v á m a t i c e l i b o v. ř á d u n . N e c h ť $\psi(\lambda)$ j e s t j e j í m i n i m á l n í p o l y n o m . N e c h ť $g(\lambda)$ j e l i b o v o l n ý p o l y n o m , p r o n ě j ž $g(A) = 0$. P a k p o l y n o m $g(\lambda)$ j e d ě l i - t e l n ý p o l y n o m e m $\psi(\lambda)$.

Důkaz. Dělme polynom $g(\lambda)$ polynomem $\psi(\lambda)$. Pak platí

$$g(\lambda) = \psi(\lambda) . q(\lambda) + r(\lambda) ,$$

kde $q(\lambda)$ značí podíl a $r(\lambda)$ zbytek dělení, ~~který má stupeň~~ nižší nežli polynom $\psi(\lambda)$.

Odtud plyne

$$0 = g(A) = \psi(A) . q(A) + r(A)$$

Protože $\psi(A) = 0$, plyne odtud $r(A) = 0$.

Ježto pak $\psi(\lambda) = 0$ je rovnice nejnižšího stupně, které matice A hoví, a protože $r(\lambda)$ je stupně nižšího než $\psi(\lambda)$, je nezbytně

$$r(\lambda) = 0 \text{ identicky /pro každé } \lambda \text{ /.}$$

Tedy

$$g(\lambda) = \psi(\lambda) . q(\lambda) ,$$

to znamená, že minimální polynom $\psi(\lambda)$ dělí polynom $g(\lambda)$

Poznámka 24.3.1: Ježto podle vět 24.2.a 24.3. je charakteristický polynom každé matice A dělitelný minimálním polynomem, je každý kořen minimálního polynomu současně kořenem charakteristického polynomu.

Věta 24.4.: Nechť A je čtvercová matice libovolného řádu n. Minimální polynom $\psi(\lambda)$ matice A je roven podílu charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ matice A a největšího společného dělitele všech minorů (n-1)-ho řádu charakteristického determinantu $|A-\lambda E|$.

Důkaz. Označme $d(\lambda)$ největší společný dělitel všech minorů (n-1) -ho řádu charakteristického determinantu $|A-\lambda E|$. Rozvineme-li tento determinant podle Laplaceovy věty podle prvků některého řádku, jsou v tomto rozvoji koeficienty těchto prvků jejich algebr.komplementy, tedy minory (n-1)-ho řádu, násobené ± 1. Je tedy polynom $\varphi(\lambda)$ dělitelný polynomem $d(\lambda)$, takže

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda).\,d(\lambda) \qquad /24.4.1/$$

při čemž $q(\lambda)$ značí vhodný polynom stupně $\geqq 0$.

Jest $(A-\lambda E).\,\mathrm{Adj}\,(A-\lambda E) = \varphi(\lambda).E$.

Prvky matice $\mathrm{Adj}\,(A-\lambda E)$ mají největšího spol.dělitele $d(\lambda)$, takže jest

$$\mathrm{Adj}\,(A-\lambda E) = B.d(\lambda) ,$$

při čemž B značí vhodnou matici, jejíž prvky nemají společného dělitele v λ.

Tedy jest

$$d(\lambda).\,(A-\lambda E)\,B. = q(\lambda).d(\lambda).\,E ,$$

a tedy také

$$(A-\lambda E)\,B = q(\lambda).\,E \qquad /24.4.2/.$$

Nechť α značí stupeň polynomu $d(\lambda)$. Pak podíl $q(\lambda)$ je stupně $n-\alpha$ a prvky matice B jsou polynomy stupně nejvýše $n-1-\alpha$.

Položme

$$B = \sum_{h=0}^{n-1-\alpha} \lambda^h B_h \quad , \quad q(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h} \lambda^h \quad ,$$

při čemž ovšem $B_1, \ldots, B_{n-1-\alpha}$ značí vhodné matice.

Podle /24.4.2/ pak máme

$$(A-\lambda E) \sum_{h=0}^{n-1-\alpha} \lambda^h B_h = \sum_{h=0}^{n-\alpha} a_{n-\alpha-h} \lambda^h E \ .$$

Srovnáním koeficientů při $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-\alpha}$ obdržíme

$$\begin{aligned} AB_0 \quad &= a_{n-\alpha} E \\ AB_1 - B_0 \quad &= a_{n-\alpha-1} E \\ \ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots \\ AB_{n-1-\alpha} - B_{n-2-\alpha} &= a_1 E \\ -B_{n-1-\alpha} &= a_0 E \ . \end{aligned}$$

Násobíme-li tyto rovnice postupně $A^0, \ldots A^{n-\alpha}$ a sečteme, dostaneme

$$0 = AB_0 + (A^2B_1 - AB_0) + \ldots + A^{n-\alpha} B_{n-1-\alpha} - A^{n-\alpha-1} B_{n-2-\alpha} - A^{n-\alpha} B_{n-1-\alpha} =$$
$$= a_0 A^{n-\alpha} + a_1 A^{n-\alpha-1} + \ldots + a_{n-\alpha} A^0 = q(A) \quad ,$$

tedy

$$q(A) = 0 \ .$$

Je tudíž /podle věty 24.3/polynom $q(\lambda)$ dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$. Nechť $\chi(\lambda)$ je podíl,takže

$$q(\lambda) = \chi(\lambda) \cdot \psi(\lambda) \qquad /24.4.3/$$

Ukažme nyní,že naopak polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný polynomem $q(\lambda)$, takže $\chi(\lambda)$ je konstanta různá od nuly.

Vedle λ uvažujme o další proměnné η. Jest pak

$$\psi(\lambda) - \psi(\eta) = (\lambda - \eta) \cdot \Psi(\lambda, \eta) \ ,$$

při čemž $\Psi(\lambda,\eta)$ značí vhodný polynom v λ, η s koeficienty v uvažovaném číselném tělese.

Odtud plyne

$$\psi(\lambda)E - \psi(A) = (\lambda E - A).\Psi'(\lambda, A) .$$

Avšak $\psi(A) = 0$, takže

$$\psi(\lambda)E = (\lambda E - A).\Psi'(\lambda, A) .$$

Násobením polynomem $q(\lambda)$ obdržíme

$$\psi(\lambda).q(\lambda).E = (\lambda E - A).q(\lambda).\Psi'(\lambda, A)$$

Dosadíme-li sem za $q(\lambda)E = (A - \lambda E)B$ /podle 34.4.3/ , je

$$\psi(\lambda).(A - \lambda E)B = -(A - \lambda E).q(\lambda).\Psi'(\lambda, A)$$

Avšak determinant $|A - \lambda E|$ není identicky roven nule a tedy existuje matice $(A - \lambda E)^{-1}$ .Násobíme-li hořejší rovnost maticí $(A - \lambda E)^{-1}$, obdržíme

$$\psi(\lambda).B = -q(\lambda).\Psi'(\lambda, A) .$$

Protože prvky matice B nemají společného dělitele v λ , existuje ke každému kořenovému činiteli $\lambda - \lambda_0$ polynomu $q(\lambda)$ alespoň jeden prvek v matici B, b_{jk}, který není dělitelný tímto kořenovým činitelem a tedy ani polynomem $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0}$, kde α_0 značí násobnost kořenového činitele $\lambda - \lambda_0$ v polynomu $q(\lambda)$ .Označíme-li Ψ'_{jk} prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci matice $\Psi'(\lambda, A)$, plyne z poslední rovnosti

$$\psi(\lambda).b_{jk} = q(\lambda)\left[-\Psi'_{jk}\right] ,$$

takže polynom $\psi(\lambda)$ je dělitelný polynomem $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0}$. Z toho soudíme, že polynom $\psi(\lambda)$ jest dělitelný polynomem $q(\lambda)$. Je tedy v /34.4.3/

$$\chi(\lambda) = \text{konst.} (\neq 0) \qquad /34.4.4/$$

takže

$$\varphi(\lambda) = \text{konst.}\,\psi(\lambda).\,d(\lambda) \text{ , a tedy}$$

$$\text{konst.}\,\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}$$

Ježto $\psi(\lambda)$ je minimální polynom, je také konst. $\psi(\lambda)$ minimální polynom.

Věta 24.5. Každý kořen charakteristického polynomu libovolné matice A je kořenem minimálního polynomu matice A.

Důkaz. Vskutku, z rovnice /24.4.2/ plyne

$$|A-\lambda E|\,.\,|B| = [q(\lambda)]^n\,.\,|E| \quad ,$$

při čemž n značí řád matice A, t.j. ~~podle /24.4.3/ a /24.4.4/~~

$$\varphi(\lambda)\,.\,|B| = [\text{konst.}\ \psi(\lambda)]^n \quad ,$$

$$\varphi(\lambda)\,.\,|B| = \text{konst.}\,[\psi(\lambda)]^n \quad .$$

Příklad. Nalézti minimální polynom pro matici A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristický determinant

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

Minory 3.stupně v hořejším determinantu jsou

$$-\lambda(\lambda^2+4)\,, \quad -2\lambda^2\,, \quad -2\lambda^2\,, \quad -8\lambda\,,$$

$$-\lambda(\lambda+2)\,, \quad -\lambda^2(\lambda+1)\,, \quad -\lambda^2\,, \quad -2\lambda(\lambda+2)\,,$$

$$-\lambda(\lambda-2)\,, \quad \lambda^2\,, \quad -\lambda^2(\lambda-1)\,, \quad -2\lambda(\lambda-2)\,,$$

$$2\lambda\,, \quad \lambda^2\,, \quad \lambda^2\,, \quad -\lambda(\lambda^2-4)\,,$$

takže jejich největší společný dělitel $d(\lambda) = \lambda$. Tedy minimální polynom matice A je

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)} = \lambda^3 \quad .$$

To znamená, že $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, avšak $A^3 = 0$.

Věta 24.6: Nechť $\dfrac{g(A)}{h(A)}$ je racionální funkce v A.

E x i s t u j e   p o l y n o m $p(\lambda)$ t a k o v ý , ž e
$$\frac{g(A)}{h(A)} = p(A) .$$
Důkaz. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ značí kořeny charakt. polynomu $\varphi(\lambda)$ matice A a nechť opět $\psi(\lambda)$ značí minimální polynom pro A. Ježto
$$|h(A)| \neq 0 \text{ a /podle 23.2/ je}$$
$$|h(A)| = h(\lambda_1) . h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n) ,$$
nevymizí $h(\lambda)$ pro žádné z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Tedy žádný kořenový činitel polynomu $\varphi(\lambda)$ nedělí $h(\lambda)$ a tedy podle poznámky 24.3.1 ani žádný kořenový činitel polynomu $\psi(\lambda)$ nedělí $h(\lambda)$. Tedy polynomy $h(\lambda)$ a $\psi(\lambda)$ jsou nesoudělné a existují tedy polynomy $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ takové, že
$$h(\lambda) . p(\lambda) - \psi(\lambda) . q(\lambda) = g(\lambda)$$
Tedy jest
$$h(A) . p(A) = g(A)$$
a odtud
$$p(A) = \frac{g(A)}{h(A)} .$$

O m a t i c í c h   n i l p o t e n t n í c h .

Věta 24.7 : **K d y ž   a   j e n   k d y ž   c h a r a k t e r i s t i c k á   r o v n i c e   m a t i c e   A   m á   v š e c h n y   k o ř e n y   r o v n y   n u l e ,   j e $A^q = 0$ p ř i   v h o d n é m   c e l é m   k l a d n é m   q .**

Důkaz. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kořeny charakt. rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice A, takže $\lambda_1^q, \lambda_2^q, \ldots \lambda_n^q$ jsou kořeny charakt. rovnice matice A^q /viz v. 23.3/. při každém celém q. Jestliže tedy je pro určité celé kladné q
$$A^q = 0 ,$$
jsou kořeny $\lambda_1^q, \ldots, \lambda_n^q$ charakt. rovnice matice A^q, t. j. rovnice
$$|A^q - \lambda E| = |0 - \lambda E| = (-\lambda)^n = 0$$
vesměs rovny nule, neboť rovnice
$$(-1)^n \lambda^n = 0$$

má všechny kořeny rovny nule. Tedy $\lambda_1^q = \ldots = \lambda_n^q = 0$ a tedy také

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \ .$$

Jestliže naopak pro nějakou matici A jest

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n \ ,$$

je /podle v. 24.4/

$$\psi(\lambda) = \text{konst.}\ \lambda^q$$

při vhodném celém kladném q, takže

$$\psi(A) = \text{konst.}\ A^q = 0 \ .$$

Je tedy také $A^q = 0$, neboť konst. $\neq 0$.

Věta 24.8.: Nechť A je čtvercová matice řádu n a nechť $A^q = 0$ při vhodném celém $q > 0$. Pak $|A + E| = 1$.

Důkaz. Podle věty 24.7 je

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = (-\lambda)^n$$

Dosadíme-li za $\lambda = -1$, máme tvrzení.

Věta 24.9.: Nechť A, B jsou zaměnitelné čtvercové matice řádu n. Nechť mimo to $A^q = 0$ při vhodném celém $q > 0$. Pak $|A + B| = |B|$.

Důkaz. Protože A, B jsou zaměnitelné, jsou též při každém čísle t matice $tE + B$, A zaměnitelné. Neboť je $(tE+B)A = tA+BA = At+AB = A(tE+B)$. Jsou tedy také matice $(tE+B)^{-1}, A$ zaměnitelné, pokud ovšem matice $(tE+B)$ je regulární.

Označíme-li

$$X = (tE + B)^{-1}A \ , \quad \text{jest}$$

$$X^q = \left[(tE + B)^{-1}A\right]^q = (tE + B)^{-q} A^q$$

tedy

$$X^q = (tE + B)^{-q} \cdot 0 = 0 .$$

a tedy podle věty 24.8 je

$$|X + E| = 1 \ ,$$

t.j.

$$|(tE + B)^{-1} A + E| = 1$$

Označíme-li tedy dále $Y = X+E = (tE+B)^{-1}A+E$, máme

$$|Y| = 1$$

a kromě toho

$$(tE+B)Y = (tE+B)\left[(tE+B)^{-1}A+E\right] =$$
$$= A + (tE+B) ,$$

takže

$$|tE+B| = |A+B+tE| .$$

Levá i pravá strana je polynom v t . Dosadíme-li tam $t = 0$, obdržíme

$$|B| = |A+B| \qquad \text{o.b.d.}$$

85. Hodnost matice.

85.1. D e f i n i c e . Nechť A značí matici typu m/n . Jak víme, má /podle definice/ matice A hodnost a (>0), když alespoň jeden determinant a-tého řádu v matici A je od nuly různý, kdežto všechny determinanty $(a+1)$-ho řádu v matici A, existují-li, jsou rovny nule.

Jestliže všechny prvky matice A jsou nuly, říkáme, že hodnost matice A jest nula; naopak výrokem, že hodnost matice A jest nula, vyjadřujeme, že všechny prvky matice A jsou nuly.

Vždy jest $\quad 0 \leq a \leq \min(m,n)$.

K d y ž A j e s t m a t i c e č t v e r c o v á ř á d u n a a j e s t j e j í h o d n o s t , n a z ý v á s e č í s l o $\alpha = n-a$ n u l i t a m a t i c e A .

Nulitu matice A budeme označovati: nul A .

Když tedy matice A má nulitu α , existuje v A alespoň jeden determinant řádu $m = n - \alpha$, který je od nuly různý /pro $\alpha < n$ /, kdežto všechny determinanty řádu $n - \alpha + 1$ jsou rovny nule /pro $\alpha > 0$ /.

Výrok, že A má nulitu n $(\alpha = n)$, znamená, že všechny prvky matice A jsou nuly. Výrok, že A má nulitu $\alpha = 0$, znamená, že $|A| \neq 0$.

25.2. V dalším budeme potřebovati tyto věty, které se dokazují v theorii lineárních rovnic:

<u>Věta 25.1</u> : Nechť čtvercová matice A řádu n má hodnost a a tedy nulitu $\alpha = n-a$. Pak existuje α a ne více než α nezávislých řešení systému homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 , \end{aligned} \qquad /25.1.1/$$

při čemž $A = \| a_{ik} \|$.

