In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie grupoidů a grup. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. pp. 132--145.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401445

18. Význačné druhy grupoidů

Ačkoli některé význačné druhy grupoidů, o kterých pojednáme, jsou charakterizovány zvláštními vlastnostmi násobení a výklad o nich se přimyká k odst. **11.2**, přistoupíme k němu teprve nyní, abychom zdůraznili, že předcházející úvahy platí pro všechny grupoidy bez ohledu na nějaké jejich zvláštní vlastnosti. Pro naše další úvahy jsou důležité zejména grupoidy asociativní, dále tzv. grupoidy s jednoznačným dělením a grupoidy s jednotkou.

Mimoto alespoň stručně pojednáme, vzhledem k jejich důležitosti, o tzv. BRANDTOVÝCH grupoidech, třebaže v jistém smyslu vybočují z celkového rámce našich úvah.

18.1. Asociativní grupoidy (pologrupy)

1. *Definice.* Pojem asociativního grupoidu $\mathfrak{G}$ jsme již vymezili v odst. **12.7.**2, a to vlastností, že *každá trojčlenná posloupnost prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součinový prvek*, tj. že pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$. Asociativní grupoidy se nazývají *pologrupy*.

2. *Základní věta o pologrupách.* Nyní ukážeme, že *každý asociativní grupoid $\mathfrak{G}$ se vyznačuje tím, že každá n-členná ($n \geqq 2$) posloupnost prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součinový prvek*, tj. pro $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ ($n \geqq 2$) značí symbol $a_1 \ldots a_n$ právě jeden prvek v $\mathfrak{G}$.

Za tím účelem uvažujme o libovolném asociativním grupoidu $\mathfrak{G}$. K důkazu použijeme metody úplné indukce. Naše tvrzení je správné, když $n = 2$, neboť v tom případě plyne bezprostředně z definice násobení v $\mathfrak{G}$. Zbývá tedy ukázat, že platí-li tvrzení o každé nejvýše ($n - 1$)-členné posloupnosti prvků v $\mathfrak{G}$, kde n značí některé přirozené číslo > 2, pak platí také o každé uspořádané skupině n-členné posloupnosti prvků v $\mathfrak{G}$.

Budiž tedy $n > 2$. Předpokládáme, že naše tvrzení platí pro každou nejvýš ($n - 1$)-člennou posloupnost prvků v $\mathfrak{G}$. Vezměme v úvahu n libovolných prvků $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$.

Pak každý symbol

$$a_1, a_2 \ldots a_n, \; a_1a_2, a_3 \ldots a_n, \; \ldots, \; a_1 \ldots a_{n-1}, a_n$$

značí zcela určitý prvek grupoidu $\mathfrak{G}$, neboť podle našeho předpokladu je např. jenom jeden součinový prvek $a_2 \ldots a_n$ ($n - 1$)-členné posloupnosti prvků $a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$.

Máme ukázat, že všechny prvky

(1) $$a_1(a_2 \dots a_n),\ (a_1 a_2)(a_3 \dots a_n),\ \dots,\ (a_1 \dots a_{n-1})\, a_n$$

jsou identické. Za tím účelem si všimněme, že každý z těchto prvků je součinem $(a_1 \dots a_k) \cdot (a_{k+1} \dots a_n)$ prvků $a_1 \dots a_k$, $a_{k+1} \dots a_n \in \mathfrak{G}$, přičemž k značí některé číslo $1, \dots, n-1$. Důkaz bude proveden, když zjistíme, že každý prvek (1) je identický např. s prvním z nich, tj. že při každém $k = 1, \dots, n-1$ platí rovnost

(2) $$(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) = a_1(a_2 \dots a_n)\,.$$

Když $k = 1$, je tato rovnost samozřejmá, a proto se můžeme omezit na případ $k > 1$. V tomto případě je $a_1 \dots a_k$ součinovým prvkem alespoň dvou — a nejvýše $(n-1)$-členné posloupnosti utvořené z prvků $a_1, \dots, a_k$ a je tedy podle našeho předpokladu identický s prvkem $a_1(a_2 \dots a_k)$, takže vychází rovnost $(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) = (a_1(a_2 \dots a_k))(a_{k+1} \dots a_n)$. Protože grupoid $\mathfrak{G}$ je asociativní; je prvek na pravé straně této rovnosti identický s prvkem $a_1((a_2 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n))$, tj. s prvkem $a_1(a_2 \dots a_n)$ a vychází (2).

