24. Invariantní (normální) podgrupy

24.1. Definice

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ libovolné podgrupy v $\mathfrak{G}$. Když levá a pravá třída každého prvku $a \in \mathfrak{A}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$ splývají, když tedy platí rovnost $a\mathfrak{B} = \mathfrak{B}a$, pravíme, že podgrupa $\mathfrak{B}$ je *invariantní* neboli *normální v grupě* $\mathfrak{A}$. V tomto případě je levý rozklad grupy $\mathfrak{A}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{B}$ týž jako pravý rozklad; tyto rozklady tedy splývají v jistý rozklad grupy $\mathfrak{A}$, tzv. *rozklad vytvořený podgrupou* $\mathfrak{B}$, takže $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/_p\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

V úvahách o invariantních podgrupách ležících v téže podgrupě $\mathfrak{A}$ se můžeme omezit na případ $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$.

24.2. Základní vlastnosti invariantních podgrup

V grupě $\mathfrak{G}$ existují alespoň dvě (popř. splývající) invariantní podgrupy: Největší podgrupa, totožná s $\mathfrak{G}$, a nejmenší podgrupa $\{\underline{1}\}$, skládající se z jediného prvku $\underline{1} \in \mathfrak{G}$. Toto jsou tzv. *krajní* neboli *extrémní invariantní podgrupy v* $\mathfrak{G}$. V grupách mohou existovat podgrupy, které nejsou invariantní; např. podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{S}_3$, skládající se z obou permutací $\underline{1}$, $\boldsymbol{f}$ (označení jako v **22.1**) není invariantní v $\mathfrak{S}_3$, neboť, jak jsme v **22.1** viděli, máme např. $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, takže $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}\boldsymbol{a}$.

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$. Když je podgrupa $\mathfrak{B}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak ovšem má touž vlastnost v $\mathfrak{A}$. Když však naopak je podgrupa $\mathfrak{B}$ invariantní v $\mathfrak{A}$, nemusí být invariantní v $\mathfrak{G}$, neboť rovnost $x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x$ se může vztahovat na všechny prvky x v $\mathfrak{A}$, aniž platí pro všechny prvky v $\mathfrak{G}$. Když např. nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ není invariantní v $\mathfrak{G}$, je sice invariantní v $\mathfrak{A}$, ale nikoli v $\mathfrak{G}$.

Když je podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak je zaměnitelná s každým komplexem $C \subset \mathfrak{G}$. Vskutku, v uvedeném případě máme $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$ pro každý prvek $x \in \mathfrak{G}$, a tedy i pro každý prvek $x \in C$. Z toho plyne $C\mathfrak{A} = \mathfrak{A}C$. Zejména vidíme, že každé dvě podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$, z nichž jedna je v $\mathfrak{G}$ invariantní, jsou vzájemně zaměnitelné.

Když naopak jsou nějaké podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$ vzájemně zaměnitelné, pak nemusí být některá z nich invariantní v $\mathfrak{G}$. Tato situace je např. v případě, když $\mathfrak{A}$ není invariantní v $\mathfrak{G}$ a když $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$.

Dále platí tato věta:

Když jsou podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ *invariantní v* $\mathfrak{G}$, *pak také průnik* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *a součin* $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ *jsou invariantní podgrupy v* $\mathfrak{G}$.

Vskutku, když předpoklad je splněn, platí pro každý prvek $x \in \mathfrak{G}$ rovnost $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$, $x\mathfrak{C} = \mathfrak{C}x$. Z nich soudíme, se zřetelem na **20.2.**6 a k obdobné větě pro pravé třídy, že platí tyto rovnosti: $x(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}) = x\mathfrak{A} \cap x\mathfrak{C} = \mathfrak{A}x \cap \mathfrak{C}x = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,x$. Tím je zjištěno, že podgrupa $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$. Dále soudíme se zřetelem na výsledky v **12.9.**8, že platí vzorce: $x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (x\mathfrak{A})\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}x)\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(x\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}x) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})x$; z nich plyne, že podgrupa $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$.