Každý systém takových α nezávislých řešení tvoří fundamentální systém řešení v tom smyslu, že každé řešení tohoto systému rovnic je lineární kombinací jednotlivých řešení fundamentálního systému. Fundamentální systém řešení rovnic /25.1.1/ se nalezne, když se nalezne na př. Frobeniovou metodou fundamentální systém řešení systému redukovaného k /25.1.1/, t.j. systému a nezávislých rovnic vybraných ze systému /25.1.1/, /viz poznámku na str.18/.

Když naopak existuje β nezávislých řešení systému /25.1.1/, pak pro hodnost a matice A máme vztah

$$a \leq n - \beta ,$$

takže

$$\alpha = n-a \geq \beta .$$

Poznámka 25.1.: Systém rovnic /25.1.1/ určuje zřejmě takové vektory (x) v n-rozměrném prostoru, jejichž transformované vektory $(x^*) = A.(x)$, vzniklé lineární substitucí o matici A typu n/n, jsou nulové, t.j. mají všechny složky rovny nule. Hořejší věta se pak snadno vykládá v tom smyslu, že udává největší počet lineárně nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici A transformují na vektor nulový.

Poznamenejme, že nazýváme v e k t o r y $(x^1), \dots (x^k)$ o složkách

$$\begin{matrix} x_1^1 & , \dots & x_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & , \dots & x_n^k \end{matrix}$$

l i n e á r n ě z á v i s l ý m i , existují-li čísla $\lambda_1, \dots \lambda_k$, z nichž aspoň jedno jest od nuly různé, a to taková, že

$$\begin{matrix} \lambda_1 x_1^1 + \dots + \lambda_k x_1^k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 x_n^1 + \dots + \lambda_k x_n^k = 0 \end{matrix} ,$$

tedy, když existuje nenulový vektor $(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ v k-rozměrném prostoru takový, že $X.(\lambda) = 0$,

t.j. že vektor $X(\lambda)$ je nulový, při čemž

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} .$$

<u>Věta 25.2</u> : Libovolná matice A a matice A_1 , vzniklá z matice A rozšířením o sloupec, který je lineární kombinací sloupců matice A , mají stejnu hodnost.

/Podobně, jde-li o matici A_1 rozšířenou o <u>řádek</u>, který je lineární kombinací řádků matice A /.

26. <u>Hodnost matice /pokračování/.</u>

<u>Věta 26.1</u> : N e c h ť A, B j s o u č t v e r c o v é m a t i c e l i b o v o l. ř á d u n . N e c h ť a, b j s o u j e j i c h h o d n o s t i . P a k p r o h o d n o s t c m a t i c e $C = AB$ p l a t í

$$c \leqq a, b \quad .$$

Důkaz. Vskutku, nechť $A = \| a_{jk} \|$, $B = \| b_{jk} \|$, $AB = \| c_{jk} \|$.
Podle věty 25.2 mají stejnou hodnost matice A a matice A_1, kde

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} , & a_{11} b_{11} + \dots + a_{1n} b_{n1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} , & a_{n1} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{n1} \end{pmatrix} =$$

t.j. $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} & c_{11} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{n1}\dots a_{nn} & c_{1n} \end{pmatrix}$

Podobně mají stejnou hodnost matice A a matice A_n, kde

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11}\dots & a_{1n} & c_{11}\dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\dots & a_{nn} & c_{1n}\dots & c_{nn} \end{pmatrix} .$$

Protože matice $\| c_{jk} \|$ o hodnosti c je částí této poslední matice, jest zřejmě $c \leqq a$.

Podle věty 25.1 existuje $n-b$ lineárně nezávislých řešení rovnic $B.(x) = 0$. Každé takové řešení hoví rovnicím

$$(AB).(x) = (0) ,$$

neboť $(AB).(x) = A.[B.(x)] = A.(0) = (0)$.

Avšak nezávislých řešení rovnic $(AB).(x) = 0$ je nejvýše $n-c$.

Tedy $n-c \geqq n-b$ a odtud $c \leqq b$.

<u>Věta 26.2</u> : Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n . Nechť α, β jsou jejich nulity . Nechť γ je nulita matice $C = AB$. Pak $\gamma \leqq \alpha + \beta$

/Jinými slovy: Nulita součinu dvou čtvercových matic téhož řádu n je nanejvýš rovna součtu nulit obou matic /.

Důkaz. Podle definice existuje

α lineárně nezávislých vektorů, na př.: $(a_1),..(a_\alpha)$ takových, že $A.(a_j) = 0$,
β ,, ,, ,, ,, $(b_1),..(b_\beta)$ takových, že $B.(b_k) = 0$,
γ ,, ,, ,, ,, $(c_1),..(c_\gamma)$ takových, že $C.(c_h) = 0$,

při čemž $j = 1,\dots \alpha$; $k = 1,\dots,\beta$; $h = 1,\dots \gamma$.

Protože $B.(b_k) = 0$,

plyne

$$(0) = A.(0) = A.[B(b_k)] = (AB).(b_k) = C(b_k) ,$$

takže
$$\gamma \geq \beta$$

a/ Je-li $\gamma = \beta$, jest ovšem $\gamma \leq \alpha + \beta$

b/ Předpokládejme tedy, že $\gamma > \beta$ Pak za vektory $(c_1), \dots (c_\gamma)$ můžeme zvoliti

$$(b_1), \dots, (b_\beta), (c_{\beta+1}), \dots, (c_\gamma).$$

Označme $B.(c_i) = (y_i)$, kde $i = \beta+1, \dots, \gamma$.

Pak $A\,(y_i) = (0)$,

neboť $A\,B(c_i) = (0)$.

Tvrdíme, že vektory $(y_{\beta+1}), \dots (y_\gamma)$ jsou nezávislé.

Vskutku, jsou-li závislé, existuje vektor (a) v prostoru $(\gamma-\beta)$-rozměrném takový, že všechny jeho složky nejsou rovny nule a že jest

$$(y_{\beta+1}, \dots, y_\gamma) \cdot (a) = (0) \ .$$

Přitom $(y_{\beta+1}, \dots, y_\gamma)$ značí matici, jejíž první sloupec je tvořen složkami vektoru $(y_{\beta+1})$, druhý složkami vektoru $(y_{\beta+2})$, atd...

Protože je $(y_i) = B.(c_i)$, máme

$$\left(B(c_{\beta+1}), \dots, B(c_\gamma)\right)(a) = (0) \ ,$$

a tedy
$$B(c_{\beta+1}, \dots, c_\gamma) \cdot (a) = (0) \ ,$$
$$B\left[(c_{\beta+1}, \dots, c_\gamma) \cdot (a)\right] = (0) \ .$$

Vektor $(c_{\beta+1}, \dots, c_\gamma) \cdot (a)$ není nulový, neboť jinak by vektory $(c_{\beta+1}), \dots, (c_\gamma)$ byly závislé, což je proti předpokladu.

A protože vektor $(c_{\beta+1}, \dots c_\gamma) \cdot (a)$ se transformuje maticí B v nulový vektor, je závislý na vektorech $(b_1), \dots (b_\beta)$. Jsou tedy vektory

$$(b_1), \dots (b_\beta) \ , \quad (c_{\beta+1}), \dots (c_\gamma)$$

závislé. To je ale proti předpokladu.

Jsou tedy vektory $(y_{\beta+1}), \dots, (y_\gamma)$ nezávislé, jak jsme tvrdili.

Avšak podle předpokladu existuje α a nikoliv více než α nezávislých vektorů takových, že se maticí A transformují ve vektor nulový.

Tedy $\gamma - \beta \leq \alpha$

a odtud $\gamma \leq \alpha + \beta$.

V následujících dvou zvláštních případech můžeme tvrditi, že nulita součinu dvou matic se právě rovná součtu obou faktorů. /Věta 26.3 a 26.4./

mulit

Věta 26.3 : N e c h ť A z n a č í l i b o v o l n o u č t v e r c o v o u m a t i c i . N e c h ť $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ j s o u l i b o v o l n é n e s o u d ě l n é p o l y n o m y . P a k n u l $[f(A).g(A)]$ = n u l $f(A)$ + nul $g(A)$.

Důkaz. Označme α, β, γ postupně nulitu matice $f(A)$, $g(A)$, $f(A).\ g(A)$.

Podle věty 26.2 platí $\gamma \leq \alpha + \beta$

Stačí tedy ukázati, že $\gamma \geq \alpha + \beta$.

Ježto polynomy $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ jsou nesoudělné, existují/podle známé věty/ polynomy $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ takové, že

$$f(\lambda).\ F(\lambda) + g(\lambda).\ G(\lambda) = 1$$

Pak ovšem $\qquad f(A).\ F(A) + g(A).\ G(A) = E$

Ježto α = nul $f(A)$, β = nul $g(A)$, existují nezávislé vektory

$(x_1),\dots,(x_\alpha)$ takové, že $f(A).(x_j) = 0$,kde $j=1,..,\alpha$,

a $(y_1),\dots,(y_\beta)$,, $g(A).(y_k) = 0$,kde $k=1,..,\beta$.

Tvrdíme, že vektory $(x_1),\dots(x_\alpha)$,$(y_1),\dots(y_\beta)$ jsou lineárně nezávislé.

Vskutku, jsou-li závislé, existuje vektor (z) v prostoru o $\alpha + \beta$ dimensích takový, že alespoň jedna z jeho prvních α a posledních β složek je od nuly různá a

$$(x_1,\dots,x_\alpha,\ y_1,\dots y_\beta).(z) = (0) \qquad /26.3.1/$$

Složíme-li tuto rovnici s maticí $E = f(A).\ F(A) + g(A).\ G(A)$, obdržíme

$\{E(x_1),\dots E(x_\alpha), [f(A).F(A) + g(A).G(A)](y_1),\dots, [f(A).\ F(A) +$

tedy $\big(x_1, \dots x_\alpha, f(A).F(A).(y_1), \dots, f(A).F(A)(y_\beta)\big)(z) = (0)$, /26.3.2/

neboť $g(A).G(A)(y_k) = G(A).[g(A).(y_k)] = G(A).(0) = (0)$.

Avšak z /26.3.1/ plyne složením s maticí $f(A).F(A)$

$$\big(f(A).F(A)(x_1), \dots f(A).F(A)(x_\alpha), f(A).F(A)(y_1), \dots, f(A)F(A)(y_\beta)\big)(z) = (0),$$

a ježto $f(A).(x_j) = 0$, jest

$$\big(0, \dots 0, f(A).F(A)(y_1), \dots f(A).F(A)(y_\beta)\big)(z) = (0)$$

Odečtením této rovnice od /26.3.2/ obdržíme

$$(x_1, \dots x_\alpha, 0, \dots 0).(z) = (0)$$

Ježto alespoň jedna z prvních α složek vektoru (z) je od nuly různá, plyne odtud, že vektory $(x_1), \dots, (x_\alpha)$ jsou závislé. Ale to je proti předpokladu.

Tedy skutečně vektory

$$(x_1), \dots (x_\alpha), (y_1), \dots (y_\beta)$$

jsou nezávislé. Avšak každý z těchto vektorů hoví zřejmě relaci

$$\big(f(A).g(A)\big).(x_j) = (0)$$

a zároveň $\big(f(A).g(A)\big)(y_k) = 0$,

neboť matice $f(A)$ a $g(A)$ jsou zaměnitelné.

Je tedy $\delta \geq \alpha + \beta$. A tím je věta dokázána.

<u>Věta 26.4</u>: N e c h ť A j e l i b o v o l n á č t v e r c o v á m a t i c e s n u l i t ě α.

N e c h ť B j e l i b o v o l n á č t v e r c o v á m a t i c e t é h o ž ř á d u j a k o A, a r e g u l á r n í, t a k ž e n u l $B = \beta = 0$.

P a k n u l $AB = \alpha + \beta$ $(= \alpha)$.

Důkaz. Vskutku, podle vět 26.1 a 26.2 je

$$\alpha \leq \max(\alpha, \beta) \leq \text{nul}\, A.B \leq \alpha + \beta = \alpha,$$

takže $$\alpha \leq \text{nul}\, AB \leq \alpha,$$

tedy $$\text{nul}\, AB = \alpha = \alpha + \beta$$

P o z n á m k a 26.5.1: Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n. Nechť Q je libovolná r e g u l á r n í matice téhož řádu n. Podle věty 26.4 má matice

$$B = Q^{-1} A\, Q$$

tutéž nulitu jako A.

O matici $B = Q^{-1} A\, Q$ ještě poznamenejme toto:

26.5.2: C h a r a k t e r i s t i c k é p o l y n o m y m a t i c e A a m a t i c e B j s o u s t e j n é.

Vskutku, $B - \lambda E = Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}EQ = Q^{-1}(A - \lambda E)\,Q$,

takže $|B - \lambda E| = |Q^{-1}|\,.\,|A - \lambda E|\,.\,|Q| = |A - \lambda E|$.

26.5.3: Dále pro každé přirozené k jest

$$B^k = Q^{-1} A^k Q$$

Důkaz. Úplnou indukcí. Pro $k = 1$ je vzorec zřejmě správný. Nechť tedy $k > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro $k - 1$. Jest

$$B^k = B^{k-1}.B = \left(Q^{-1}A^{k-1}Q\right)\left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}A^{k-1}\left(QQ^{-1}\right)AQ = Q^{-1}A^kQ \;.$$

26.4 : Další úvahy opřeme o tyto výsledky:

Věta 26.5.: N e c h ť $n > \gamma_1 \geq 1$ z n a č í n u l i t u m a t i c e A. E x i s t u j e r e g u l á r n í m a t i c e Q v y z n a č u j í c í s e t í m, ž e

$$Q^{-1}AQ = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c:c} 0 & K_1 \\ \hdashline 0 & L \end{array}\right) \begin{array}{l} \gamma_1 \\ n-\gamma_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{\gamma_1} & \underbrace{\qquad}_{n-\gamma_1} \end{array} \end{array} \qquad /26.5.1/$$

k d e K_1 j e j i s t á m a t i c e t y p u $\gamma_1/n-\gamma_1$ a L j e č t v e r c o v á m a t i c e ř á d u $n-\gamma_1$.

Důkaz. Vskutku, protože γ_1 (≥ 1) je nulita matice A, existují nezávislé vektory $(x_1), (x_2), \ldots, (x_{\gamma_1})$ takové, že se lineární substitucí o matici A transformují ve vektor nulový. Nechť $(x_{\gamma_1+1}), \ldots, (x_n)$ značí další vektory takové, že všechny vektory

$$(x_1),(x_2),\dots,(x_n) \quad \text{jsou nezávislé.}$$

Matice $Q = (x_1,\dots x_n)$ je tedy regulární. Matice AQ má v prvních γ_1 sloupcích samé nuly, a totéž platí o matici $Q^{-1}AQ$. Tím je tvrzení dokázáno.

26.6: Nyní ukážeme, že m e z i m a t i c e m i A a L j s o u t y t o v z t a h y :

1. $|A - \lambda E| = (-\lambda)^{\gamma_1} |L - \lambda E|$
2. $\text{nul } A^k = \gamma_1 + \text{nul } L^{k-1}$, pro $k = 1, 2, \dots$
3. $\text{nul } L \leqq \gamma_1$.

Důkaz. 1. Shora jsme ukázali, že je

$$|A - \lambda E| = |B - \lambda E| \; .$$

Ze vzorce /26.5 / plyne bezprostředně

$$|B - \lambda E| = (-\lambda)^{\gamma_1} |L - \lambda E| \; ,$$

a tím je tvrzení dokázáno.