Podobný výsledek platí ovšem o konečných posloupnostech podmnožin v $\mathfrak{G}$.

3. *Důsledky základní věty o pologrupách.* a) Jednoznačnost složené permutace. Výsledek, který jsme právě dokázali, má důležité použití při skládání permutací nějaké (konečné nebo nekonečné) množiny prvků. Nechť $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$ značí libovolné permutace nějaké množiny H. Co rozumíme permutací složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ (v tomto pořadí)? V případě $n = 2$ je to, jak víme, složené zobrazení $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$. V případě $n = 3$ definujeme pojem složené permutace z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ takto: Permutací složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ rozumíme kteroukoli z permutací $\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ a označujeme ji symbolem $\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$; symbol $\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$ má tedy význam jednak permutace složené z permutací $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3$, jednak permutace složené z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2$. V případě $n = 4$ definujeme permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ takto: Je to kterákoli z permutací $\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$ a označuje se symbolem $\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$. Symbol $\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1$ má tedy význam kterékoli z těchto permutací množiny H: $\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1))$, $\boldsymbol{p}_4((\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_1)$, $(\boldsymbol{p}_4(\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_2))\boldsymbol{p}_1$, $((\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1$.

Obecně, pro $n \geqq 2$, definujeme permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ takto: Je to kterákoli z permutací

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{p}_{n-1} \cdots \boldsymbol{p}_1),\ (\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{p}_{n-1})(\boldsymbol{p}_{n-2} \cdots \boldsymbol{p}_1),\ \dots,\ (\boldsymbol{p}_n \cdots \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_1\,,$$

přičemž symbol v každé závorce značí libovolnou permutaci složenou z permutací v něm vyznačených, a to v pořadí od pravého konce symbolu k levému. Permutaci složenou z permutací $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ označujeme symbolem $\boldsymbol{p}_n \dots \boldsymbol{p}_1$. Podle této definice má tedy symbol $\boldsymbol{p}_n \dots \boldsymbol{p}_1$ význam součinového prvku n-členné posloupnosti prvků $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ z grupoidu, jehož pole se skládá ze všech permutací množiny H a násobení je definováno skládáním permutací. Protože o skládání permutací platí asociativní zákon (**8.7**.3), je tento grupoid asociativní a z hořejšího výsledku plyne, že *je jenom jedna permutace $p_n \dots p_1$ složená z permutací $p_1, \dots, p_n$*. Tuto větu vyjadřujeme také výrokem, že při stejném pořadí permutací nezávisí složená permutace na způsobu složení. Podle tohoto výsledku obdržíme tedy obraz $p_n \dots p_1 x$ libovolného prvku $x \in H$ např. podle vzorce

$$p_n \dots p_1 x = p_n(p_{n-1}(\dots (p_2(p_1 x)) \dots)),$$

tj. tím způsobem, že určíme nejprve obraz $p_1 x$ prvku x v permutaci p_1, pak obraz $p_2(p_1 x)$ prvku $p_1 x$ v permutaci p_2, atd., a konečně obraz $p_n(p_{n-1}(\dots (p_2(p_1 x)) \dots))$ prvku $p_{n-1}(\dots (p_2(p_1 x)) \dots)$ v permutaci p_n. Odtud je také bezprostředně patrné, že když permutace $p_1, \dots, p_n$ nechávají některý prvek $x \in H$ beze změny, pak totéž platí o složené permutaci $p_n \dots p_1$.

b) Složení permutace z permutací cyklických. Použijme těchto výsledků k několika poznámkám o permutacích konečné množiny. Předpokládejme, že se množina H skládá z konečného počtu ($\geqq 1$) prvků.

Především ukážeme, že *libovolná permutace množiny H je složena z konečného počtu cyklických permutací, jejichž cykly nemají společných prvků.*