Z poznatku, že každé dvě invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ jsou vzájemně zaměnitelné a z výsledků o vlastnostech vzájemně zaměnitelných podgrup (**22.2**) plyne o invariantních podgrupách řada výsledků. Uvedeme jenom tyto věty:

1. *Věta Dedekindova-Oreova. Pro každé tři invariantní podgrupy* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ *v grupě* $\mathfrak{G}$ *platí rovnost*:

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}\,.$$

2. *Systém všech invariantních podgrup v grupě* $\mathfrak{G}$ *je vzhledem k průnikům a součinům uzavřený a tvoří spolu s násobeními, definovanými tvořením průniků a součinů, modulární svaz s krajními prvky.*

24.3. Vytvořující rozklady na grupách

1. *Věta první.* Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Jak jsme viděli v odst. **21.1**, vytvořuje podgrupa $\mathfrak{A}$ levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a pravý rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$. Položme si otázku, zda např. levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ může být vytvořující.

Předpokládejme nejprve, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ vytvořující je, a uvažujme o dvou libovolných prvcích $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, takže p, q značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$. Podle definice vytvořujícího rozkladu existuje prvek $r\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ takový, že platí vztah

$$p\mathfrak{A}\,.\,q\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}\,.$$

Z tohoto vztahu plyne zejména $pq\mathfrak{A} = (p\underline{1})\,.\,q\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}$, tedy $pq\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}$, a odtud opět $pq = pq\,.\,\underline{1} \in r\mathfrak{A}$, takže podle **20.2.**1 a **20.2.**4 máme $r\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}$. Vychází tedy především vztah $p\mathfrak{A}\,.\,q\mathfrak{A} \subset pq\mathfrak{A}$. Každý prvek v levé třídě $pq\mathfrak{A}$ je součinem $pq\,.\,x$ prvku pq s některým prvkem $x \in \mathfrak{A}$. Zřejmě platí vztahy $pqx = (p\underline{1})(qx) \in p\mathfrak{A}\,.\,q\mathfrak{A}$; odtud plyne, že současně je $p\mathfrak{A}\,.\,q\mathfrak{A} \subset pq\mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$p\mathfrak{A}\,.\,q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}\,, \tag{1}$$

tj. součin levé třídy $p\mathfrak{A}$ s levou třídou $q\mathfrak{A}$ je levá třída $pq\mathfrak{A}$.

Z rovnosti (1) plynou zejména pro $q = p^{-1}$ vztahy: $p\mathfrak{A}p^{-1} = p\mathfrak{A}(p^{-1}\underline{1}) \subset$ $\subset p\mathfrak{A}\,.\,p^{-1}\mathfrak{A} = pp^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, a tedy vychází $p\mathfrak{A}p^{-1} \subset \mathfrak{A}$. Protože p značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, platí tento vztah i pro prvek p^{-1}, a tedy máme současně $p^{-1}\mathfrak{A}p \subset \mathfrak{A}$; odtud plyne $\mathfrak{A} = (pp^{-1})\,\mathfrak{A}(pp^{-1}) = p(p^{-1}\mathfrak{A}a)\,p^{-1} \subset p\mathfrak{A}p^{-1}$, tj. $p\mathfrak{A}p^{-1} \supset \mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$p\mathfrak{A}p^{-1} = \mathfrak{A}\,,$$

nebo, což je totéž, $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$, takže levá třída každého prvku $p \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ je současně pravou třídou prvku p vzhledem k $\mathfrak{A}$. Je tedy podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní v grupě $\mathfrak{G}$.

Předpokládejme nyní naopak, že podgrupa $\mathfrak{A}$ je invariantní v grupě $\mathfrak{G}$. Pak především podle definice plyne, že levá třída $p\mathfrak{A}$ každého prvku $p \in \mathfrak{G}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$ je současně pravou třídou $\mathfrak{A}p$ prvku p vzhledem k $\mathfrak{A}$. Pak pro každé dvě levé třídy $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ platí tyto rovnosti: $p\mathfrak{A} \,.\, q\mathfrak{A} = p(\mathfrak{A}q)\mathfrak{A} = p(q\mathfrak{A})\mathfrak{A} = pq(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = pq\mathfrak{A}$ a z nich plyne $p\mathfrak{A} \,.\, q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}$. Platí-li tedy náš předpoklad, pak součin levé třídy $q\mathfrak{A}$ s levou třídou $q\mathfrak{A}$ je levá třída $pq\mathfrak{A}$, a tím je také zjištěno, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$, který je ovšem rovný rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, je vytvořující. Můžeme tedy své hořejší úvahy shrnouti v této větě:

Je-li podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní v grupě $\mathfrak{G}$, a jenom v tomto případě, je levý (pravý) rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ vytvořující. Součin libovolného prvku $p\mathfrak{A}$ rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$ s libovolným prvkem $q\mathfrak{A}$ je pak prvek $pq\mathfrak{A}$.