Důkaz. 2: Podle 26.4 platí pro $k = 1,2,\dots$:

$$\text{nul } A^k = \text{nul } B^k \; ,$$

takže stačí ukázat, že jest

$$\text{nul } B^k = \gamma_1 + \text{nul } L^{k-1} \qquad /26.6.1/$$

Pro $k=1$ je vztah zřejmě správný. Předpokládejme tedy, že $k > 1$. Snadno vidíme, že je

$$B^k = B.B^{k-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & K_1 \\ \hline 0 & L \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & K_{k-1} \\ \hline 0 & L^{k-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & K_k \\ \hline 0 & L^k \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\gamma_1 \\ \}n-\gamma_1 \end{array}$$

$$\qquad\quad \gamma_1 \quad n-\gamma_1 \qquad \gamma_1 \quad n-\gamma_1 \qquad \gamma_1 \quad n-\gamma_1$$

při čemž K_{k-1}, K_k značí vhodné matice. Protože nulita matice B je γ_1 a tedy její hodnost $n-\gamma_1$, jsou poslední $n-\gamma_1$ sloupce v matici B lineárně nezávislé. Poslední sloupce v počtu $n-\gamma_1$ v /poslední/ matici B^k jsou lineárními kombinacemi oněch sloupců v matici B, při čemž koeficienty v

těchto lineárních kombinacích jsou složky vektorů v $(n-\gamma_1)$-rozměrném prostoru, z kterýžto složek se skládá matice L^{k-1}. Označíme-li tedy písmeny X, Y libovolné stejnolehlé matice $(n-\gamma_1)$-tého řádu, utvořené z posledních $n-\gamma_1$ sloupců matic B, B_k, máme vztah $$Y = XL^{k-1}$$
Hodnost matice B^k je zřejmě rovna hodnosti matice Y, která má největší hodnost, a tedy nejmenší nulitu. Protože podle věty 26.3 platí

$$\text{nul } Y = \text{nul } X + \text{nul } L^{k-1} \qquad /26.6.2/$$

vidíme, že nejmenší nulitu má taková matice Y, k níž stejnolehlá matice X má nulitu 0; taková matice X existuje, protože poslední $n-\gamma_1$ sloupce v matici B jsou lineárně nezávislé. Zvolíme-li tedy za X takovou matici, máme podle /26.6.2/ vztah

$$\text{nul } Y = \text{nul } L^{k-1} \quad ,$$

a vychází

$$\text{nul } B^k = n - \text{hodnost } B^k = n - \text{hodnost } Y = n - (n-\gamma_1 - \text{nul } Y) =$$
$$= \gamma_1 + \text{nul } Y = \gamma_1 + \text{nul } L^{k-1} .$$

Tím je věta dokázána.

<u>Důkaz 3.</u> Podle předešlé věty je (pro $k = 2$)

$$\text{nul } L = \gamma_2 - \gamma_1 \quad ,$$

při čemž $$\gamma_2 = \text{nul } A^2 .$$

Protože matice L je řádu $(n-\gamma_1)$, jest její hodnost

$$n-\gamma_1 - (\gamma_2-\gamma_1) = n-\gamma_2 \quad ,$$

a tedy obsahuje $n-\gamma_2$ a ne více nezávislých řádků. Odtud plyne, že v posledních $(n-\gamma_1)$ řádcích matice B je $n-\gamma_2$ a ne více nezávislých řádků. Tedy hodnost matice B je $\leq n-\gamma_2+\gamma_1$, takže $$\gamma_1 = \text{nul } B \geq n - (n-\gamma_2+\gamma_1) = \gamma_2-\gamma_1 \quad ,$$
a odtud plyne tvrzení.

Všimněme si, že náš výsledek můžeme psáti takto:

$$\gamma_1 - \gamma_0 \geq \gamma_2 - \gamma_1 \,, \qquad /26.6.3/$$

při čemž γ_0 značí nulitu matice $A^0 = E$, která je ovšem 0.

27. Charakteristická čísla matice.

V dalším uvažujeme o libovolné čtvercové matici A řádu $n(\geq 1)$ a předpokládáme, že její charakteristická rovnice má 0 za $(1 \leq)\ \alpha$ - násobný kořen. Nulitu matice A^k, pro $k = 0,1,2,\dots$, značíme γ_k. Zejména tedy jest $\gamma_0 = 0, \gamma_1 > 0$.

Věta 27.1 : Rovněž charakt. rovnice matice A^k, při každém přirozeném k, má 0 za α- násobný kořen.

Vskutku, označme kořeny charakt. rovnice matice A

$$\overbrace{0,\dots,0}^{\alpha}, \lambda_1,\dots,\lambda_{n-\alpha}\,, \quad \text{kde } \lambda_1 \neq 0,\dots\lambda_n \neq 0\,.$$

Podle věty 23.3 jsou

$$\overbrace{0,\dots,0}^{\alpha}\,, \lambda_1^k,\dots,\lambda_{n-\alpha}^k$$

kořeny charakt. rovnice matice A^k, při každém přirozeném k.

Věta 27.2 : Je-li γ_1 nulita matice A, pak

$$\gamma_1 \leq \alpha\,,$$

kde α značí násobnost kořene 0 charakteristické rovnice matice A.

Důkaz. Vskutku, všimněme si, že v rovnici

$$|A-\lambda E| = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n$$

značí S_1 součet hlavních minorů 1. řádu v determinantu $|A|$,

S_2 součet hlavních minorů 2. řádu, ... atd.

Protože 0 je α-násobný kořen rovnice $|A - \lambda E| = 0$, máme

$$S_{n-\alpha} \neq 0$$

a odtud plyne, že v matici A je alespoň jeden minor řádu $n-\alpha$, který je různý od nuly. Tedy hodnost matice A jest $\geq n-\alpha$, tedy

$$n - \gamma_1 \geq n - \alpha.$$

a odtud
$$\gamma_1 \leq \alpha$$

Věta 27.3: Pro $k = 0,1,2,\dots$ platí
$$\gamma_k \leq \alpha \qquad \text{Pro } k \geq 1$$

Vskutku, tvrzení je zřejmě správné pro $k=0$, 1. plyne z vět 27.1 a 27.2.

Věta 27.4: Pro $k = 0,1,2,\dots$ jest
$$\gamma_k \leq \gamma_{k+1} .$$

Vskutku, tvrzení plyne ze vztahu
$$A^{k+1} = A^k . A$$
podle věty 26.1.

Věta 27.5: Jestliže při určitém $k = 0,1,2,\dots$ platí
$$\gamma_k = \alpha ,$$
pak jest $\alpha = \gamma_k = \gamma_{k+1} = \dots\dots$

Vskutku, pak máme podle vět 27.3 a 27.4
$$\alpha = \gamma_k \leq \gamma_{k+1} \leq \alpha ,$$
a odtud plyne $\quad \alpha = \gamma_{k+1}$

Věta 27.6: Platí-li při některém $k = 0,1,2,\dots$
$$\gamma_k < \alpha ,$$
pak je $\quad \gamma_k < \gamma_{k+1}$

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k řádu matice.

Uvažme především, že věta platí pro každou matici řádu $n = 1$. Nechť $A = (a)$ je libovol. matice řádu $n = 1$, jejíž charakt. rovnice má 0 za $(1 \leq)\alpha$ -násobný kořen. Zde nutně $\alpha = 1$, takže $A = (0)$. Je tedy $\gamma_0 = 0$, $1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots$. Je-li tedy při některém $k = 0,1,\dots$ $\gamma_k < \alpha$, což v našem případě jest jenom při $k = 0$, pak je také
$$0 = \gamma_0 = \gamma_k < \gamma_{k+1} = \gamma_1 = 1 .$$

Nechť tedy matice A má řád $n \geq 2$ a předpokládejme, že věta je správná pro všechny matice řádu $\leq n-1$.

Když $k=0$, jest $\gamma_0 = 0 < \alpha$ a skutečně platí $\gamma_0 < \gamma_1$, neboť $\gamma_1 > 0$.

Nechť tedy platí $\gamma_k < \alpha$ při určitém $k \geq 1$. Pak nutně je $\gamma_1 < n$. Podle výsledku věty 26.5. existuje matice L řádu $n - \gamma_1$ ($< n$) taková, že má 0 za $(\alpha - \gamma_1)$ - násobný charakt. kořen a pro $j = 1, 2, \ldots$ platí

$$\gamma_j = \gamma_1 + \text{nul } L^{j-1} . \qquad /27.6.1/$$

Odtud plyne pro $j = k$

$$\text{nul } L^{k-1} = \gamma_k - \gamma_1 < \alpha - \gamma_1 ,$$

takže podle předpokladu pro indukci jest

$$\text{nul } L^{k-1} < \text{nul } L^k .$$

Máme tedy

$$\gamma_k - \gamma_{k+1} = \text{nul } L^{k-1} - \text{nul } L^k < 0 ,$$

a věta je dokázána.

Věta 27.7: Pro $k = 1, 2, \ldots$ jest

$$\gamma_k - \gamma_{k-1} \geq \gamma_{k+1} - \gamma_k .$$

Důkaz provedeme opět indukcí vzhledem k řádu matice.

Ukažme předevím, že věta platí pro každou matici řádu $n = 1$. Nechť $A = (a)$ je libovolná matice řádu $n = 1$, jejíž charakteristická rovnice má 0 za $(1 \leq) \alpha$ - násobný kořen. Opět vidíme, že jest $\gamma_0 = 0$, $1 = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$, takže tvrzení je správné.

Nechť tedy matice A má řád $n \geq 2$ a předpokládejme, že věta je správná pro všechny matice řádu $\leq n-1$. Pro $k=1$ věta platí podle výsledku 26.6.3.

Nechť tedy $k \geq 2$.

Je-li $\gamma_1 = n$, pak máme $n = \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 \ldots$ a tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\gamma_1 < n$ a použijme vzorce /27.6.1/ :

$$\gamma_k - \gamma_{k-1} = \text{nul } L^{k-1} - \text{nul } L^{k-2}$$

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = \text{nul } L^k - \text{nul } L^{k-1} .$$

Protože matice L má řád $< n$, jest podle předpokladu pro indukci pravá strana první rovnosti $\geq$ než pravá strana druhé rovnosti, t.j.

$$\text{nul } L^{k-1} - \text{nul } L^{k-2} \geq \text{nul } L^k - \text{nul } ^{k-1},$$

a tím je tvrzení dokázáno.

Podle vět 27.5 a 27.6 soudíme, že v řadě matic $A^1, A^2, A^3, \ldots, A^r, \ldots$ /27.7.1/ existuje první matice A^r taková, že její nulita je $\gamma_r = \alpha$ a pak také všechny následující matice mají nulitu α.

Naproti tomu nulity předcházejících matic rostou, takže máme

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{r-1} < \gamma_r = \alpha = \gamma_{r+1} = \gamma_{r+2} = \ldots$$

Mimo to platí pro každá tři sousední čísla $\gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}$ nerovnost podle věty 27.7.

Označme $\alpha_1 = \gamma_1, \alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \alpha_3 = \gamma_3 - \gamma_2, \ldots, \alpha_r = \gamma_r - \gamma_{r-1}$

Pak nulity matic /27.7.1/ jsou

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha,$$

při čemž všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ jsou přirozená a podle 27.7 splňují nerovnosti

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq \alpha_r > 0$$

27.8. Definice charakteristických čísel.

Nechť A je libovolná čtvercová matice. Nechť a je $(1 \leq)\alpha$ - násobný kořen charakter. rovnice matice A. Pak ovšem 0 je α - násobný kořen charakt. rovnice matice $(A - aE)$.

N e c h ť $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \dots, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r = \alpha$ značí nulity matic

$$A - aE,\ (A - aE)^2,\ (A - aE)^3, \dots, (A - aE)^r .$$

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ se nazývají c h a r a k t e r i s t i c k á č í s l a m a t i c e A p ř í s l u š n á k e k o ř e n i a .

P ř í k l a d . Matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

má podle výpočtu v odst. 24.5. charakteristický polynom λ^4.

Má tedy čtyřnásobný charakt. kořen 0 . Podle výpočtu minorů 3.-ho stupně v charakt. determinantu /v odst. 24.5/ vymizí tyto pro $\lambda = 0$. Tedy v matici A vymizí všechny minory 3. řádu. Naproti tomu existují v matici A minory řádu 2, které jsou od nuly různé, na př. minor v levém rohu nahoře. Tedy hodnost matice A jest 2, a její nulita

$$\alpha_1 = 2 .$$

Utvořme nyní

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} .$$

Vidíme, že hodnost matice A^2 jest 1 , takže n u l i t a této matice je

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 ,$$

a odtud

$$\alpha_2 = 1$$

Konečně se ihned zjistí, že $A^3 = 0$, takže nulita matice A^3 jest

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 4 \quad ,$$

a odtud je

$$\alpha_3 = 1$$

Máme tedy ~~charakt. čísla matice A příslušná ke kořeni~~ $\lambda = 0$:

$$2,\ 1,\ 1\ .$$

Věta 27.9 : Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ jsou vzájemně různé kořeny charakteristické rovnice matice A. Nechť $\alpha, \beta, \dots \sigma$ značí násobnosti těchto jednotlivých kořenů. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\rho_1}$ jsou charakt. čísla příslušná k λ_1;
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\rho_2}$ jsou charakt. čísla příslušná k λ_2 ;
$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\rho_s}$,, ,, ,, ,, k λ_s

Pak polynom

$$\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\rho_1}(\lambda-\lambda_2)^{\rho_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{\rho_s}$$

je minimální polynom matice A.

Důkaz: Dle definice charakt. čísel má matice

$$(A-\lambda_1 E)^{\rho_1} \quad \text{nulitu } \alpha$$
$$(A-\lambda_2 E)^{\rho_2} \quad \text{nulitu } \beta$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(A-\lambda_s E)^{\rho_s} \quad \text{nulitu } \sigma\ .$$

Protože polynomy $(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2}, \dots (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s}$ jsou nesoudělné, má podle věty 26.3. matice

$$\psi(A) = (A-\lambda_1 E)^{\rho_1}(A-\lambda_2 E)^{\rho_2}\dots(A-\lambda_s E)^{\rho_s}$$

nulitu

$$\alpha+\beta+\dots+\sigma = n$$

Tedy $\psi(A) = 0$,

takže matice A splňují rovnici $\psi(\lambda) = 0$.

Nechť $f(\lambda)$ je libovol. polynom a nechť $d(\lambda)$ je největší společný dělitel polynomů $f(\lambda), \psi(\lambda)$. Pak existují polynomy

$f_1(\lambda), \psi_1(\lambda)$ takové, že

$$f_1(\lambda) . f(\lambda) + \psi_1(\lambda) . \psi(\lambda) = d(\lambda)$$

Odtud plyne $f_1(A) . f(A) + \psi_1(A) . \psi(A) = d(A)$.

Protože $\psi(A) = 0$, je

$$f_1(A) . f(A) = d(A) \qquad /27.9.1/$$

Jestliže se nějaký vektor (x) lineární substitucí o matici $f(A)$ transformuje v (0), takže $f(A).(x) = 0$, je podle /27.9.1/ $d(A).(x) = 0$; tedy

$$\text{nul } f(A) \leqq \text{nul } d(A)$$

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $f(\lambda)$, máme při vhodném polynomu $d_1(\lambda)$

$$d_1(\lambda) . d(\lambda) = f(\lambda) , \qquad /27.9.2/$$

takže

$$d_1(A) . d(A) = f(A) .$$

Jestliže pro nějaký vektor (x) platí ~~$d(A).(x) = 0$, pak jest~~

$$d_1(A) . [d(A).(x)] = f(A).(x)$$

a máme

$$f(A).(x) = 0$$

Odtud plyne, že

$$\text{nul } d(A) \leqq \text{nul } f(A) ,$$

takže s hořejším výsledkem dostáváme

$$\text{nul } f(A) = \text{nul } d(A) . \qquad /27.9.3/$$

Předpokládejme nyní, že $f(A) = 0$, takže

$$\text{nul } f(A) = n .$$

Podle /27.9.3/ je též $\text{nul } d(A) = n$.

Ježto $d(\lambda)$ je dělitelem polynomu $\psi(\lambda)$, máme při vhodném polynomu $q(\lambda)$:

$$\psi(\lambda) = q(\lambda) . d(\lambda) .$$

Jestliže $d(\lambda)$ je stupně nižšího než $\psi(\lambda)$, je nulita matice $d(A)$ menší než n . Polynom $d(\lambda)$ je pak totiž součinem polynomů

$$(\lambda-\lambda_1)^{c_1}, (\lambda-\lambda_2)^{c_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{c_s},$$

kde $0 \leq c_1 \leq \rho_1$, $0 \leq c_2 \leq \rho_2, \ldots,$ $0 \leq c_s \leq \rho_s$

a neplatí u všech $c_i = \rho_i$ pro $i = 1,2,\ldots, \rho_s$.