Za tím účelem uvažujme o libovolné permutaci p množiny H. Jak jsme vyložili v odst. **8.5**, je permutace p vytvořena konečným počtem ryzích cyklických permutací $p_{\bar{a}}, \dots, p_{\bar{m}}$, tj. existuje rozklad $\bar{H} = \{\bar{a}, \dots, \bar{m}\}$ množiny H takový, že každý jeho prvek $\bar{a}, \dots, \bar{m}$ je v permutaci p invariantní a částečné permutace $p_{\bar{a}}, \dots, p_{\bar{m}}$ jsou ryzí cyklické permutace prvků $\bar{a}, \dots, \bar{m}$. Nechť $\bar{x}$ značí libovolný prvek v $\bar{H}$ a $q_{\bar{x}}$ cyklickou permutaci množiny H, která je definována tím, že zobrazuje každý prvek $x \in \bar{x}$ na prvek $p_{\bar{x}} x$ a všechny ostatní prvky množiny H, jsou-li jaké, nechává beze změny. Podle této definice má tedy cyklická permutace $q_{\bar{x}}$ týž cyklus jako ryzí cyklická permutace $p_{\bar{x}}$, můžeme tedy obě permutace $q_{\bar{x}}$, $p_{\bar{x}}$ vyjádřit tímtéž zjednodušeným symbolem. Naše tvrzení bude dokázáno, zjistíme-li, že permutace p je složena z cyklických permutací $q_{\bar{a}}, \dots, q_{\bar{m}}$, tj. že $p = q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}}$.

Nechť x značí libovolný prvek v H a $\bar{x}$ onen prvek rozkladu $\bar{H}$, který jej obsahuje, takže permutace $q_{\bar{x}}$ zobrazuje prvek x na prvek $q_{\bar{x}} x$, ale všechny ostatní permutace $q_{\bar{a}}, \dots, q_{\bar{m}}$, jsou-li jaké, nechávají prvek x beze změny. Protože při stejném pořadí permutací složená permutace nezávisí na způsobu složení, máme $q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}} x = (q_{\bar{m}} \dots) q_{\bar{x}} (\dots q_{\bar{a}}) x$, přičemž ovšem v případě $\bar{x} = \bar{m}$ vypustíme na pravé straně symbol složené permutace v první závorce a v případě $\bar{x} = \bar{a}$ symbol v druhé. Když $\bar{x} \neq \bar{a}$, máme $(\dots q_{\bar{a}}) x = x$, neboť všechny permutace, z nichž $\dots q_{\bar{a}}$ je složena, nechávají prvek x beze změny. Máme tedy především $q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}} x = (q_{\bar{m}} \dots) q_{\bar{x}} x$. Podobně zjistíme, že prvek na pravé straně této rovnosti je $q_{\bar{x}} x$, takže vychází $q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}} x = q_{\bar{x}} x$. Podle definice permutace $q_{\bar{x}}$ je $q_{\bar{x}} x = p_{\bar{x}} x$ a dále podle definice permutace $p_{\bar{x}}$ platí $p_{\bar{x}} x = p x$. Tím jsme došli k rovnosti $q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}} x = p x$ a důkaz je proveden.

Všimněme si, že ve vzorci $p = q_{\bar{m}} \dots q_{\bar{a}}$ můžeme pořadí permutací $q_{\bar{a}}, \dots, q_{\bar{m}}$ libovolně změnit, neboť při každém uspořádání permutací $q_{\bar{a}}, \dots, q_{\bar{m}}$ můžeme zvolit takové označení prvků rozkladu $\bar{H}$, že tento vzorec zůstane beze změny.

Když máme nějaké permutace $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geqq 2)$ množiny H vyjádřeny dvouřádkovými nebo zjednodušenými symboly, vyjadřujeme složenou permutaci $p_n \ldots p_1$ tím, že symboly permutací $p_1, \ldots, p_n$ napíšeme vedle sebe v opačném pořádku vzhledem k tomuto. Podle této úmluvy a podle způsobu vyjádření libovolné permutace ryzími cyklickými permutacemi (**8.6**), můžeme chápat např. vzorec $\begin{pmatrix} a\, b\, c\, d \\ d\, c\, b\, a \end{pmatrix} =$ $= (a, d)(b, c)$ v tom smyslu, že permutace množiny $\{a, b, c, d\}$ vyjádřená symbolem na levé straně je složena z cyklických permutací (b, c), (a, d), nebo v tom smyslu, že je vytvořena ryzími cyklickými permutacemi (a, d), (b, c).

4. *Slabě asociativní grupoidy.* Nedávno zobecnil V. Devidé pojem asociativního grupoidu takto: Grupoid $\mathfrak{G}$ se nazývá *slabě asociativní*, když existují prostá zobrazení $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe vyznačující se tím, že pro libovolné prvky $a, b, c \in \mathfrak{G}$ platí rovnost: $(ab)c = \mathbf{f}a(\mathbf{g}b \,.\, \mathbf{h}c)$. Slabě asociativní grupoidy se mohou též označit za *slabé pologrupy*. Je zřejmé, že pro identická zobrazení $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ přechází pojem slabě asociativního grupoidu v pojem grupoidu asociativního.