2. *Věta druhá.* Pozoruhodná vlastnost grup záleží v tom, že každý vytvořující rozklad libovolné grupy $\mathfrak{G}$ je vytvořen nějakou invariantní podgrupou.

Uvažujme o libovolném vytvořujícím rozkladu $\bar{G}$ grupy $\mathfrak{G}$. Protože každý prvek grupy $\mathfrak{G}$ je obsažen v některém prvku rozkladu $\bar{G}$ a právě jenom v jednom, existuje jistý prvek $A \in \bar{G}$, který obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$. Dokážeme, že A je polem invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a $\bar{G}$ je rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený touto invariantní podgrupou.

Proto především uvažme, že existuje prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ takový, že $AA \subset \bar{a}$, neboť rozklad $\bar{G}$ je vytvořující. Protože jednak platí vztahy $\underline{1} = \underline{1} \,.\, \underline{1} \in AA \subset \bar{a}$ a jednak $\underline{1} \in A$, máme $\bar{a} = A$. Tím jest ukázáno, že množina A je grupoidní. Příslušný podgrupoid $\mathfrak{A}$ obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ a jak nyní ukážeme, obsahuje s každým svým prvkem a také inverzní prvek a^{-1}.

Nechť $a \in A$ a nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\bar{G}$, který obsahuje inverzní prvek a^{-1}. Protože $\underline{1} = aa^{-1} \in A\bar{b}$, je prvek $\underline{1}$ obsažen v součinu $A\bar{b}$ a ovšem je obsažen také v A. Protože rozklad $\bar{G}$ je vytvořující a protože obě podmnožiny $A\bar{b}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, máme $A\bar{b} \subset A$. Odtud plyne: $\underline{1} \,.\, a^{-1} \in A$, tj. $a^{-1} \in A$, a tím je zjištěno, že $\mathfrak{A}$ je podgrupou v $\mathfrak{G}$.

Zbývá ukázat, že $\mathfrak{A}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$ a že každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ je třídou libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$. Nechť $a \in \mathfrak{G}$ a nechť nyní $\bar{a}$ značí onen prvek v $\bar{G}$, který obsahuje a, takže máme vztahy: $a \in \bar{a} \in \bar{G}$. Když $x \in \bar{a}$, pak je $x = \underline{1} \,.\, x \in A\bar{a}$ a odtud plyne $\bar{a} \subset A\bar{a}$. Protože rozklad $\bar{G}$ je vytvořující a obě podmnožiny $A\bar{a}$, $\bar{a}$ obsahují prvek a, platí vztah $A\bar{a} \subset \bar{a}$. Vychází tedy $A\bar{a} = \bar{a}$ a podobně obdržíme $\bar{a}A = \bar{a}$, takže platí rovnosti

$$\bar{a} = A\bar{a} = \bar{a}A\,. \tag{2}$$

Zřejmě jest $aA \subset \bar{a}A$. Ukažme, že současně platí $\bar{a}A \subset aA$. Nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\bar{G}$, který obsahuje prvek a^{-1}. Protože rozklad $\bar{G}$ je vytvořující a protože obě podmnožiny $\bar{b}\bar{a}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, je $\bar{b}\bar{a} \subset A$, a tedy součin $a^{-1}x$ prvku a^{-1} s libovolným prvkem $x \in \bar{a}$ je obsažen v A. Tedy $x = a(a^{-1}x) \in aA$ a vidíme, že platí vztah $\bar{a} \subset aA$. Odtud plyne $\bar{a}A \subset aAA = aA$. Vychází tedy $\bar{a}A = aA$. Podobně se odvodí, že platí rovnost $A\bar{a} = Aa$. Odtud a z (2) vychází

$$\bar{a} = a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a .$$

Tyto rovnosti především ukazují, že podgrupa $\mathfrak{A}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$. Protože platí pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ a onen prvek $\bar{a} \in \bar{G}$, v němž prvek a jest obsažen, platí také pro libovolný prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ a libovolný prvek $a \in \bar{a}$, a ukazují tedy, že každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ je třída libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$.