Je tedy podle 26.3

$$\text{nul } d(A) \leq c_1+c_2+\ldots+c_s \leq \rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s = n \quad .$$

Tedy $\qquad \psi(\lambda) = \text{konst.} \; d(\lambda)$,

a z /27.9.2/ plyne

$$f(\lambda) = \frac{1}{\text{konst}} \cdot d_1(\lambda) \cdot \psi(\lambda) \; .$$

Vychází tedy, že každý polynom $f(\lambda)$ takový, že $f(A) = 0$, je dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$. Zejména je tedy minimální polynom matice A dělitelný polynomem $\psi(\lambda)$ a tedy $\psi(\lambda)$ je minimální polynom matice A .

28. Soustava normálních vektorů.

Definice. Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n . Vektor (x) , který se lineární substitucí o matici A^k transformuje v (0) , kdežto lineární substitucí o matici A^{k-1} ve vektor $\neq (0)$, při čemž je $k \geq 1$, nazveme v e k t o r ř á d u k . Pro každý takový vektor tedy máme

$$A^k.(x) = (0) \; , \qquad A^{k-1}.(x) \neq (0) \; .$$

Nechť A má $\alpha (\geq 1)$ - násobný kořen 0 a nechť $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r > 0$ jsou charakteristická čísla příslušná k tomuto kořenu. Jak víme, má matice

$$A \; , \; A^2 \; , \; \ldots \; , \; A^r$$

nulitu $\qquad \alpha_1, \; \alpha_1+\alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r = \alpha$

a všechny další matice $A^{r+1}, \ldots,$ mají tutéž nulitu α .

V dalším opět značíme nulitu matice A^k symbolem δ_k , takže je $\delta_k = \alpha_1+\ldots+\alpha_k$ pro $1 \leq k \leq r$.

Nejprve dokážeme tuto větu:

28.1. N e c h ť $1 \leq k \leq r$. E x i s t u j e a l e s p o ň α_k v e k t o r ů

$$(x_1^1) \; , \ldots, \; (x_{\alpha_k}^1) \; ,$$

které se vyznačují tím, že

vektory	$(x_1^1), \ldots, (x_{\alpha_k}^1)$	jsou řádu	k,
,,	$A.(x_1^1), \ldots, A.(x_{\alpha_k}^1)$	,, ,,	$k-1$,
	$\ldots\ldots$		
,,	$A^{k-1}.(x_1^1), \ldots, A^{k-1}.(x_{\alpha_k}^1)$	,, ,,	1

a všechny tyto vektory jsou nezávislé.

Důkaz. Protože nulita matice A^k je γ_k, existuje γ_k nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici A^k transformují v (0) :

$$(x_1^1), \ldots, (x_{\gamma_k}^1) \tag{28.1.1}$$

Označme po $m = 1, \ldots, \gamma_k$:

$$(x_m^2) = A.(x_m^1); \ (x_m^3) = A.(x_m^2); \ldots; \ (x_m^{k+1}) = A.(x_m^k), \tag{28.1.2}$$

takže máme

$$\begin{aligned} (x_m^2) &= A.(x_m^1), \\ (x_m^3) &= A^2.(x_m^1), \\ &\ldots\ldots \\ (x_m^k) &= A^{k-1}.(x_m^1), \\ (x_m^{k+1}) &= A^k.(x_m^1) = (0) . \end{aligned} \tag{28.1.2}$$

Uvažujme o vektorech

$$(x_1^k), \ldots, (x_{\gamma_k}^k) . \tag{28.1.3}$$

Jestliže tyto vektory jsou vesměs (0), plyne z předposlední rovnosti /28.1.2/ , že se vektory /28.1.1/ transformují v (0) lineární substitucí o matici A^{k-1}. Tato matice má nulitu γ_{k-1} a tedy největší počet nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici A^{k-1} transformují v (0), je γ_{k-1}. Protože $\gamma_k > \gamma_{k-1}$, máme spor. Odtud soudíme, že mezi vektory /28.1.3/ je alespoň jeden $\neq (0)$. Nechť h (≥ 1) značí největší počet vektorů /28.1.3/ , které jsou nezávislé a nechť označení je takové, že jsou to vektory

$$(x_1^k) \ldots (x_h^k) \tag{28.1.4}$$

Pak každý vektor /28.1.3/ je lineární kombinací vektorů /28.1.4/ a tedy máme

$$(x_m^k) = \sum_{\beta=1}^{h} a_{m\beta} \cdot (x_\beta^k) \quad ,$$

neboli
$$A^{k-1} \cdot (x_m^1) = \sum_{\beta=1}^{h} a_{m\beta} \cdot A^{k-1} \cdot (x_\beta^1) \; ,$$

kde $a_{m\beta}$ jsou vhodné konstanty. Poslední rovnost můžeme psáti ve tvaru

$$A^{k-1} \cdot \left[(x_m^1) - \sum_{\beta=1}^{h} a_{m\beta} (x_\beta^1) \right] = (0) \; .$$

Odtud vidíme, že všechny vektory $(x_m^1) - \sum_{\beta=1}^{h} a_{m\beta} \cdot (x_\beta^1)$ jsou lin. kombinacemi vhodných/pro všechny vektory týchž/nezávislých vektorů v počtu γ_{k-1}, neboť matice A^{k-1} má nulitu γ_{k-1}. Odtud pak plyne dále, že všechny vektory /28.1.1/ jsou lin. kombinacemi těchto γ_{k-1} vektorů a vektorů /28.1.4/, tedy celkem $\gamma_{k-1} + h$ vektorů. Protože vektory /28.1.1/ jsou nezávislé a jejich γ_k, máme $\gamma_k \leq \gamma_{k-1} + h$, takže vychází

$$h \geq \gamma_k - \gamma_{k-1} = \alpha_k \quad .$$

Tím jsme zjistili, že vektory

$$(x_1^k), \; \ldots \; , (x_{\alpha_k}^k) \qquad /28.1.5/$$

jsou nezávislé.

Nyní ukážeme, že pro $\mu = 0, \ldots, k-1$, jsou

$$A^{\mu} \cdot (x_1^1) \; , \ldots , \; A^{\mu} \cdot (x_{\alpha_k}^1)$$

vektor řádu $k - \mu$. Nuže, pro $\beta = 1, \ldots, \alpha_k$, platí vztahy

$$A^{k-\mu} \left[A^{\mu} \; (x_\beta^1) \right] = A^k \cdot (x_\beta^1) = (0) \; ,$$
$$A^{k-\mu-1} \left[A^{\mu} \; (x_\beta^1) \right] = A^{k-1} \cdot (x_\beta^1) = (x_\beta^k) \neq (0),$$

a tím je tvrzení dokázáno.

Zbývá zjistiti, že všechny vektory $A^{\mu} \cdot (x_\beta^1) \; ; \mu = 0, \ldots, k-1;$ $\beta = 1, \ldots, \alpha_k$ jsou nezávislé. V opačném případě platí relace tvaru

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta}\cdot(x_\beta^1)+\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{1\beta}A\cdot(x_\beta^1)+\dots+\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{k-1,\beta}A^{k-1}\cdot(x_\beta^1)=(0), \qquad /28.1.6/$$

při čemž všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ nejsou rovny 0 . Složením této rovnosti s maticí A^{k-1} obdržíme

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta}\cdot(x_\beta^k)+(0)+\dots+(0)=(0)$$

a odtud plyne $a_{0\beta}=0$, protože vektory /28.1.5/ jsou nezávislé. Podobně obdržíme složením s maticí A^{k-2} : $a_{1\beta}=0$,atd., takže v relaci /28.1.6/ jsou všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ rovny 0 , a máme spor. Tím je důkaz proveden.

Nyní odvodíme tuto větu:

28.2. E x i s t u j e $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=\alpha$ v e k t o r ů

$$(x_1^1),\dots,(x_{\alpha_r}^1);\ (x_1^2),\dots,(x_{\alpha_{r-1}}^2);\dots;(x_1^r),\dots,(x_{\alpha_1}^r) \qquad /28.2.1/$$

k t e r é m a j í t y t o v l a s t n o s t i :

1. V e k t o r y $(x_1^1),\dots,(x_{\alpha_r}^1)$ j s o u ř á d u r ,

$(x_1^2),\dots,(x_{\alpha_{r-1}}^2)$,, ,, $r-1$,

. . . .

$(x_1^r),\dots,(x_{\alpha_1}^r)$,, ,, 1 ;

2. p r o $1\leqq k\leqq r-1 \geqq 1$ j e s t

$$A(x_1^k)=(x_1^{k+1}),\dots,A(x_{\alpha_{r-k+1}}^k)=(x_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1}) ;$$

3. v e k t o r y /28.2.1/ j s o u n e z á v i s l é .

Soustava vektorů /28.2.1/ o těchto vlastnostech je s o u s t a v a n o r m á l n í c h v e k t o r ů patřící k $\alpha\,(\geqq 1)$ – násobnému charakteristickému kořenu 0 matice A. Taková soustava se tedy skládá z α nezávislých vektorů.

Důkaz. Když $r=1$ jest věta správná podle předcházející věty 28.1. Nechť tedy $r\geqq 2$. Nechť $1\leqq k\leqq r-1$ a předpokládejme, že existují vektory

$$\begin{matrix} (x_1^1), \ldots\ldots, (x^1_{\alpha_r}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_1^k), \ldots\ldots, (x^k_{\alpha_{r-k+1}}) \end{matrix} \qquad /28.2.2/$$

takové, že

1. vektory $(x_1^1), \ldots, x^1_{\alpha_r}$ jsou řádu r

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x_1^k), \ldots, x^k_{\alpha_{r-k+1}}$,, ,, $r-k+1$

2. pro $1 \leqslant \mu \leqslant k-1 \geqslant 1$ jest

$$A.(x_1^{\mu}) = (x_1^{\mu+1}), \ldots A.(x^{\mu}_{\alpha_{r-\mu+1}}) = x^{\mu+1}_{\alpha_{r-\mu+1}}$$

3. vektory $A.(x_1^k), \ldots, A.(x^k_{\alpha_{r-k+1}})$ jsou řádu $r-k$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ /28.2.3/

$A^{r-k}.(x_1^k), \ldots, A^{r-k}.(x^k_{\alpha_{r-k+1}})$,, ,, 1.

4. Všechny vektory /28.2.2/ a /28.2.3/ jsou n e z á v i s l é.

D ů k a z /úplnou indukcí/ .

Tento předpoklad je splněn pro $k=1$, jak plyne z věty 28.1 /když v ní místo k píšeme r /.

Ukážeme, že pak existují další vektory

$$(x_1^{k+1}), \ldots\ldots, (x^{k+1}_{\alpha_{r-k}}) \qquad /28.2.4/$$

takové, že o vektorech /28.2.2/ a /28.2.4/ platí hořejší výroky 1.- 4., v nichž místo k čteme $k+1$. Tím bude důkaz věty 28.2 proveden $(k = r)$.

Nuže označme

$$A.(x_1^k) = (x_1^{k+1}), \ldots, A.(x^k_{\alpha_{r-k+1}}) = (x^{k+1}_{\alpha_{r-k+1}}), \qquad /28.2.5/$$

takže vzorce /28.2.2./ platí i pro $\mu = k$.

Protože $\qquad \text{nul}\, A^{r-k} = \gamma_{r-k}$,

existuje γ_{r-k} nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici A^{r-k} transformují ve vektor (0). Podle předpokladů 3.a 4. jsou vektory $(x_1^{k+1}), \dots, (x_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1})$ řádu r-k, [a tedy se lineární substitucí o matici A^{r-k} transformují ve vektor (0)] a jsou nezávislé. Existují tudíž další vektory

$$\left(x_{\alpha_{r-k+1}+1}^{k+1}\right), \dots, \left(x_{\gamma_{r-k}}^{k+1}\right)$$

v počtu $\gamma_{r-k} - \alpha_{r-k+1}$, takové, že se všechny vektory

$$\left(x_1^{k+1}\right), \dots, \left(x_{\gamma_{r-k}}^{k+1}\right) \qquad /28.2.6/$$

transformují ve vektor nulový lineární substitucí o ~~matici~~ A^{r-k} a jsou nezávislé.

Označme pro $m = 1, 2, \dots, \gamma_{r-k}$ vektory

$$\left(x_m^{k+2}\right) = A.\left(x_m^{k+1}\right), \dots \left(x_m^{r}\right) = A.\left(x_m^{r-1}\right),$$

takže máme

$$\left(x_m^{k+2}\right) = A.\left(x_m^{k+1}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(x_m^{r}\right) = A^{r-k-1}.\left(x_m^{k+1}\right), \qquad /28.2.7/$$

$$(0) = A^{r-k}.\left(x_m^{k+1}\right)$$

Uvažujme o vektorech

$$\left(x_1^{r}\right), \dots, \left(x_{\gamma_{r-k}}^{r}\right) \qquad /28.2.8/$$

Mezi těmito vektory je alespoň α_{r-k+1} nezávislých vektorů, totiž vektory řádu 1, a to:

$$\left(x_1^{r}\right), \dots, \left(x_{\alpha_{r-k+1}}^{r}\right),$$

jak plyne z předpokladu 4 .

Podobně jako jsme v důkaze věty 28.1 zjistili o vektorech /28.1.3/ [podle tamějšího označení], zjistíme i nyní, že mezi vektory /28.2.8/ je alespoň

$$h \geqq \gamma_{r-k} - \gamma_{r-k-1} = \alpha_{r-k}$$

nezávislých vektorů.

Při vhodném označení jsou tedy vektory

$$(x_1^r), \ldots, (x_{\alpha_{r-k}}^r)$$

nezávislé.

Nyní ukážeme, že pro $\mu = 0, \ldots, r-k-1$ jsou

$$A^{\mu}.(x_1^{k+1}), \ldots, A^{\mu}.(x_{\alpha_{r-k}}^{k+1})$$

vektory řádu $r-k-\mu$.

Nuže, pro $\beta = 1, \ldots, \alpha_{r-k}$ platí vztahy

$$A^{r-k-\mu}\left[A^{\mu}.(x_\beta^{k+1})\right] = A^{r-k}.(x_\beta^{k+1}) = 0$$

$$A^{r-k-\mu-1}\left[A^{\mu}.(x_\beta^{k+1})\right] = A^{r-k-1}.(x_\beta^{k+1}) = (x_\beta^{k+1}) \neq (0),$$

a tím je tvrzení dokázáno.

Zbývá zjistiti, že všechny vektory

$$\begin{array}{c} (x_1^1), \ldots, (x_{\alpha_r}^1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_1^{k+1}), \ldots, (x_{\alpha_{r-k}}^{k+1}), \\ A.(x_1^{k+1}), \ldots, A.(x_{\alpha_{r-k}}^{k+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{r-k-1}.(x_1^{k+1}), \ldots A^{r-k-1}.(x_1^{k+1}) \end{array}$$

jsou nezávislé. V opačném případě totiž platí relace tvaru

$$\sum_{\beta=1}^{r} a_{1\beta}.(x_\beta^1) + \ldots + \sum_{\gamma=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+1,\gamma}.(x_\gamma^{k+1}) + \sum_{\gamma=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+2,\gamma} A.(x_\gamma^{k+1}) + \ldots +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\alpha_{r-k}} a_{r\gamma}.A^{r-k-1}.(x_\gamma^{k+1}) = 0 ,$$

při čemž všechny koeficienty $a_{1\beta}, \ldots a_{r\gamma}$ nejsou rovny 0. Složíme-li tuto rovnost po řadě s maticí $A^{r-1}, A^{r-2}, \ldots, A^0$, zjistíme, že všechny koeficienty $a_{1\beta}, \ldots, a_{r\gamma}$ jsou rovny 0. Tím jsme dospěli ke sporu, a důkaz je ukončen.

28.3. Definice. Nechť A je libovolná čtvercová matice řádu n. Nechť $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ jsou všechny vzájemně různé kořeny charakteristické rovnice matice A a nechť čísla $\alpha,\beta,\ldots,\sigma$ značí násobnosti jednotlivých kořenů, takže $\alpha+\beta+\ldots+\sigma = n$.
Pak charakteristická rovnice

matice $A-\lambda_1 E$ má α – násobný kořen 0 ,
matice $A-\lambda_2 E$ má β – násobný ,, 0 ,
. . . .
matice $A-\lambda_s E$,, σ – násobný ,, 0 .