Spokojíme se s uvedením pouze jednoho příkladu slabě asociativního grupoidu $\mathfrak{G}$.

Polem grupoidu $\mathfrak{G}$ budiž množina všech od nuly různých racionálních nebo reálních nebo komplexních čísel, násobení v $\mathfrak{G}$ nechť je definováno jako aritmetické dělení. Označme symbolem $\circ$ aritmetické násobení. Pak pro $a, b, c \in \mathfrak{G}$ máme rovnosti:

$$(ab)c = \frac{a/b}{c} = \frac{a}{b \circ c} = a\Big/\left(b\Big/\frac{1}{c}\right) = a\left(b\,\frac{1}{c}\right).$$

Vidíme, že prostá zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{e}$ (identické zobrazení) a zobrazení $\mathbf{h}$, definované vzorcem $\mathbf{h}c = 1/c$, splňují hořejší požadavek.

18.2. Grupoidy s pravidly o krácení

Pravíme, že $\mathfrak{G}$ je *grupoid s pravidly o krácení*, když má tuto vlastnost: Když pro některé prvky $a, x, y \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $ax = ay$ nebo $xa = ya$, pak $x = y$.

V grupoidu s pravidly o krácení můžeme tedy rovnost $ax = ay$ nebo $xa = ya$ „krátit“ prvkem a.

Multiplikační tabulka každého konečného grupoidu $\mathfrak{G}$ s pravidly o krácení má tuto vlastnost, která tyto grupoidy charakterizuje: V každém řádku a v každém sloupci tabulky grupoidu $\mathfrak{G}$ se vyskytnou vpravo od svislého a pod vodorovným záhlavím symboly všech prvků grupoidu $\mathfrak{G}$. Neboť jestliže se např. v některém řádku $[a]$ (tj. vpravo od písmena a napsaného ve svislém záhlaví) nevyskytnou symboly všech prvků grupoidu $\mathfrak{G}$, pak se v řádku $[a]$ a v některých dvou různých sloupcích

$[x]$, $[y]$ (tj. pod symboly x, y ve vodorovném záhlaví) vyskytne symbol téhož prvku b; to znamená, že platí rovnosti $ax = ay = b$ a současně je $x \neq y$, což však odporuje pravidlům o krácení. Když naopak má multiplikační tabulka nějakého grupoidu $\mathfrak{G}$ uvedenou vlastnost, platí pro libovolné prvky a, $x, y \in \mathfrak{G}$, $x \neq y$, nerovnosti: $ax \neq ay, xa \neq ya$, a z nich plyne, že v grupoidu $\mathfrak{G}$ platí pravidla o krácení.

18.3. Grupoidy s dělením

1. *Definice.* Když se nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ vyznačuje tím, že ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{G}$ existují prvky $x, y \in \mathfrak{G}$ splňující rovnosti

$$ax = b\,, \quad ya = b\,,$$

nazývá se $\mathfrak{G}$ *grupoid s dělením.*

Když existuje jediný prvek $x \in \mathfrak{G}$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{G}$ s touto vlastností, nazývá se $\mathfrak{G}$ *grupoid s jednoznačným dělením.*

Grupoidy s jednoznačným dělením se nazývají také *kvasigrupy.*

Doporučujeme čtenáři, aby se přesvědčil o správnosti těchto vět:

Pro každý grupoid s dělením $\mathfrak{G}$ *platí rovnost* $\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.

Každá kvasigrupa je grupoid s pravidly o krácení.

Každý konečný grupoid s pravidly o krácení je kvasigrupa.

2. *Příklady.* Grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ jsou quasigrupy: Ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{Z}$ existuje jediný prvek $x \in \mathfrak{Z}$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{Z}$ takový, že $a + x = b$, $y + a = b$, a to $x = -a + b$, $y = b - a$. Podobně existuje ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathfrak{Z}_n$ jediný prvek $x \in \mathfrak{Z}_n$ a jediný prvek $y \in \mathfrak{Z}_n$ takový, že zbytek dělení čísla $a + x$ číslem n je b a zbytek dělení čísla $y + a$ číslem n je b, a to $x = y = -a + b$ $(n - a + b)$, když $-a + b \geqq 0$ $(-a + b < 0)$. Ke každým dvěma permutacím $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ existuje jediná permutace $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{S}_n$ a jediná permutace $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{S}_n$ taková, že $\boldsymbol{p} \,.\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{y} \,.\, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ neboli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$, přičemž $\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-1}$ značí permutaci složenou z permutace inverzní $\boldsymbol{p}^{-1}$ vzhledem k $\boldsymbol{p}$ a z $\boldsymbol{q}$, a podobně $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}$.