Tím jsme určili všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$:

Všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom rozklady grupy $\mathfrak{G}$ vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.

24.4. Vlastnosti vytvořujících rozkladů grupy

Na grupě $\mathfrak{G}$ vždycky existují dva vytvořující rozklady, totiž oba krajní rozklady $\bar{G}_{\max}$ a $\bar{G}_{\min}$ (**14.1**); jsou to rozklady grupy $\mathfrak{G}$ vytvořené krajními invariantními podgrupami $\mathfrak{G}$, $\{\underline{1}\}$ v grupě $\mathfrak{G}$ (**24.2**).

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na grupě $\mathfrak{G}$. Podle předešlé věty jest $\bar{A}$ ($\bar{B}$) rozklad vytvořený jistou podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), která je invariantní v grupě $\mathfrak{G}$. Podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou tedy vzájemně zaměnitelné (**24.2**). Z výsledků o levých nebo pravých rozkladech grupy (**21.3—6**) vidíme, že vytvořující rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ mají tyto vlastnosti:

Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je zákrytem (zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$) tehdy a jen tehdy, když podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$, tj. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

Největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je rozklad vytvořený invariantní podgrupou $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je rozklad vytvořený invariantní podgrupou $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ jsou doplňkové.

Dále platí věta:

*Systém všech vytvořujících rozkladů grupy $\mathfrak{G}$ je vzhledem k operacím ( ), [ ] uzavřený a tvoří spolu s násobeními definovanými těmito operacemi modulární svaz s krajními prvky. Tento svaz je izomorfní se svazem složeným z invariantních podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ (**24.2**).*

24.5. Další vlastnosti invariantních podgrup

Věty z odst. **24.3** o vytvořujících rozkladech v grupách vedou ve spojení s úvahami o vytvořujících rozkladech v grupoidech a rozkladech grup vytvořených podgrupami k novým poznatkům o vlastnostech invariantních podgrup.

1. *Nechť* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *jsou podgrupy v grupě* $\mathfrak{G}$, *přičemž podgrupa* $\mathfrak{B}$ *je v* $\mathfrak{A}$ *invariantní. V této situaci je podgrupa* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *invariantní v* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. *Dále jsou podgrupy* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ *vzájemně zaměnitelné a podgrupa* $\mathfrak{B}$ *je invariantní v* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$.

Důkaz. a) Protože podgrupa $\mathfrak{B}$ je v $\mathfrak{A}$ invariantní, je rozklad $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ vytvořující (**24.3.1**). Podle **21.2** (1) máme

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})\,.$$

Dále z odst. **14.3.2** víme, že tento levý rozklad grupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ vzhledem k $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je vytvořující. Z toho vychází, že podgrupa $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ (**24.3.1**).

b) Podle **19.5.1** je průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ podgrupou v $\mathfrak{A}$. Protože podgrupa $\mathfrak{B}$ je v $\mathfrak{A}$ invariantní, jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ vzájemně zaměnitelné (**24.2**). Podle **21.2** (2) máme

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B}\,.$$

Dále z odst. **14.3.2** víme, že tento levý rozklad grupy $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}$ vzhledem k $\mathfrak{B}$ je vytvořující. Z toho vychází, že podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ (**24.3.1**).

Zejména pro $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ máme tuto větu:

Když $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *jsou podgrupy v grupě* $\mathfrak{G}$ *a přitom podgrupa* $\mathfrak{B}$ *je v* $\mathfrak{G}$ *invariantní, je podgrupa* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *invariantní v* $\mathfrak{C}$.