Nechť

$(a_1),\ldots,(a_\alpha)$ je soustava normálních vektorů matice $A-\lambda_1 E$,
$(b_1),\ldots,(b_\beta)$,, ,, ,, ,, ,, $A-\lambda_2 E$,
. . . .
$(s_1),\ldots,(s_\sigma)$,, ,, ,, ,, ,, $A-\lambda_s E$,

patřících k příslušnému nulovému kořenu.
Soustava vektorů

$$(a_1),\ldots,(a_\alpha)\,;(b_1),\ldots(b_\beta);(s_1),\ldots(s_\sigma) \qquad /28.3.1/$$

v počtu $\alpha+\beta+\ldots+\sigma = n$, je t. zv. soustava normálních vektorů matice A.

Věta 28.3.: Vektory soustavy /28.3.1./ jsou lineárně nezávislé, takže matice čtvercová řádu n

$$\| a_1,\ldots a_\alpha ,\ b_1,\ldots b_\beta ,\ldots\ s_1,\ldots s_\sigma \|$$

je regulární.

Důkaz. Ve skupině vektorů $(a_1),\ldots,(a_\alpha)$ nechť jsou vektory uspořádány tak, že vektory vyššího řádu předcházejí vektory řádu nižšího. Podobně budiž tomu v ostatních skupinách.
Předpokládejme, že vektory /28.3.1/ nejsou lineárně nezávislé, takže existuje lineární relace

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu .(a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu .(b_\nu) +\ldots+ \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi .(s_\pi) = (0) \;, \quad /28.3.2/$$

při čemž některá z čísel m_μ , $n_\nu,\ldots,p_\pi$ nejsou nuly.

Označme tuto relaci stručněji symbolem

$$\left[(a_1),\ldots (a_\alpha) \;;(b_1).(b_\beta);\ldots; (s_1),\ldots, (s_\sigma)\right] = (0) \;, \quad /28.3.2/$$

Když vektor na levé a pravé straně v relaci /28.3.2/ složíme s maticí $A-\lambda_1 E$, obdržíme

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu.\left[(A-\lambda_1 E) \,.\, (a_\mu)\right] +\ldots\ldots+ \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi.\left[(A-\lambda_1 E).(s_\pi)\right]=(0), \quad /28.3.3/$$

Jestliže vektory $(a_1),\ldots (a_\alpha)$ označíme jako dříve

$$(x_1^{\,1}),\ldots(x^1_{\alpha_r});(x_1^{\,2}),\ldots(x^2_{\alpha_{r-1}});\ldots;(x_1^{\,r}),\ldots,(x^r_{\alpha_1}) \;,$$

vidíme.že vzhledem k /28.1.2a/ jest

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu \left[(A-\lambda_1 E).(a_\mu)\right] = m_1(x_1^{\,2})+\ldots+ m_{\alpha_r}.(x^2_{\alpha_r})+ m_{\alpha_{r+1}}(x_1^{\,3})+\ldots+$$

$$+ m_{\alpha-\alpha_1}.(x^r_{\alpha_2}) = m_1(a_{\alpha_r+1})+ m_2(a_{\alpha_r+2})+\ldots+ m_{\alpha-\alpha_1}.(a_{\alpha-\alpha_1-\alpha_2})$$

Dále je na př.

$$n_\nu \left[(A-\lambda_1 E).(b_\nu)\right]= n_\nu.\left[(A-\lambda_2 E)+(\lambda_2-\lambda_1) E \,.(b_\nu)\right] =$$

$$= n_\nu\left[(A-\lambda_2 E).(b_\nu) + n_\nu.(\lambda_2-\lambda_1).(b_\nu)\right], \quad /28.3.4/.$$

takže

$$\sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu.\left[(A-\lambda_1 E).(b_\nu)\right] =(\lambda_2-\lambda_1).\left\{ n_1.(b_1)+ n_2.(b_2)+\ldots+ n_\beta.(b_\beta) +\right.$$

$$+ n_1.(b_{\beta_{r2}+1}) +\ldots\ldots$$

Je tedy relace /28.3.3/ tvaru

$$\left[(a_{\alpha_r+1}),\ldots(a_\alpha) \;;(b_1),\ldots,(b_\beta) \;;\ldots;(s_1),\ldots,(s_\sigma)\right] = (0).$$

Případnými dalšími složeními s maticí $A-\lambda_1 E$ a pak s maticemi $A-\lambda_2 E,\ldots A-\lambda_{s-1}E$ dojdeme konečně k relaci

$$\left[(s_1),\ldots,(s_\sigma)\right] = (0) \quad /28.3.5/$$

Jestliže všechna čísla $p_1, \dots, p_\sigma$ nejsou nuly/což můžeme předpokládati,neboť jinak bychom mohli vynechati poslední součet v /38.3.2/ a usuzovati pak o předposledním/ není relace /38.3.5/ identická.

Vskutku,je-li na př. $p_1 \neq 0$, je podobně jako v /38.3.4/

$$p_1\left[(A-\lambda_1 E)\cdot(s_1)\right] = p_1\cdot\left\{\left[(A-\lambda_s E)+(\lambda_s-\lambda_1)E\right]\cdot(s_1)\right\} =$$

$$= p_1(\lambda_s-\lambda_1)\cdot(s_1) + p_1\cdot(s_{\sigma_0}) + \dots ,$$

kde $\sigma_0 > 1$. Je tedy koeficient při (s_1) v relaci /38.3.3/ $p_1\cdot(\lambda_s-\lambda_1)$ a podobně v relaci /38.3.5/ je (p_1)- krát součin vhodných mocnin výrazů $(\lambda_i-\lambda_k)$ pro $i \neq k$. Je tedy tento koeficient různý od nuly,a tudíž relace /38.3.5/ není identická. To je však nemožné,neboť podle významu jsou vektory

$$(s_1), \dots (s_\sigma)$$

lineárně nezávislé. – Tím je věta dokázána.

39. Podobné matice.

Definice. Nechť A je libovoná čtvercová matice řádu n. Čtvercová matice B řádu n se nazývá podobná s A, jestliže existuje regulární čtvercová matice Q řádu n taková, že

$$B = Q^{-1} A Q .$$

Pozn.: Jestliže B je podobná s A, je A podobná s B. Z předcházející relace plyne

$$A = Q B Q^{-1} ,$$

takže matice Q^{-1} má nyní tutéž úlohu jako dříve matice Q. Je-li tedy B podobná s A, můžeme říci,že matice A, B jsou podobné.

Platí tyto věty:

29.1.1. Matice A je podobná s A /reflexivnost/.

2. Je-li matice A podobná s B, pak je matice B podobná s A /symetrie/.

3. Je-li B podobná s A a C podobná s B, je C podobná s A /transitivnost/.

Důkaz. Platnost první věty je zřejmá. Druhou větu jsme dokázali na str.95. Pro třetí větu z relací

$$B = Q^{-1}A\,Q\ , \qquad C = R^{-1}B\,R$$

plyne

$$C = R^{-1}\left[\,Q^{-1}AQ\right]R = (R^{-1}Q^{-1})A\,(QR) = (QR)^{-1}\,A\,(QR)\ ,$$

a to dokazuje větu.

<u>Věta 29.2</u> : Dvě podobné matice mají stejné kořeny svých charakteristických rovnic a stejná charakt. čísla příslušná k témuž kořenu.

Že dvě podobné matice mají stejné kořeny svých charakteristických rovnic, bylo ukázáno ve větě 26.5.2 /str.76/.

Jsou-li A, B podobné matice, takže platí vztah

$$B = Q^{-1}AQ\ ,$$

a je-li a kořen jejich charakt. rovnic, pak

$$(B - aE)^k = Q^{-1}\,(A - aE)^k Q\ .$$

To plyne z věty 26.5.3 /str.76/, neboť

$$B - aE = Q^{-1}(A - aE)Q\ .$$

Protože matice Q je regulární, mají matice $(A - aE)^k$, $(B - aE)^k$ stejnou nulitu /srv. větu 26.4 na str.75 a 26.5.1 na str.76/ pro každé přirozené k. Jsou tedy charakteristická čísla příslušná k témuž kořenu a podobných matic A,B stejná.

Věta 29.3 : Dvě podobné matice mají týž minimální polynom.

Věta plyne z věty 29.2 a z věty 27.9 /str.84/.

Věta 29.4 : Nechť matice A, B jsou podobné, t.j. $Q^{-1}AQ = B$.
Nechť a jest $(0<)\alpha$-násobný kořen charakt. rovnice matice B /a tedy i A/. Nechť

$$(y^1_1),\dots,(y^1_{\alpha_r});(y^2_1),\dots(y^2_{\alpha_{r-1}});\dots;(y^r_1),\dots,(y^r_{\alpha_1}) \qquad /29.4.1/$$

je soustava normálních vektorů patřících k α-násobnému kořenu 0 matice B - aE. Pak

$$Q.(y^1_1),\dots Q.(y^1_{\alpha_r});\ Q.(y^2_1),\dots,\ Q.(y^2_{\alpha_{r-1}});\dots\dots\dots\ Q.(y^r_{\alpha_1})$$

je soustava normálních vektorů, patřících k α-násobnému kořenu 0 matice A - aE.

Důkaz. Označme pro jednoduchost

$$(x^1_1) = Q(y^1_1),\dots,(x^1_{\alpha_r}) = Q.(y^1_{\alpha_r});\dots\dots\dots(x^r_{\alpha_1}) = Q.(y^r_{\alpha_1}) .$$

Podle předpokladu jsou vektory

$(y^1_1),\dots\dots(y^1_{\alpha_r})$ řádu r ,

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots$

$(y^r_1),\dots\dots(y^r_{\alpha_1})$ řádu 1

pro matici B - aE , a platí

$$(B-aE).(y^1_1) = (y^2_1)\ ,\dots\dots\ (B-aE).(y^1_{\alpha_r}) = (y^2_{\alpha_r})\ ;$$

$$(B-aE).(y^2_1) = (y^3_1)\ ,\dots\dots\ (B-aE).(y^2_{\alpha_{r-1}}) = (y^3_{\alpha_{r-1}})\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(B-aE).(y^{r-1}_1) = (y^r_1),\dots\dots,\ (B-aE).(y^{r-1}_{\alpha_2}) = (y^r_{\alpha_2})\ ;$$

mimo to jsou vektory /29.4.1/ lineárně nezávislé.

Z předpokladu, že (y_n^1), pro $n = 1,2,\dots,\alpha_r$, jsou vektory řádu r, plyne

$$(0) = (B-aE)^r.(y_n^1) = Q^{-1}(A-aE)^r.Q.(y_n^1) = Q^{-1}(A-aE)^r.(x_n^1) \ ,$$

$$(0) \neq (B-aE)^{r-1}.(y_n^1) = Q^{-1}.(A-aE)^{r-1}.\ Q.(y_n^1) = Q^{-1}.(A-aE)^{r-1}.(x_n^1)$$

a odtud plyne složením s maticí Q

$$(A-aE)^r.(x_n^1) = (0) \ , \quad (A-aE)^{r-1}.(x_n^1) \neq (0).$$

Jsou tedy vektory

$$(x_1^1),\dots\dots (x_{\alpha_r}^1) \qquad \text{řádu} \quad r$$

Podobně zjistíme, že vektory

$$(x_1^2),\dots\dots (x_{\alpha_{r-1}}^2) \quad \text{jsou řádu} \quad r-1 \ ,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(x_1^r),\dots\dots x_{\alpha_1}^r \qquad ,, \qquad ,, \qquad 1 \ .$$

Dále plyne z předpokladu

$$(B-aE).(y_n^k) = (y_n^{k+1}) \quad \text{pro} \quad k = 1,2,\dots r-1 \ ; \quad n = 1,2,\dots\alpha_{r-k+1}$$

neboli

$$Q^{-1}(A-aE).Q.(y_n^k) = (y_n^{k+1}) \ ,$$

vztah

$$(A-aE).(x_n^k) = Q.(y_n^{k+1}) = (x_n^{k+1}) \ ,$$

t.j. $$(A-aE).(x_n^k) = (x_n^{k+1}) \ ,$$

takže zbývá dokázati, že vektory

$$(x_1^1),\dots(x_{\alpha_r}^1); (x_1^2),\dots(x_{\alpha_{r-1}}^2);\dots;(x_1^r),\dots\dots(x_{\alpha_1}^r)$$

jsou lineárně nezávislé.

Předpokládejme, že jsou závislé, takže existuje relace

$$m_1(x_1^1) + m_2(x_1^2) + \dots + m_\alpha(x_{\alpha_1}^r) = 0 \ ,$$

při čemž některé z čísel m_n jsou $\neq 0$.

Pišme tuto relaci stručněji ve tvaru

$$\sum m_n.(x_n) = (0) ,$$

odtud je
$$\sum m_n . Q.(y_n) = (0) ,$$

takže .
$$Q. \sum m_n.(y_n) = (0) ,$$

což značí, že se vektor $\sum m_n.(y_n)$ transformuje lineární substitucí o matici Q ve vektor (0) . Avšak Q je regulární, t.j. má nulitu 0 , a tedy

$$\sum m_n.(y_n) = (0) .$$

Protože některá z čísel $m_n \neq 0$, znamená vztah $\sum m_n.(y_n) = (0)$, že vektory (y_n) jsou lineárně závislé. To je však proti předpokladu. Tím je důkaz ukončen.

Věta 29.5 : Nechť matice A,B jsou podobné, t.j. $Q^{-1}AQ = B$. Nechť $(a_1),\dots(a_\alpha)$; $(b_1)\dots(b_\beta)$;... ...;$(s_1)\dots(s_\sigma)$ je soustava normálních vektorů pro matici B. Pak

$$Q.(a_1),\dots, Q.(a_\alpha) ; Q.(b_1),\dots, Q.(b_\beta) ;\dots; Q.(s_1),\dots, Q.(s_\sigma)$$

je soustava normálních vektorů pro matici A .

Věta plyne z 29.4.

Věta 29.6 : /Obrácení věty 29.2/: Mají-li dvě matice téhož řádu n stejné kořeny svých charakteristických rovnic a stejná charakt. čísla příslušná k témuž kořenu, pak jsou podobné.

Když $B = Q^{-1}AQ$ a když

$(\bar{a}_1),\dots(\bar{a}_\alpha)$; $(\bar{b}_1),\dots(\bar{b}_\beta)$;....; $(\bar{s}_1),\dots,(\bar{s}_\sigma)$ je soustava normálních vektorů pro matici B , pak podle 29.5 je soustava normálních vektorů pro matici A :

$(a_1) = Q.(\bar{a}_1),\dots(a_\alpha) = Q.(\bar{a}_\alpha)$; $b_1 = Q.(\bar{b}_1),\dots\dots(s_\sigma) = Q.(\bar{s}_\sigma)$

avšak

$$\| a_1,\dots,a_\alpha ; b_1,\dots b_\beta ,\dots, s_1,\dots s_\sigma \| = \| Q.(\bar{a}_1),\dots Q.(\bar{a}_\alpha), Q.(\bar{b}_1),\dots Q.(\bar{s}_\sigma) \| =$$
$$= Q.\| \bar{a}_1,\dots \bar{a}_\alpha , \bar{b}_1,\dots,\bar{b}_\beta ;\dots, \bar{s}_1,\dots \bar{s}_\sigma \| ,$$

a podle 28.3 jest matice $\| \bar{a}_1,\dots\dots,\bar{s}_\sigma \|$ regulární.

Tedy

$$Q = \| a_1,\dots\dots, s_\sigma \| . \| \bar{a}_1,\dots\dots,\bar{s}_\sigma \|^{-1} .$$

Přistupme nyní k důkazu hořejší věty.

Nechť mají obě matice B,A /téhož řádu n / stejné kořeny svých charakt.rovnic a stejná charakt.čísla,příslušná k témuž kořenu.