18.4. Grupoidy s jednotkou

1. *Definice.* Když se některý prvek, označme jej $\underline{1}$, v nějakém grupoidu $\mathfrak{G}$ vyznačuje tím, že součin prvku $\underline{1}$ s libovolným prvkem $a \in \mathfrak{G}$ je prvek a a podobně součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s prvkem $\underline{1}$ je rovněž prvek a, pak se prvek $\underline{1}$ nazývá *jednotkový* neboli *jednotka grupoidu* $\mathfrak{G}$.

Jednotka $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ je tedy charakterizována rovnostmi $\underline{1}a = a\underline{1} = a$, které platí pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$.

Snadno ukážeme, že *každý grupoid může mít nejvýše jednu jednotku*. Značí-li totiž $\underline{1}, x$ jednotky libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$, pak je jednak $\underline{1}x = x$ (neboť $\underline{1}a = a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$) a jednak $\underline{1}x = \underline{1}$ (neboť $ax = a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$). Odtud plyne $\underline{1} = x$.

Když má nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ jednotku, pak jej nazýváme *grupoid s jednotkou*.

Všimněme si, že multiplikační tabulka libovolného konečného grupoidu s jednotkou má tuto charakteristickou vlastnost: Onen řádek, na jehož začátku ve svislém záhlaví tabulky je vyznačena jednotka, obsahuje na dalších místech tytéž symboly a ve stejném pořádku jako vodorovné záhlaví tabulky. Podobně onen sloupec, na jehož začátku ve vodorovném záhlaví je vyznačena jednotka, obsahuje na dalších místech tytéž symboly a ve stejném pořádku jako svislé záhlaví.

2. *Příklady*. Příklady grupoidů s jednotkou jsou grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ ($n \geqq 1$). Jednotkou grupoidu $\mathfrak{Z}$ je 0, neboť pro každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ platí rovnosti $0 + a = a + 0 = a$. Rovněž jednotkou grupoidu $\mathfrak{Z}_n$ je 0, neboť pro každý prvek $a \in \mathfrak{Z}_n$ dají čísla $0 + a$, $a + 0$ dělením číslem n zbytek a. Jednotkou grupoidu $\mathfrak{S}_n$ je identická permutace $\mathbf{e}$ množiny H, neboť pro každý prvek $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{S}_n$ máme $\boldsymbol{pe} = \boldsymbol{ep} = \boldsymbol{p}$. Naproti tomu např. grupoid popsaný v **14.5**.3 nemá jednotku.

18.5. Další význačné grupoidy Grupy

1. Speciální grupoidy mohou se vyznačovat tím, že mají některé nebo i všechny výše uvedené vlastnosti současně. Podle toho mluvíme např. o *pologrupách s pravidly o krácení*, o *quasigrupách s jednotkou*, o *pologrupách s dělením*, atd. Některé z těchto grupoidů mají zvláštní jména. Např.: pologrupy s pravidly o krácení se též nazývají *semigrupy*, quasigrupy s jednotkou se jmenují *lupy*.

Pro naše další úvahy mají zvláštní důležitost pologrupy s dělením. V tomto směru především ukážeme, že *každá pologrupa s dělením obsahuje jednotku a její dělení je jednoznačné*.

Vskutku, nechť $\mathfrak{G}$ značí nějakou pologrupu s dělením.