2. *Buďte* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ *podgrupy v* $\mathfrak{G}$, *přičemž podgrupa* $\mathfrak{B}$ *je invariantní v* $\mathfrak{A}$ *a podgrupa* $\mathfrak{D}$ *má touž vlastnost v* $\mathfrak{C}$. *Pak jsou podgrupy* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *invariantní v* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. *Dále buď* $\mathfrak{U}$ *invariantní podgrupa v* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *taková, že platí*

$$(1) \qquad (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,.$$

V této situaci jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ *a* $\mathfrak{U}$ *zaměnitelné s každou podgrupou* $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ *a podgrupa* $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$, *popř.* $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ *je v* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, *popř. v* $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D}$ *invariantní. Mimoto* (podle **23.2** (1)) *platí vzorce*:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{D} = \mathfrak{U} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{B}\,.$$

Důkaz. Podle 1 jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Protože $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{U}$ představují podgrupy v $\mathfrak{A}$, popř. v $\mathfrak{C}$, a podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{C}$, jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ a $\mathfrak{U}$ zaměnitelné s každou podgrupou $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$.

Podle 1 je podgrupa $\mathfrak{B}$ invariantní v $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{D}$. Podle **24.3.1** jsou rozklady $\bar{A} = \mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B}$, $\bar{C} = \mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D}$ vytvořující a podle **14.3.2** platí totéž o rozkladech

$$\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})\,, \quad \bar{C} \sqcap \mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,.$$

Ze vztahů (1) soudíme, že rozklad $\bar{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\mathfrak{U}$ je společným zákrytem rozkladů $\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}'$, $\bar{C} \sqcap \mathfrak{A}'$. Z toho, že podgrupa $\mathfrak{U}$ je invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ plyne, že rozklad $\bar{B}$ je vytvořující. Odtud vidíme, že zákryty

$$\mathring{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{B}\,, \quad \mathring{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D}/_l\mathfrak{U}\mathfrak{D}$$

rozkladů $\bar{A}$, $\bar{C}$ vynucené rozkladem $\bar{B}$ jsou vytvořující (**14.3**.3).

Vzhledem k **24.3**.1 vidíme, že podgrupa $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$, popř. $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ je v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, popř. v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D}$ invariantní.

Zejména (pro $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$) platí věta:

Buďte $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$, přičemž podgrupa $\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{A}$ a podgrupa $\mathfrak{D}$ má touž vlastnost v $\mathfrak{C}$. Pak jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ invariantní v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$. Dále jsou podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ zaměnitelné s $\mathfrak{B}$ a podobně podgrupy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ s $\mathfrak{D}$. Dále je podgrupa $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}$ invariantní v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ a podgrupa $(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D}$ má touž vlastnost v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D}$. Mimoto platí (**23.2** (2)) *vzorce*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\,\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\,\mathfrak{B}\,.$$

24.6. Řady invariantních podgrup

V klasické nauce o grupách se teorie řad invariantních podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ vyvíjí zpravidla na základě předpokladu, že každý člen řady s výjimkou prvního je invariantní podgrupou v členu bezprostředně předcházejícím. Přitom se dochází k výsledkům rázu lokálního v tom smyslu, že se jimi popisují poměry pouze v „okolí“ jednotky grupy $\mathfrak{G}$. V následujících úvahách se kvůli jednoduchosti omezíme na speciální případ, kdy každý člen řady je invariantní podgrupou v celé grupě $\mathfrak{G}$. Naše předcházející výsledky o řadách podgrup (**23.4**) umožňují přistoupit hned k jádru této teorie. Proti klasické teorii dospějeme k výsledkům, které mají ráz globální, neboť popisují situaci v okolí kteréhokoli bodu grupy $\mathfrak{G}$.

Vezměme v úvahu dvě řady podgrup v grupě $\mathfrak{G}$, a to:

$$(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1)\,,$$
$$(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1)\,,$$

a předpokládejme, že všechny podgrupy, které se v ni vyskytují, jsou invariantní v grupě $\mathfrak{G}$.

V této situaci platí věta:

Řady $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B})$ *mají kobaziálně spjatá zjemnění* $(\mathfrak{A}_*), (\mathfrak{B}_*)$ *se splývajícími počátečními a koncovými členy, přičemž všechny podgrupy, které v těchto zjemněních vystupují, jsou invariantní v grupě $\mathfrak{G}$. Zjemnění* $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ *jsou dána konstrukcí popsanou v části* a) *důkazu v odst.* **23.4.5**.