Nechť pak

$$(\bar{a}_1),\dots,(\bar{a}_\alpha) ; \bar{b}_1 ,\dots, \bar{b}_\beta ;\dots;(\bar{s}_1),\dots,(\bar{s}_\sigma)$$

je nějaká soustava normálních vektorů pro matici B a podobně

$$(a_1),\dots,(a_\alpha) ;(b_1),\dots,(b_\beta) ;\dots;(s_1),\dots,(s_\sigma)$$

nějaká soustava norm.vektorů pro matici A , při čemž vždy k témuž kořenu charakt.rovnice patří skupiny vektorů označené stejným písmenem,tedy na př.

$$(\bar{a}_1),\dots,(\bar{a}_\alpha) \quad \text{a} \quad (a_1),\dots(a_\alpha) ,$$

atd.Podle věty 28.3 /str.93/ je matice

$$\| \bar{a}_1,\dots\dots\bar{s}_\sigma \| \quad \text{regulární.}$$

Nechť Q je matice

$$Q = \| a_1,\dots\dots s_\sigma \| . \| \bar{a}_1,\dots\dots \bar{s}_\sigma \|^{-1} , \quad /29.6.1/$$

takže

$$(a_1)= Q.(\bar{a}_1),\dots,(a_\alpha) = Q.(\bar{a}_\alpha) ;(b_1)= Q.(\bar{b}_1),\dots,(s_\sigma)=Q.(\bar{s}_\sigma). \quad /29.6.2/$$

Označme pro okamžik písmenem $\underline{a}$ některý kořen charakt.rovnice matice A a matice B . K tomuto kořenu patří vektory,na př.

pro matici A : $(a_1),\dots\dots,(a_\alpha)$,

pro matici B : $(\bar{a}_1),\dots\dots (\bar{a}_\alpha)$.

Označme tyto vektory postupně

$$(x^1_1),\dots,(x^1_{\alpha_r});\dots\dots;(x^r_1),\dots,(x^r_{\alpha_1}) ,$$

případně $$(\bar{x}^1_1),\dots (\bar{x}^1_{\alpha_r});\dots\dots;(\bar{x}^r_1),\dots,(\bar{x}^r_{\alpha_1}) ,$$

takže $(a_1) = (x_1^1), \dots, (\bar{a}_1) = (\bar{x}_1^1), \dots,$

při čemž vektory $(x_1^1), \dots, (x_{\alpha_r}^1)$ jsou řádu r, atd.

Podle významu těchto vektorů jest tedy

$$(A - aE).(x_n^r) = (0) \qquad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots \alpha_1 \ ,$$

a tedy také podle /29.6.2/

$$Q^{-1}.(A - aE).\ Q\ .(\bar{x}_n^r) = Q^{-1}.(0) = (0) \ ,$$

a podobně $\qquad (B - aE).(\bar{x}_n^r) = (0) \ .$

Je tedy $\qquad (B - aE).(\bar{x}_n^r) = Q^{-1}.(A - aE).Q.(\bar{x}_n^r)$

a odtud přičtením vektoru $a.(\bar{x}_n^r)$ na obou stranách plyne

$$B.(\bar{x}_n^r) = Q^{-1}AQ(\bar{x}_n^r) \ .$$

Podobně máme $(A - aE).(x_n^{r-1}) = (x_n^r) \qquad$ pro $n = 1, 2, \dots \alpha_2$

a tedy též /podle 29.6.2/

$$Q^{-1}.(A - aE).Q.(\bar{x}_n^{r-1}) = Q^{-1}.Q.(\bar{x}_n^r) = (\bar{x}_n^r) \ ,$$

a podobně

$$(B - aE).(\bar{x}_n^{r-1}) = (\bar{x}_n^r) \ .$$

Tedy

$$(B - aE).(\bar{x}_n^{r-1}) = Q^{-1}.(A - aE).Q.(\bar{x}_n^{r-1})$$

a odtud pričtením vektoru $a(\bar{x}_n^{r-1})$ na obou stranách plyne

$$B.(\bar{x}_n^{r-1}) = Q^{-1}.A.Q.(\bar{x}_n^{r-1}) \ ,$$

atd. Vidíme, že platí rovnice

$$B.(\bar{a}_1) = Q^{-1}.A.Q.(\bar{a}_1),\ B.(\bar{a}_2) = Q^{-1}.A.Q.(\bar{a}_2), \dots, B.(\bar{a}_\sigma) = Q^{-1}A\ Q.(\bar{a}_\sigma) \ ,$$

takže $\quad B.\|\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma\| = Q^{-1}.A.Q.\|\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma\| \qquad$ /29.6.3/

Avšak matice $\|\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma\|$ je regulární, jak jsme výše podotkli.

Složením relace /29.6.3/ s maticí $\|\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma\|^{-1}$ pak

vychází $\qquad B = Q^{-1}A\ Q \ ,$

takže matice A, B jsou podobné.

(30). Transformace párů matic.

Weierstrass ve svém proslulém pojednání „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen" /Monatsberichte der kgl. preussischen Akad. der Wiss. 1868, str. 310 / řešil tento problém :

J s o u d á n y d v ě č t v e r c o v é m a t i c e P, Q t é h o ž ř á d u n a d a l š í d v ě P_1, Q_1 o p ě t č t v e r c o v é ř á d u n. J a k é j s o u n u t n é a d o s t a t e č n é p o d m í n k y, a b y e x i s t o v a l y r e g u l á r n í m a t i c e H, K t a k o v é, ž e

$$P_1 = HPK \ , \quad Q_1 = HQK \ . \qquad /30.1.1/$$

Weierstrass se zabýval případem, že pro všechna čísla λ, μ n e p l a t í

$$|\lambda P + \mu Q| = 0$$

a jeho řešení spočívá na pojmu t.zv. elementárních dělitelů, jak se o něm později zmíním. Z předcházející theorie, která pochází od Ed. Weyra, plyne snadno jiné řešení, které se také vztahuje na případ, že neplatí $|\lambda P + \mu Q| = 0$ pro všechna čísla λ, μ.

30.1. Předpokládejme nejprve, že $|P| \neq 0$. Existují-li regulární matice H, K takové, že platí /30.1.1/, jest

$$|P_1| = |H|.|P|.|K| \ ,$$

takže také matice P_1 je regulární. Mimo to máme

$$K = P^{-1} H^{-1} P_1 \ ,$$

$$Q_1 = HQP^{-1}H^{-1}P_1 \ ,$$

takže

$$Q_1 P_1^{-1} = H(QP^{-1})H^{-1} \ .$$

Tedy obě matice $Q_1 P_1^{-1}$, QP^{-1} jsou podobné.

Jsou-li naopak matice P, P_1 regulární a obě matice $Q_1 P_1^{-1}$, QP^{-1} jsou podobné, takže existuje matice čtvercová H taková, že

$$Q_1 P_1^{-1} = H(QP^{-1})H^{-1} \ ,$$

můžeme určiti matici K vzorcem

$$K = P^{-1}H^{-1}P_1 \ .$$

Pak máme

$$HPK = H\, PP^{-1}H^{-1}P_1 = P_1; \quad HQK = HQP^{-1}H^{-1}P_1 = Q_1 P_1^{-1} P_1 = Q_1 \ ,$$

takže existují regulární matice $H, K = P^{-1}H^{-1}P_1$ takové, že platí /30.1.1/. Vychází tedy tento výsledek:

Věta 30.1: N e c h ť $P,Q;P_1,Q_1$ j s o u d v a p á r y č t v e r c o v ý c h m a t i c t é h o ž ř á d u n. N e c h ť $|P| \neq 0$.
P a k e x i s t u j í r e g u l á r n í m a t i c e H,K ř á d u n. t a k o v é , ž e p l a t í

$$P_1 = HPK \ , \quad Q_1 = HQK$$

t e h d y a j e n t e h d y , j e - l i $|P_1| \neq 0$ a o b ě m a t i c e $QP^{-1}, Q_1P_1^{-1}$ m a j í s t e j n é c h a r a k t. č í s l a p ř í s l u š n á k t é m u ž k o ř e n u a s t e j n é c h a r a k t. k o ř e n y .

30.2. Předpokládejme nyní, že $|P| = |P_1| = |Q| = |Q_1|$, avšak že pro všechna λ , μ neplatí $|\lambda P + \mu Q| = 0$.
Pak existují čísla λ_0 , μ_0 taková, že matice

$$R = \lambda_0 P + \mu_0 Q$$

je regulární, tedy $|R| \neq 0$, a zřejmě je $\lambda_0 \mu_0 \neq 0$.
Existují-li regulární matice H,K takové, že platí /30.1.1/, jest

$$(R_1 =) \lambda_0 P_1 + \mu_0 Q_1 = \lambda_0 HPK + \mu_0 HQK =$$
$$= H(\lambda_0 P + \mu_0 Q)K = HRK \ ,$$
$$Q_1 = HQK \ ,$$

takže $|R_1| \neq 0$ a obě matice $QR^{-1}, Q_1R_1^{-1}$ jsou podobné/podle předešlé věty 30.1/.
Jestliže naopak $|R_1| \neq 0$ a QR^{-1}, $Q_1R_1^{-1}$ jsou podobné, existují regulární čtvercové matice H,K řádu n takové, že

$$R_1 = HRK \ , \ Q_1 = HQK \ ,$$

takže $\lambda_0 P_1 + \mu_0 Q_1 = H(\lambda_0 P + \mu_0 Q)K = \lambda_0 HPK + \mu_0 HQK$

$$\mu_0 Q_1 = \mu_0 HQK \ ,$$

Odčítáním obou rovnic obdržíme

$$\lambda_0 P_1 = \lambda_0 HPK \ ,$$

a současně je $Q_1 = HQK$.

S ohledem na nerovnost $\lambda_0 \neq 0$, plyne 30.1.1. Máme tedy tento výsledek:

Věta 30.2: N e c h ť $P,Q;P_1Q_1$ j s o u d v a p á r y m a t i c t é h o ž ř á d u n t a k o v ý c h , ž e

$$|P| = |Q| = |P_1| = |Q_1| = 0 , \quad \text{avšak}$$

$$|\lambda_0 P + \mu_0 Q| \neq 0 \text{ při vhodných } \lambda_0, \mu_0 .$$

P a k e x i s t u j í r e g u l á r n í m a t i c e H,K ř á d u n t a k o v é, ž e p l a t í

$$P_1 = HPK,\ Q_1 = HQK ,$$

když a jen když o b ě m a t i c e $Q(\lambda_0 P + \mu_0 Q)^{-1}$, $Q_1(\lambda_0 P_1 + \mu_0 Q_1)^{-1}$ m a j í s t e j n é k o ř e n y s v ý c h c h a r a k t e r i s t i c k ý c h r o v n i c a s t e j n á c h a r a k t e r i s t i c k á č í s l a p ř í s l u š n á k t é m u ž k o ř e n u .

(31). Přehled o Weierstrassově theorii elementárních dělitelů.

Tento odstavec obsahuje stručný přehled o Weierstrassově theorii elementárních dělitelů. Věty jsou uvedeny většinou bez důkazů.

Definice 31.1.: N e c h ť A,B z n a č í č t v e r c o v é m a t i c e ř á d u n , a m a t i c e A j e r e g u - l á r n í . M n o ž i n a č t v e r c o v ý c h m a t i c ř á d u n t v a r u

$$\lambda A + B , \qquad /31.1.1/$$

k d e λ z n a č í l i b o v o l n é č í s l o , n a z ý v á s e r e g u l á r n í s v a z e k m a t i c u r č e n ý m a t i c e m i A,B .

Nechť pro $k = 1,2,\dots,n$ značí D_k největšího společného dělitele všech minorů k-tého řádu v determinantu $|\lambda A + B|$. Jest tedy D_k polynom v λ stupně $m \geqslant 0$, a zvláště je $|\lambda A + B| = D_n$ polynom stupně n /neboť $|A| \neq 0$ /.

Pro libovolný lineární polynom /základ/ $\lambda - a$ nechť značí h_k exponent jeho nejvyšší mocniny, která je obsažena v polynomu D_k. Jestliže tedy $\lambda - a$ nedělí D_k, jest $h_k = 0$. Jestliže $\lambda - a$ dělí D_k, také $(\lambda - a)^{h_k}$ dělí D_k, avšak $(\lambda - a)^{h_k+1}$ nedělí D_k.

31.1.1. První důležitý poznatek je ten, že pro každý lineární polynom $\lambda - a$ platí

$$h_k \leqq h_{k+1} \qquad k = 1,2,\dots, n-1 \qquad /31.1.2/$$

při čemž znaménko = platí tehdy a jen tehdy, když $h_{k+1} = 0$.

a/ Odtud plyne, že nastane-li při určitém k

$$h_k = 0\,,\ h_{k+1} > 0\,,$$

pak jest $h_1 = h_2 = \dots = h_k = 0,\quad 0 < h_{k+1} < h_{k+2} < \dots < h_n$ /31.1.3/

b/ Dalším důsledkem je, že polynom D_{k+1} je dělitelný polynomem D_k, takže

$$\frac{D_{k+1}}{D_k} \text{ je polynom v } \lambda \quad /\text{pro } k = 1,2,\dots n-1\,/.$$

31.1.2. Důležitou úlohu ve Weierstrassově theorii mají čísla

$$e_1 = h_1;\ e_2 = h_2 - h_1,\ e_3 = h_3 - h_2, \dots,\ e_n = h_n - h_{n-1} \qquad /31.1.4/$$

Podle /31.1.2/ jest $e_k = 0$ jen tehdy, když $h_k = 0$.

Jestliže při určitém k platí

$$e_k = 0\,,\quad e_{k+1} > 0\,,$$

pak je $e_1 = e_2 = \dots = e_k = 0,\ e_{k+1} > 0,\ e_{k+2} > 0, \dots e_n > 0$, a podle /31.1.4/ jest $e_{k+1} + e_{k+2} + \dots + e_n = h_n$. /31.1.5/

Polynomy $(\lambda - a)^{e_{k+1}}, (\lambda - a)^{e_{k+2}}, \dots, (\lambda - a)^{e_n}$ /31.1.6/

se nazývají elementární dělitelé svazku $\lambda A + B$, po příp. determinantu $|\lambda A + B|$, příslušní k základu $\lambda - a$.

Jestliže nějaký lineární polynom nedělí determinant $|\lambda A + B|$, jsou všechna příslušná čísla

$$h_n = h_{n-1} = \ldots = h_1 = 0$$

a také $$e_n = e_{n-1} = \ldots = e_1 = 0 \ .$$

Mohou tedy elementární dělitelé příslušeti pouze k základu $\lambda - a$ dělícímu determinant $|\lambda A + B|$.

Podle /31.1.5/ je součin elementárních dělitelů, příslušných k témuž základu $\lambda - a$, nejvyšší mocnina $(\lambda - a)^{h_m}$, která dělí determinant $|\lambda A + B|$. Součin všech elementárních dělitelů, příslušných ke všem možným základům, je tedy až na multiplikativní konstantu právě polynom $|\lambda A + B|$.

Příklad 31.1.: Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}, \text{ při čemž } a_1 a_2 \neq 0 \ .$$

Pak je $$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 + b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} .$$

Zřejmě je $$|\lambda A + B| = (\lambda a_1 + b_1)^3 (\lambda a_2 + b_2) =$$
$$= a_1^3 a_2 \left(\lambda + \frac{b_1}{a_1}\right)^3 \cdot \left(\lambda + \frac{b_2}{a_2}\right).$$ Předpokládejme, že $\frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_1}{b_1}$.

Pak elementární dělitelé mohou příslušeti pouze k základu

$$\lambda + \frac{b_1}{a_1} \quad \text{anebo} \quad \lambda + \frac{b_2}{a_2} \ .$$

a/ Pro základ $\lambda + \frac{b_1}{a_1}$ je zřejmě

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 2, \quad h_4 = 3 \ ,$$

takže $$e_1 = 0, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 1 \ .$$

Elementární dělitelé jsou $\lambda + \frac{b_1}{a_1}$, $\lambda + \frac{b_1}{a_1}$, $\lambda + \frac{b_1}{a_1}$.

b/ Pro základ $\lambda + \frac{b_2}{a_2}$ jest

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 1 \quad ,$$

takže

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 1 \quad .$$

Elementární dělitelé jsou tedy : $\lambda + \frac{b_2}{a_2}$.