a) Zvolme v $\mathfrak{G}$ libovolný prvek a. Protože $\mathfrak{G}$ je grupoid s dělením, existuje prvek $e_p \in \mathfrak{G}$, takový, že $ae_p = a$. O prvku e_p ukážeme, že je jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}$. Nechť b značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Protože $\mathfrak{G}$ je grupoid s dělením, existuje prvek $y \in \mathfrak{G}$ takový, že $ya = b$, a protože $\mathfrak{G}$ je asociativní, platí rovnosti $be_p = (ya)e_p = y(ae_p) = ya = b$. Vychází tedy $be_p = b$. Podobně zjistíme, že pro prvek $e_l \in \mathfrak{G}$ definovaný rovností $e_l a = a$ platí $e_l b = b$. Poněvadž jednak $e_l e_p = e_l$ (neboť $be_p = b$ pro každý prvek $b \in \mathfrak{G}$) a jednak $e_l e_p = e_p$ (neboť $e_l b = b$ pro každý prvek $b \in \mathfrak{G}$), vidíme, že $e_l = e_p$ a že prvek e_p skutečně má charakteristické vlastnosti jednotky grupoidu $\mathfrak{G}$: $e_p = \underline{1}$.

b) Buďte $a, b \in \mathfrak{G}$ libovolné prvky. Ukážeme, že ze vztahů $ax_1 = b = ax_2$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{G})$ plyne $x_1 = x_2$. Nuže, především z možnosti dělení v grupoidu $\mathfrak{G}$ plyne existence prvku $u \in \mathfrak{G}$ splňujícího rovnici $ua = \underline{1}$. Dále platí (vzhledem k asociativnosti násobení) tyto vztahy: $ub = u(ax_1) = (ua)x_1 = \underline{1}x_1 = x_1$ a podobně $ub = x_2$. Skutečně tedy vychází: $x_1 = x_2$. Podobně ze vztahů $y_1a = b = y_2a$ $(y_1, y_2 \in \mathfrak{G})$ vychází: $y_1 = y_2$.

Pologrupy s dělením se obvykle nazývají *grupy*. Naši větu možno tedy vyjádřit tím, že každá grupa má jednotku a je quasigrupou. Např. $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ jsou grupy. Poznamenejme, že se grupa $\mathfrak{S}_n$ nazývá *symetrická permutační grupa stupně n.*

Všechny zmíněné druhy grupoidů mohou mít ovšem ještě další vlastnosti, např. mohou býti abelovské; v tom případě mluvíme např. o abelovských asociativních grupoidech s jednotkou, atp. Abelovské pologrupy, jejichž všechny prvky jsou rovnomocné, se nazývají *polosvazy*. Příkladem polosvazu je grupoid, jehož pole se skládá ze všech rozkladů v množině G a součin z prvků $\bar{A}$ a $\bar{B}$ je definován jako nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ (**3.7.4**).

2. *Brandtovy grupoidy.* V této kapitole se budeme krátce zabývat tzv. Brandtovými grupoidy. Především poznamenejme, že tyto útvary zavedl do algebry v r. 1927 německý matematik H. Brandt, který k jejich označení poprvé užil slova *grupoid.* Teprve asi o deset let později přichází v literatuře slovo grupoid ve smyslu uvedeném v této knize, v němž se ho dnes všeobecně užívá.

Brandtovy grupoidy vybočují především z rámce našich úvah tím, že v nich násobení není nutně definováno pro *každou* dvoučlennou posloupnost prvků.

Budiž G neprázdná množina nějakých prvků. Předpokládejme, že je dáno pravidlo, které opět nazveme násobení neboli binární operace, vyznačující se tím, že k některým dvoučlenným posloupnostem prvků $a, b \in G$ přiřazuje jednoznačně jistý prvek $c \in G$, kdežto na jiné dvoučlenné posloupnosti prvků $a, b \in G$ se aplikovat nedá. V prvním případě pravíme, že se prvek *a dá násobit prvkem b* a prvek c nazýváme *součin prvku a s prvkem b* neboli *součin z prvku a a b.* V druhém případě pravíme, že se prvek *a nedá násobit prvkem b* a že *příslušný součin neexistuje.*

Tuto situaci bychom mohli podřadit dosud uvažovaným poměrům, kdy násobení bylo definováno pro *všechny* dvoučlenné posloupnosti prvků v G. Za tím účelem by stačilo zavést nový prvek pro neexistující součiny. V dalším výkladu však této myšlenky nepoužíváme, neboť její provedení by mělo vliv pouze na formální stránku našich úvah, bez většího dosahu.

Množina G spolu s násobením (ve výše uvedeném smyslu) se nazývá *Brandtův grupoid*, když jsou splněny tyto čtyři postuláty:

1. Když pro některé prvky a, b, c platí rovnost $ab = c$, je každý z nich jednoznačně určen zbývajícími dvěma.

2. Když existují ab a bc, pak totéž platí o součinech $(ab)c$ a $a(bc)$; když existují ab a $(ab)c$, pak totéž platí o součinech bc a $a(bc)$; když existují bc a $a(bc)$, pak totéž platí o součinech ab a $(ab)c$. V každém z těchto případů je $(ab)c = a(bc)$ a tento součin se označuje symbolem abc.