Důkaz. Z toho, že členy řad $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ jsou v grupě $\mathfrak{G}$ invariantní, soudíme, že tyto řady jsou doplňkové (**23.4.4**; **24.4**). Vidíme, že na řady $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ můžeme aplikovat konstrukci uvedenou v části a) důkazu v odst. **23.4.5**. Tato konstrukce vede ke kobaziálně spjatým zjemněním $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ řad $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, přičemž tato zjemnění mají stejné počáteční a koncové členy $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, popř. $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta$. Podle zmíněné konstrukce jsou zjemnění $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ složena z podgrup v $\mathfrak{G}$, a to:

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma\mathfrak{B}_\nu\,,$$
$$\mathfrak{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu) = \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\delta\mathfrak{A}_\mu\,,$$

$(\gamma, \mu = 1, 2, \ldots, \alpha + 1;\ \delta, \nu = 1, 2, \ldots, \beta + 1;\ \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G},\ \mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{V})$. Z výsledků v odst. **24.2** vidíme, že podgrupy $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ jsou v grupě $\mathfrak{G}$ invariantní. Tím je důkaz proveden.

24.7. Cvičení

1. V grupě $\mathfrak{S}_4$, skládající se ze všech permutací množiny $\{a, b, c, d\}$, tvoří všechny permutace, které zobrazují prvek d na sebe, podgrupu $\mathfrak{S}'_3$. Permutace, které zobrazují prvky a, b, c jako permutace **e**, ***a***, ***b*** v odst. **11.4.2** a prvek d nechávají beze změny, tvoří podgrupu v $\mathfrak{S}_4$, která je invariantní v $\mathfrak{S}'_3$, ale není invariantní v $\mathfrak{S}_4$.

2. Nechť $\mathfrak{A}$ jest libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Množina všech prvků $p \in \mathfrak{G}$ takových, že $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$, tvoří podgrupu $\mathfrak{N}$ v $\mathfrak{G}$, tzv. *normalizátor podgrupy* $\mathfrak{A}$. Normalizátor $\mathfrak{N}$ podgrupy $\mathfrak{A}$ představuje největší nadgrupu na $\mathfrak{A}$, v níž je podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní, tj. podgrupa $\mathfrak{A}$ je invariantní v $\mathfrak{N}$ a každá podgrupa v $\mathfrak{G}$, v níž je $\mathfrak{A}$ invariantní, je podgrupou v $\mathfrak{N}$.

3. Centrum grupy $\mathfrak{G}$ je invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$.

4. Když v nějaké konečné grupě řádu N ($\geqq 2$) existuje podgrupa řádu $\frac{1}{2}N$, pak tato podgrupa je v ní invariantní. Např. v diedrické permutační grupě řádu $2n$ ($n \geqq 3$) máme invariantní podgrupu řádu n, která se skládá ze všech prvků grupy odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu (**19.7.2**).

5. Když ke každému prvku $p \in \mathfrak{G}$ přiřadíme každý prvek $x^{-1}px \in \mathfrak{G}$, přičemž $x \in \mathfrak{G}$ značí libovolný prvek, obdržíme symetrickou kongruenci na $\mathfrak{G}$. Rozklad $\bar{G}$ příslušný k této kongruenci je tzv. *hlavní rozklad grupy* $\mathfrak{G}$. Pole každé invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ je součtem některých prvků hlavního rozkladu $\bar{G}$. Hlavní rozklad $\bar{G}$ je doplňkový ke každému vytvořujícímu rozkladu grupy $\mathfrak{G}$.

6. Budiž $p \in \mathfrak{G}$ libovolný bod a $\mathring{\mathfrak{G}}$ budiž (p)-grupa přidružená ke grupě $\mathfrak{G}$ (**19.7.11**). Vezměme v úvahu libovolnou invariantní podgrupu $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ a podgrupu $\mathring{\mathfrak{A}}$ v grupě $\mathring{\mathfrak{G}}$ ležící na poli $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$ (**20.3.3**; **21.8.7**). Ukažte, že: a) podgrupa $\mathring{\mathfrak{A}}$ je invariantní v $\mathring{\mathfrak{G}}$; b) všechny vytvořující rozklady grupy $\mathring{\mathfrak{G}}$ splývají s vytvořujícími rozklady grupy $\mathfrak{G}$.