Všichni elementární dělitelé jsou tedy

$$\lambda + \frac{b_1}{a_1}, \quad \lambda + \frac{b_1}{a_1}, \quad \lambda + \frac{b_1}{a_1}, \quad \lambda + \frac{b_2}{a_2} \quad ,$$

a jejich součin jest $\left(\lambda + \frac{b_1}{a_1}\right)^3 . \left(\lambda + \frac{b_2}{a_2}\right) = \frac{1}{a_1^3 a_2} . |\lambda A + B|$.

31.2 Nechť polynom $\lambda - a$ dělí $|\lambda A + B|$ a čísla h_k $(k = 1, \ldots, n)$ nechť mají hořejší význam.
Pak všechny minory k-řádu v $|\lambda A + B|$ jsou dělitelny alespoň h_k-tou mocninou polynomu $\lambda - a$ a alespoň jeden z nich jest dělitelný právě touto mocninou.

Každý minor k-tého řádu v determinantu $|\lambda A + B|$, který je dělitelný právě polynomem $(\lambda - a)^{h_k}$, nazývá se regulární minor /subdeterminant/ k-tého řádu vzhledem k $\lambda - a$/.

Lze dokázati tyto důležité věty:

Věta 31.2.1: Platí nerovnosti $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_n$.

Věta 31.2.2: Každý regulární subdeterminant $(1 <) k (\leq n)$-tého řádu determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k základu $\lambda - a$ obsahuje alespoň jeden regulární subdeterminant $(k-1)$-ho řádu vzhledem k základu $\lambda - a$ jako minor.

Věta 31.2.3: Každý regulární subdeterminant $(1 \leq) k-1 (< n)$-tého řádu determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k základu $\lambda - a$ je obsažen jako minor alespoň v jednom regulárním subdeterminantu k-tého řádu determinantu $|\lambda A + B|$ vzhledem k $\lambda - a$.

31.3: S použitím předešlých vět dá se dokázati tato Weierstrassova věta .

Věta 31.3: Nechť A, B jsou libovolné čtvercové matice téhož řádu n a nechť $|A| \neq 0$.

Nechť $(\lambda - a_1)^{e_1}, (\lambda - a_2)^{e_2}, \ldots\ldots, (\lambda - a_m)^{e_m}$

jsou všichni elementární dělitelé determinantu $|\lambda A + B|$, takže $e_1 + e_2 + \ldots + e_m = n$ /čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nejsou nutně vzájemně různá/.

Existují regulární čtvercové matice řádu n takové, že

$$HAK = E$$

a současně jest

$$HBK = \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_2 \\ \\ \vdots \\ \\ e_m \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & a_1 \end{matrix} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} a_2 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_2 \end{matrix} & \ldots & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \begin{matrix} a_m & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_m & 1 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_m & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_m \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccc} \longleftarrow e_1 \longrightarrow & \longleftarrow e_2 \longrightarrow & & \longleftarrow e_m \longrightarrow \end{array}$$

Všimněme si, že matice HBK závisí jenom na kořenech a exponentech elementárních dělitelů svazku $\lambda A + B$.

Matice $\lambda E + HBK$ je t.zv. W e i e r s t r a s s ů v k a n o n i c k ý t v a r s v a z k u $\lambda A + B$.

31.4. Věta 31.3 má četné aplikace. Uveďme následující větu, která dává jiné řešení problému /odst. 30/ současné transformace dvou matic.

Věta 31.4: N e c h ť P, Q; P_1, Q_1 z n a č í d v a p á r y č t v e r c o v ý c h m a t i c t é h o ž ř á d u n, a n e c h ť n a p ř. $|P| \neq 0$. P a k e x i s t u j í r e g u l á r n í m a t i c e H, K ř á d u n t a k o v é, ž e p l a t í

$$P_1 = HPK \,, \quad Q_1 = HQK \qquad /31.4.1/$$

t e h d y a j e n t e h d y, k d y ž $|P_1| \neq 0$ a o b a s v a z k y m a t i c $\lambda P - Q$, $\lambda P_1 - Q_1$ m a j í v š e c h n y e l e m e n t á r n í d ě l i t e l e s t e j n é.

Postup důkazu. 1/ Podmínka je nutná. Vskutku, existují-li regulární matice H, K vlastností /31.4.1/, plyne především z rovnice

$$|P_1| = |H| . |P| . |K| \,,$$

že

$$|P_1| \neq 0$$

Dále pro libovolné číslo λ je

$$\lambda P_1 - Q_1 = H(\lambda P - Q) K \quad .$$

Z této rovnosti plyne $|\lambda P_1 - Q_1| = |H| . |K| . |\lambda P - Q| = \text{konst.} |\lambda P - Q|$, takže základy elementárních dělitelů obou svazků $\lambda P - Q$, $\lambda P_1 - Q_1$ jsou stejné, a dá se odvoditi i rovnost jejich exponentů /důkaz vynecháváme.)

2/ Ukažme nyní, že podmínka s t a č í.

Nechť tedy $|P| . |P_1| \neq 0$ a nechť

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, \ (\lambda - a_2)^{e_2}, \ \ldots, (\lambda - a_m)^{e_m}$$

jsou elementární dělitele obou svazků $\lambda P - Q$, $\lambda P_1 - Q_1$;

Podle věty 31.3 existují regulární čtvercové matice H_1, K_1; H_2, K_2 řádu n takové, že

$$H_1PK_1 = E\ , \qquad H_1QK_1 = M$$

$$H_2P_1K_2 = E\ , \qquad H_2QK_2 = M\ ,$$

při čemž M značí matici kanonického tvaru. Odtud plyne

$$H_1PK_1 = H_2P_1K_2\ , \qquad H_1QK_1 = H_2Q_1K_2\ ,$$

a odtud
$$P_1 = (H_2^{-1}H_1)P\ (K_1K_2^{-1})$$

$$Q_1 = (H_2^{-1}H_1)Q\ (K_1K_2^{-2})$$

Existují tedy regulární čtvercové matice $H = H_2^{-1}H_1$, $K = K_1K_2^{-1}$ řádu n takové, že $P_1 = HPK$, $Q_1 = HQK$.

Věta 31.5. /je důsledkem věty předešlé/ :

Dvě čtvercové matice téhož řádu n jsou podobné, když a jen když každý elementární dělitel charakt. determinantu jedné, jest elementárním dělitelem charakt. determinantu druhé matice /t.j. když a jen když charakt. determinanty obou matic mají stejné elementární dělitele/.

Důkaz. 1/ Ukažme nejprve, že podmínka je nutná .
Nechť matice A, B téhož řádu n jsou podobné. Pak existuje regulární matice Q taková, že

$$B = Q^{-1}AQ$$

Současně platí $$E = Q^{-1}EQ\ , \qquad |E| = 1\ (\neq 0)$$

Tedy podle předešlé věty oba determinanty $|\lambda E-A|$, $|\lambda E-B|$ mají stejné elementární dělitele.

Avšak $|\lambda E-A| = (-1)^n.|A-\lambda E|$, $|\lambda E-B| = (-1)^n.|B-\lambda E|$,

takže též $|A-\lambda E|$, $|B-\lambda E|$ mají stejné elementární dělitele.

Avšak $|A-\lambda E|$, $|B-\lambda E|$ jsou charakteristické determinanty matic A, B .

2/ **Ukažme nyní, že podmínka s t a č í .**

Nechť tedy $|A-\lambda E|$, $|B-\lambda E|$ **mají stejné elementární dělitele.** **Pak také** $|\lambda E-A|$, $|\lambda E-B|$ **mají stejné elem. dělitele. Tedy podle věty 31.4. existují regulární matice H, K takové, že**

$$E = HEK \ , \qquad B = HAK \ .$$

Z první relace vychází $$H = K^{-1} \ ,$$

takže $$B = K^{-1} AK \ ;$$

jsou tedy matice A, B podobné.

P ř í k l a d 31.5.1 : Budiž dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle výpočtu na str.66 je její charakt. determinant

$$|\lambda E - A| = \lambda^4$$

Minory 3. stupně jsou /viz str.66/

$$\begin{array}{llll} \lambda(\lambda^2+4) \ , & 2\lambda^2 \ , & 2\lambda^2 \ , & 8\lambda \\ \lambda(\lambda+2) \ , & \lambda^2(\lambda+1), & \lambda^2 \ , & 2\lambda(\lambda+2) \\ \lambda(\lambda-2) \ , & -\lambda^2 \ , & \lambda^2(\lambda-1), & 2\lambda(\lambda-2) \\ -2\lambda \ , & -\lambda^2 \ , & -\lambda^2 \ , & \lambda(\lambda^2-4) \end{array}$$

Elementární dělitelé charakt. determinantu patří jenom k **základu** λ .

Pro tento základ je zřejmě .

$$h_1 = 0, \ h_2 = 0, \ h_3 = 1, \ h_4 = 4 \ ,$$

takže $$e_1 = 0, \ e_2 = 0, \ e_3 = 1, \ e_4 = 3 \ .$$

Elementární dělitelé jsou tedy : λ , λ^3 .

Podle věty 31.3 existují tedy regulární matice H, K takové, že

$$HEK = E \ ,$$

$$HAK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existuje tedy regulární matice K taková, že

$$AK = K \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abychom ji určili, označme

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}$$

Pak z následující relace po vynásobení obdržíme srovnáním stejnolehlých prvků na obou stranách celkem 16 lineárních rovnic o 16 neznámých: $k_{11}, k_{12}, k_{13}, \ldots, k_{44}$. /Obecná theorie nám zaručuje, že se tyto rovnice dají řešiti netriviálně, t.j. hodnotami neznámých, které nejsou všechny 0/. Tedy jest

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}$$

a máme

(1) $k_{31} - k_{21} = 0$ $\qquad$ $-2k_{11} + k_{21} + k_{31} - k_{41} = 0$ (5)

(2) $k_{32} - k_{22} = 0$ $\qquad$ $-2k_{12} + k_{22} + k_{32} - k_{42} = 0$ (6)

(3) $k_{33} - k_{23} = k_{12}$ $\qquad$ $-2k_{13} + k_{23} + k_{33} - k_{43} = k_{22}$ (7)

(4) $k_{34} - k_{24} = k_{13}$ $\qquad$ $-2k_{14} + k_{24} + k_{34} - k_{44} = k_{23}$ (8)

(13) $2k_{21} - 2k_{31} = 0$ $\qquad$ $2k_{11} - k_{21} - k_{31} + k_{41} = 0$ (9)

(14) $2k_{22} - 2k_{32} = 0$ $\qquad$ $2k_{12} - k_{22} - k_{32} + k_{42} = 0$ (10)

(15) $2k_{23} - 2k_{33} = k_{42}$ $\qquad$ $2k_{13} - k_{23} - k_{33} + k_{43} = k_{32}$ (11)

(16) $2k_{24} - 2k_{34} = k_{43}$ $\qquad$ $2k_{14} - k_{24} - k_{34} + k_{44} = k_{33}$ (12)

Vidíme, že rovnice (9),(10),(13),(14) jsou tytéž jako (5),(6),(1),(2), takže máme dále

$$(1^*)\quad k_{31} = k_{21} \qquad k_{41} = 2k_{21} - 2k_{11} \quad (5^*)$$

$$(2^*)\quad k_{32} = k_{22} \qquad k_{42} = 2k_{22} - 2k_{12} \quad (6^*)$$

$$(3^*)\quad k_{33} = k_{23}+k_{12} \qquad k_{43} = -2k_{13}+2k_{23}+k_{12}-k_{22} \quad (7^*)$$

$$(4^*)\quad k_{34} = k_{24}+k_{13} \qquad k_{44} = -2k_{14}+2k_{24}+k_{13}-k_{23} \quad (8^*)$$

$$k_{43} = -2k_{13}+2k_{23}+k_{12}+k_{22} \quad (9^*)$$

$$k_{44} = -2k_{14}+2k_{24}+k_{13}+k_{23}+k_{12} \quad (10^*)$$

$$k_{42} = 2k_{23}-2k_{23}-2k_{12} \quad (11^*)$$

$$k_{43} = 2k_{24}-2k_{24}-2k_{13} \quad (12^*)$$

Z rovnice (9^*) a (7^*) plyne $k_{22} = 0$,

,, (8^*) a (10^*) ,, $2k_{23} = -k_{12}$.

Dosaďme tyto dva výsledky do předešlých rovnic. Máme pak

$$k_{31} = k_{21} \qquad k_{41} = 2k_{21} - 2k_{11}$$

$$k_{22} = 0 = k_{32} \qquad k_{42} = -2k_{12}$$

$$k_{33} = \frac{1}{2}k_{12} \qquad k_{43} = -2k_{13}$$

$$k_{34} = k_{24}+k_{13} \qquad k_{44} = -2k_{14}+2k_{24}+k_{13}+\frac{1}{2}k_{12}$$

$$k_{23} = -\frac{1}{2}k_{12}$$

Máme tedy 10 rovnic o 16 neznámých. Můžeme si tedy celkem 6 veličin zvolit /Ovšem tak, aby matice K byla regulární/.

Zvolme si tedy na př.:

$$k_{11}= 0\ ,\quad k_{12}= 2,\quad k_{13}= 0,\quad k_{14}= 1,\quad k_{21}= 1,\quad k_{24}= 0\ .$$

Pak matice K jest

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ a je regulární, neboť $|K| = -4$.

32. Některé aplikace předešlé theorie .

32.1. Řešení systému lineárních homogenních diferenciálních rovnic. Mějme systém lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \quad ,\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \quad ,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \quad ,
\end{aligned}
\qquad /1/
$$

kde a_{ij} značí konstanty.

Označme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} , \quad (y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \quad (y') = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} .$$

Pak můžeme psáti daný systém /1/ ve tvaru

$$(y') = A.(y) \qquad /1a/$$

Jde o vyhledání obecného řešení systému /1/. Metoda, kterou vyložíme, záleží v tom, že místo neznámých funkcí $y_1, \dots, y_n$ zavedeme jejich lineární kombinace s konstantními koeficienty, totiž $z_1, \dots, z_n$, při čemž tyto kombinace zvolíme tak, aby hověly systému difer. rovnic pokud možno jednoduchého tvaru. Řešením tohoto nového systému obdržíme funkce $z_1, \dots, z_n$. Nuže, zaveďme lineární kombinace $z_1, z_2, \dots, z_n$ neznámých funkcí $y_1, \dots, y_n$ vzorci

$$
\begin{aligned}
y_1 &= k_{11}z_1 + k_{12}z_2 + \dots + k_{1n}z_n \quad ,\\
y_2 &= k_{21}z_1 + k_{22}z_2 + \dots + k_{2n}z_n \quad ,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= k_{n1}z_1 + k_{n2}z_2 + \dots + k_{nn}z_n \quad ,
\end{aligned}
\qquad /2/
$$

při čemž o konstantách k_{ij} především jenom předpokládáme, že matice

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots\dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots\dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$ je regulární.

Lineární substituci /2/ můžeme psáti také ve tvaru

$$(y) = K.(z), \quad \text{kde} \quad (z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Odtud a z rovnice /1a/ plyne

$$K.(z') = AK.(z)$$

a odtud $$(z') = K^{-1}AK.(z) \qquad /1b/$$

Podle předcházející theorie můžeme zvoliti matici K tak,aby matice $K^{-1}AK$ měla kanonický tvar.Pak jest

$$K^{-1}AK = \begin{array}{rl}
\begin{array}{r} e_1\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\ e_2\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\ \vdots \end{array} &
\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} c_1 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & c_1 & 1\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots c_1 \end{matrix} & 0 & \cdots\cdots \\ \hline
0 & \begin{matrix} c_2 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & c_2 & 1\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots c_2 \end{matrix} & \cdots\cdots \\ \hline
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}\right)}_{n}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n
\end{array}$$

při čemž $c_1, c_2, \ldots, c_m$ značí kořeny charakteristické rovnice matice A.