3. Ke každému prvku a existují tyto jednoznačně určené prvky: *pravá jednotka* e, *levá jednotka* e' a tzv. *inverzní prvek* a^*; pro tyto prvky platí rovnosti: $ae = e'a = a$, $a^*a = e$.

4. Ke každým dvěma jednotkám e, e' existují prvky, pro něž je e pravou a e' levou jednotkou.

Z postulátů 1 a 2 plynou zejména tyto důsledky:

$$aa^* = e' , \quad ea^* = a^* , \quad a^*e' = a^* , \quad ee = e , \quad e'e' = e' .$$

Jejich správnost lze snadno zjistit; např. první rovnost vyplyne takto: Ze vztahů $e'a = a = ae = a(a^*a) = (aa^*)a$ máme $e'a = (aa^*)a$ a odtud plyne $e' = aa^*$.

Vidíme, že a je inverzním prvkem k a^*, takže můžeme mluvit o vzájemně inverzních prvcích a, a^*. Pravá a levá jednotka se při přechodu k inverznímu prvku vymění.

Dále vidíme, že rovnost $ee = e$ je pro jednotky charakteristická: Nejen každá pravá nebo levá jednotka této rovnosti vyhovuje. ale i každý prvek e, který ji splňuje, představuje pravou i levou jednotku prvku e. V souvislosti s postuláty 2 a 1 dále vidíme, že každá jednotka e je pravou (levou) jednotkou každého prvku a (b), pro nějž existuje součin ae (eb). Pomocí jednotek lze jednoduše vyjádřit, kdy se prvek a dá násobit prvkem b: to nastane tehdy a jenom tehdy, když se pravá jednotka prvku a rovná levé jednotce prvku b.

Existence inverzního prvku zahrnuje toto: Když pro některé prvky a, b, c platí rovnost $ab = c$, pak současně je $a^*c = b$, $cb^* = a$, $b^*a^* = c^*$, $c^*a = b^*$, $bc^* = a^*$. Inverzní prvek a^* se označuje též symbolem a^{-1}. Součiny aa^{-1} nebo $a^{-1}a$ se uplatňují jenom tehdy, když stojí osamoceně, kdežto v jiných případech se mohou vypustit. Je-li $n = ab \dots m$ součin konečné posloupnosti o libovolném počtu prvků, pak inverzní prvek vzhledem n je dán vzorcem: $n^{-1} = m^{-1} \dots b^{-1}a^{-1}$.

Spokojíme se s těmito poznámkami a nebudeme se teorií Brandtových grupoidů zabývat podrobněji; tato teorie má ostatně blízké vztahy k teorii grup, kterou budeme studovat v III. části této knihy. K osvětlení pojmu Brandtova grupoidu poslouží tento jednoduchý příklad:

Budiž G kartézský čtverec libovolné neprázdné množiny A (**1.8**). Prvky množiny G jsou tedy dvoučlenné posloupnosti (a, b), přičemž a, b probíhají jednotlivé prvky v A. V množině G definujeme násobení takto: Prvek (a, b) se dá násobit prvkem $(c, d) \in G$ právě tehdy, když $b = c$, a v tomto případě je příslušný součin dán vzorcem: $(a, b)(b, d) = (a, d)$.

Množina G s tímto násobením představuje Brandtův grupoid. Vskutku, především je zřejmé, že jsou splněny postuláty 1 a 2. Dále se snadno vidí, že jsou splněny i postuláty 3 a 4: Ke každému prvku $(a, b) \in G$ existuje pravá jednotka (b, b), levá jednotka (a, a) a inverzní prvek (b, a); ke každým dvěma jednotkám (b, b), (a, a) existuje prvek $(a, b) \in G$, pro nějž je (b, b) pravou a (a, a) levou jednotkou.

Je-li např. A množina všech bodů ležících v rovině, můžeme ke každému prvku

(a, b) $(a \neq b)$ nebo (a, a) v kartézském čtverci přiřadit orientovanou úsečku $\overrightarrow{ab}$ popř. bod a. Tímto způsobem obdržíme Brandtův grupoid, jehož pole se skládá z bodů a orientovaných úseček a jehož násobení je dáno navazováním těchto prvků na sebe.