Vychází tedy ze vztahu /1b/ po vynásobení

$$\begin{aligned}
z_1' &= c_1 z_1 + z_2 \\
z_2' &= \qquad c_1 z_2 + z_3 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
z_{e_1}' &= \qquad\qquad c_1 z_{e_1} \\
z_{e_1+1}' &= c_2 z_{e_1+1} + z_{e_1+2} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
z_{e_1+e_2}' &= \qquad\qquad c_2 z_{e_1+e_2} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že se tento systém difer.rovnic dá snadno řešiti. A sice jsou dif.rovnice pro funkce $z_{e_1}, z_{e_1+e_2}, \dots, z_{e_1+e_2+\dots+e_m}$ homogenní dif.rovnice I. řádu, z nichž lze bezprostředně tyto funkce vypočísti. Pomocí nich můžeme pak řešiti postupně ostatní dif.rovnice, které jsou, jak je patrno, vesměs dif.rovnice lineární, nehomogenní, prvního řádu. Tím určíme funkce $z_1, z_2, \dots, z_n$ a ze vztahů /2/ obdržíme pak funkce $y_1, y_2, \dots y_n$.

32.1.1. Je-li na př. dán systém lineárních difer.rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad\quad\;\; - y_2 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ y_4' &= \quad\quad\; 2y_2 - 2y_3 \end{aligned} \qquad /1c/$$

pak matice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

je totožná s maticí A na str.111. Zvolíme matici K, která převádí matici A na kanonický tvar. Takovou maticí jest, jak jsme viděli na str.113, na př. matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a máme

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární substitucí o matici K, t.j. substitucí

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \phantom{z_1 - {}} 2z_2 + z_4 \\
y_2 &= z_1 - z_3 \\
y_3 &= z_1 + z_3 \\
y_4 &= 2z_1 - 4z_2 - z_4 ,
\end{aligned}
$$

přejde tedy daný systém v systém

$$z_1' = 0, \quad z_2' = z_3, \quad z_3' = z_4, \quad z_4' = 0$$

Jeho obecné řešení jest

$$
\begin{aligned}
z_1 &= C_1 \\
z_2 &= C_2 + C_3 x + \frac{1}{2} C_4 x^2 \\
z_3 &= C_3 + C_4 x \\
z_4 &= C_4 ,
\end{aligned}
$$

kde C_1, C_2, C_3, C_4 jsou konstanty.

A odtud plyne obecné řešení systému /1a/:

$$y_1 = 2C_2 + 2C_3 x + C_4(x^2+1) \qquad y_3 = C_1 + C_3 + C_4 x$$

$$y_2 = C_1 - C_3 - C_4 x \qquad y_4 = 2C_1 - 4C_2 - 4C_3 x - C_4(2x^2+1).$$

32.2 Klasifikace regulárních párů matic.

Pojednáme ještě stručně o klasifikaci regulárních párů matic, která se zakládá na předcházející Weierstrassově theorii. Především platí tato věta, kterou uvádím bez důkazu:

Věta 32.2.1: Nechť $a_1, a_2, \dots, a_m$ značí libovolná čísla, $e_1, e_2, \dots, e_m$ libovolná přirozená čísla a nechť $e_1 + e_2 + \dots + e_m = n$. Pak svazek matic $\lambda E - M$ řádu n, kde M značí matici kanonického tvaru /uvedenou na str. 108/, má elementární dělitele právě

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, \ (\lambda - a_2)^{e_2}, \ \dots\dots, \ (\lambda - a_m)^{e_m} .$$

Podle této věty existují tedy svazky matic libovolného řádu n, které mají dané elementární dělitele.

D e f i n i c e : R e g u l á r n í m p á r e m m a t i c , rozumíme pár čtvercových matic téhož řádu n, z nichž alespoň jedna je regulární. Obě matice takového páru myslíme si uspořádány tak, že první matice je regulární.

32.2.2. Nechť A,B je regulární pár matic řádu n a nechť polynomy

$$\begin{array}{l} (\lambda - a_1)^{e'_1}, \ldots\ldots, (\lambda - a_1)^{e'_{k_1}}, \\ (\lambda - a_2)^{e''_1}, \ldots\ldots, (\lambda - a_2)^{e''_{k_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda - a_h)^{e^{(h)}_1}, \ldots\ldots, (\lambda - a_h)^{e^{(h)}_{k_h}} \end{array}$$

jsou všichni elementární dělitelé svazku $\lambda A-B$, při čemž $a_1, a_2, \ldots, a_h$ jsou vzájemně různé.

Označení zvolme takové, že exponenty e, příslušné k témuž základu, s rostoucím indexem nerostou, takže jest

$e'_1 \geqq e'_2 \geqq \ldots\ldots \geqq e'_{k_1}$, atd., a mimo to $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots\ldots \geqq k_h$.

Jest ovšem

$$(e'_1 + \ldots + e'_{k_1}) + (e''_1 + \ldots + e''_{k_2}) + \ldots + (e^{(h)}_1 + \ldots + e^{(h)}_{k_h}) = n \qquad /32.3.2/$$

Pravíme, že regulární pár matic A,B má c h a r a k t e r i s t i k u

$$[(e'_1, \ldots, e'_{k_1}), (e''_1, \ldots, e''_{k_2}), \ldots, (e^{(h)}_1, \ldots, e^{h}_{k_h})] ,$$

Každý regulární pár matic A,B má tedy jistou charakteristiku a tato udává: 1/ počet vzájemně různých základů elementárních dělitelů svazku $\lambda A-B$, 2/ exponenty elementárních dělitelů příslušných ke každému základu. Na př. regulární pár matic 4. řádu : E,A, kde A je matice uvedená na str. 111, má charakteristiku $[(3,1)]$.

Nechť nyní n značí libovolné přirozené číslo a uvažujme o množině všech regulárních párů matic n-tého řádu. Každý pár má jistou charakteristiku,avšak v z á j e m n ě r ů z n ý c h c h a r a k t e r i s t i k j e s t j e n o m k o - n e č n ý p o č e t . Vskutku,čísla každé charakteristiky jsou přirozená a podle /23.3.2/ jest jejich součet n . Odtud plyne,že charakteristik je nejvýše tolik,kolik je všech možných rozkladů čísla n v přirozené sčítance.Těchto rozkladů je ovšem konečný počet a tedy i všech vzájemně různých charakteristik je konečný počet.

Mysleme si všechny rozklady čísla n v přirozené sčítance uspořádány tak,že na prvním místě je rozklad obsahující jenom jednoho sčítance /totiž n /, pak rozklady o dvou sčítancích, pak o třech sčítancích, atd.,až konečně rozklad o n sčítancích /totiž $\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}$ / .

Na př.v případě $n = 4$ máme tyto rozklady

$$4;\ 3,1;\ 2,2;\ 2,1,1;\ 1,1,1,1\ .$$

Zařaďme nyní čísla každého rozkladu do $h\ (= 1,2,\ldots, n)$ skupin,pokud to jde,a uspořádejme je v každé skupině tak,aby nerostla.Mimoto uspořádejme tyto skupiny podle počtu čísel tak, že první skupina obsahuje nejvíce čísel,atd.Počet všech možných charakteristik regulárních párů matic n-tého řádu jest zřejmě nejvýše roven počtu těchto uspořádaných skupin.

Na př.v případě $n = 4$ máme tyto skupiny:

Pro $h = 1$: $4\ ;\ (3,1)\ ;\ (2,2)\ ;\ (2,1,1)\ ;\ (1,1,1,1)$.

Pro $h = 2$: $3,1\ ;\ 2,2\ ;\ (2,1),1;\ (1,1),2\ ;\ (1,1),(1,1);\ (1,1,1),1.$

Pro $h = 3$: $2,1,1\ ;\ (1,1),\ 1,1$.

Pro $h = 4$: $1,1,1,1$.

Tedy celkem 14 skupin .

Vraťme se opět k obecnému n . Z věty 32.2.1 plyne,že existují regulární páry matic řádu n , které mají předepsanou charakteristiku.Odtud vidíme,že všech možných charakteristik je právě tolik, kolik je skupin, o nichž jsme výše mluvili. Tak na př. každý regulární pár matic ~~n~~ 4-tého řádu má jednu z těchto charakteristik

$[4]$, $[(3,1)]$, $[(2,2)]$, $[(2,1,1)]$, $[(1,1,1,1)]$;

$[3,1]$, $[2,2]$, $[(2,1),1]$, $[(1,1),2]$, $[(1,1),(1,1)]$, $[(1,1,1),1]$;

$[2,1,1]$, $[(1,1),1,1]$; $[1,1,1,1]$.

Nazveme t ř í d o u r e g u l á r n í c h p á r ů matic n-tého řádu množinu těch párů, které mají stejnou charakteristiku. Množina všech regulárních párů matic n-tého řádu se tedy rozpadá v konečný počet tříd, při čemž všechny páry téže třídy se dají regulárními maticemi převésti na stejný kanonický tvar. Na př. každý regulární pár matic 4-tého řádu se dá převésti na jeden z párů tohoto tvaru / E značí jednotkovou matici řádu 4 /:

1/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ 2/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$

3/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ 4/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$,

5/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ 6/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$.

7/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ 8/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$

9/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ 10/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$

11/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ 12/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$,

13/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ 14/ E ; $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$.

Tyto páry mají charakteristiky, které jsme již výše uvedli. Na př. pár 1/ má charakteristiku $[4]$, pár 2/ má charakteristiku $[(3,1)]$, atd. Zdůrazněme, že písmena $\underline{a}$ s různými indexy značí ovšem čísla různá.

Vraťme se k obecnému n. Viděli jsme, že se všechny regulární páry matic řádu n, které patří do téže třídy, dají převésti regulárními maticemi na týž kanonický tvar. Ovšem čísla $\underline{a}$, vyskytující se v kanonickém tvaru jednoho páru, nejsou rovna číslům $\underline{a}$ vyskytujícím se v kanonickém tvaru páru druhého. To zřejmě souvisí s tím, že charakteristika každého regulárního páru A,B udává počet vzájemně různých základů elementárních dělitelů svazku $\lambda A-B$ a exponenty elementárních dělitelů patřících k jednotlivým základům, avšak neudává tyto základy, t.j. příslušná čísla $\underline{a}$.

Na př. regulární pár matic řádu 4, totiž E,A, kde A značí matici uvedenou na str. 111, má charakteristiku $[(3,1)]$

a jeho kanonický tvar jest

$$E\,,\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zde je $a_1 = 0$.

Regulární pár matic

$$E\,;\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

který je již v kanonickém tvaru, má tutéž charakteristiku $[(3,1)]$, a tedy patří do téže třídy jako pár E, A. Zde však jest $a_1 = 1$.

Knižní literatura o maticích.

B. Bydžovský, Základy theorie determinantů a matic a jich užití. /Praha, 1930/

P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementartheiler /Leipzig, 1899/

C. C. Mac Duffee, The theory of matrices /Berlin, 1933/

J.H.M. Wederburn, Lectures on matrices /New York, 1934/.

-ooOoo-

Opravy a doplňky .

[Základní číslice značí stránku, index k nahoře /dole/ značí k-tý řádek shora /zdola/.]

Str. 3^{10} : řádu $n > 1$ Str. 4_3 : $(A')'$

,, 6_{10} : $a_{mn}+b_{mn}$(místo $a_{m1}+..$) ,, 8^2 : k další matici $\underline{B}$ typu

,, 9_{13} : jakákoliv čtvercová matice.. Str.10^3: $k = 1,2,\dots,n$

,, $10^{11,17}$: (Nad symbolem Σ má býti n místo u).

,, 11_6 : $u'_{rj}=\dots$(místo $n'_{rj}=..$).Str.13_2: platí zákon komutativní..

,, 16^8 : rovnic o n neznámých ,, 17^8: $\lambda_{11}x_n^{(1)}+\dots+\lambda_{n-m,1}x_n^{(n-m)}+\dots$

,, 17_2 : řádcích a m sloupcích ,, 19_{11}: determinant $|A|$,

,, 23_{13} : $\frac{|\mathrm{Adj}\ A|}{\dots\dots}=$,, 28^2 : $x_1=y_1,\dots,x_n=y_n$.

,, 26_{11} : substitucí o matici A ., ,, 29^{15}: ve vektor $\lambda(x)$

,, 31^{10} :(Doplň u vektoru závorky),, 31^{11}: $(x)'.(x) = 2$.

,, 32_9 : V determinantu $|R|$,, 33_5 :(Doplň na okraji /1/)

,, 35^2 : matice $(R-\lambda E)^{-1}$

,, 35/uprostřed/ :(Doplň u třetího determinantu chybějící λ na: $r_{11}-\lambda$, $r_{22}-\lambda$

,, 42^{10} : $\bar{U}'U$ (místo $U'U$) Str.42_7: za (x) vektor

,, 44_2 :$(\lambda-\lambda_0)^{-\alpha}$,(místo$(\alpha-\alpha_0)^{-\alpha}$) ,, 45^9: $\lambda_0 = \alpha + i\beta$

,, 45^{11}: matice U . ,, 46_{12}: $\overleftrightarrow{H}'=i(E-U)(U+E)^{-1}= H$,

,, 47^2 : pro niž $|U+E| \neq 0$. ,, 47^7: utvořená matice

,, 48_{12}: čísla π . ,, 48_8: že $|E-iH| \neq 0$

,, 56_{11}: $|f(A)|=f(\lambda_1).f(\lambda_2)..f(\lambda_n)$ .Str.58_{13}: $\dots+a_rA_r = 0$,

,, 60^4 :$(\dots)A^{p-1}+(\dots)A^{p-2}+\dots$ Str.60^{14}: Pak matice $\varphi(A)$ je..

,, 61_6 :$\varphi(\lambda)=\dots=(\dots).(\dots)-a_{12}a_{21}$.

,, 61_4 : (V matici A^2 má býti první člen: $a_{11}^2 + a_{21}a_{12}\dots$)

,, 62^4 : (V matici $\varphi(A)$ má býti poslední člen $..+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$)

Str. 64^3: $n-1-\alpha$. Str. 73^9: vektory $(y_{\beta+1})\dots(y_\gamma)$

,, 74_{12}: že $f(A).(x_j)=0$,, 79_3: je alespoň jeden minor..

,, 79_5: Protože 0 je α-násobný.. Str. 80^4 :pro $k=0$. Pro $k\geq 1$..

,, 84^{13}: (Mezi řádek 13 a 14 vsuň řádek teček ....)

,, 84_3: matice A splňuje Str. 86^2: pro $i=1,2,\dots,s$.

,, 86_8: $\dots,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=\alpha$,, 87^{11}: Označme pro $m=\dots$

,, 88_7: vektory řádu ,, 89_{10}: 2.pro $1\leq k\leq r-1\geq 1$

,, $90^{5,7,9}$:(Doplň u vektorů závorky) Str. 91^6: $x^{k+1}_{\alpha_{r-k+1}+1}$, ...

,, 92^8: $A^{r-k-\mu}[\dots]=\dots=(0)$ Str. 92_4: $\dots a_{r\gamma}$ nejsou rovny 0 .

,, 92_8: $\dots A^{r-k-1}(x^{k+1}_{\alpha_{r-k}})$,, 94^4: $\dots;(b_1),\dots,(b_\beta);\dots$

,, $94_{10,9}$: $n_\nu[\dots]=n_\nu[(\dots)+(\dots).E].(b_\nu)=$

$$= n_\nu[(\dots).(b_\nu)]+n_\nu\,.[(\dots).(b_\nu)] ,$$

,, $94_{5,6}$: $=(\dots).\{\dots\dots+n_\beta\,.(b_\beta)\}+n_1\,(b_{\beta_{r_2}+1})+\dots$

,, 98^{12}:(Doplň závorky u vektoru $(x^r_{\alpha_1})$. Str. 98_2: $\dots=(0)$

,, 100^{11}: $(\bar b_1),\dots,(\bar b_\beta)$; Str. 105^2: nejvyšší mocniny,

,, 110^8: $Q_1=(H_2^{-1}H_1)Q(K_1K_2^{-1})$,, 111^{10}:(První řádek v A jest 0-1 1 0) .

,, 117^{14}: $y_1=2C_2+2C_3x+C_4(x^2+1)$

,, 119^5:/Má býti/:Odtud plyne,že charakteristik je nejvýše $(2^{2^n-1}-1)$-krát tolik,kolik je.........

,, 120_2: /Matice 8 má míti třetí řádek: 0 0 a_1 0 ./

,, 122_1: Wedderburn /místo Wederburn/

,, 87_5: Protože $\gamma_k>\gamma_{k-1}$ /místo $\geq$ /.