18.6. Svazy

Tuto kapitolu zakončíme krátkým výkladem o tzv. svazech, jejichž pojem se k předcházejícím úvahám úzce přimyká. V podstatě jsou svazy dvojice *soumístných*, tj. na témž poli definovaných, grupoidů se zvláštními vlastnostmi, přičemž jejich násobení jsou vázána určitými zákony. Teorie svazů zaujímá v moderní matematice významné místo nejenom pro svou obsažnost a formální půvab, nýbrž zejména proto, že z jednotícího hlediska popisuje vlastnosti svazů, které jsou v různých oborech matematiky realizovány nejrozmanitějšími útvary.

Nechť jsou na množině G dána dvě násobení. Abychom je v úvahách mohli snadno odlišit, zvolíme jedno z nich libovolně a nazveme je *horní*, kdežto druhé nazveme *dolní*. Součin libovolného prvku $a \in G$ s libovolným prvkem $b \in G$ v horním (dolním) násobení nazýváme *spojení* (*průnik*) prvku a s prvkem b a označujeme jej symbolem $a \cup b$ $(a \cap b)$. Grupoid, jehož polem je množina G a násobení je horní (dolní) násobení, nazýváme *horní* (*dolní*) *grupoid*. Používání symbolů $\cup$, $\cap$, které jsou stejné jako pro součet a průnik množin (**1.5** a **1.6**), nepovede v dalších úvahách k nejasnostem.

1. *Definice svazu.* Dvojice horního a dolního grupoidu se nazývá *svaz na poli G*, stručněji *svaz*, když pro každé prvky $a, b, c \in G$ platí tyto rovnosti:

a) $a \cup b = b \cup a\,,$	a′) $a \cap b = b \cap a\,,$
b) $a \cup a = a\,,$	b′) $a \cap a = a\,,$
c) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c\,,$	c′) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c\,,$
d) $a \cup (a \cap b) = a\,;$	d′) $a \cap (a \cup b) = a\,.$

Každý z obou grupoidů svazu je tedy abelovský [a), a′)] a asociativní [c), c′)] a všechny jeho prvky jsou rovnomocné [b), b′)]. Násobení obou grupoidů spolu souvisí podle vzorců d), d′); tyto vzorce vyjadřují tzv. *absorptivní zákony svazu*.

Poznamenejme, že svaz můžeme definovat jako dvojici soumístných polosvazů, které jsou vzájemně vázány absorptivními zákony.

2. *Příklady.* [1] G je množina všech přirozených čísel $1, 2, 3, \ldots$; $a \cup b$ je nejmenší společný násobek a $a \cap b$ největší společný dělitel čísla a a čísla b.

[2] G je množina všech částí nějaké množiny. $A \cup B$ je součet a $A \cap B$ průnik části A a části B.

[3] G je množina všech rozkladů nějaké neprázdné množiny. $\bar{A} \cup \bar{B}$ je nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ a $\bar{A} \cap \bar{B}$ největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ rozkladu $\bar{A}$ a rozkladu $\bar{B}$.

3. *Základní částečná uspořádání svazu.* Budiž Γ svaz na poli G. Nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné prvky.

Především si všimněme, že *oba vztahy*

$$(\mathrm{h}) \qquad a \cup b = b\,, \quad b \cap a = a$$

platí současně, tj. když platí jeden, platí i druhý.

Vskutku, z platnosti prvního vztahu plyne podle a') a d'):

$$b \cap a = (a \cup b) \cap a = a \cap (a \cup b) = a\,;$$

podobně z platnosti druhého plyne podle a) a d):

$$a \cup b = (b \cap a) \cup b = b \cup (b \cap a) = b\,.$$

Když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme každý prvek $b \in G$, který splňuje rovnosti (h), obdržíme zobecněné zobrazení množiny G na sebe; označíme je $\boldsymbol{h}$.

Zobrazení $\boldsymbol{h}$ *je antisymetrická kongruence na* G. Vskutku, ze vzorců b) a b') vidíme, že je reflexivní. Se zřetelem na vzorec c) soudíme, že ze vztahů $a \cup b = b$, $b \cup c = c$ následuje: $a \cup c = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = b \cup c = c$; z toho vidíme, že zobrazení $\boldsymbol{h}$ je tranzitivní. Je to tedy kongruence na G. Konečně z rovností $a \cup b = b$, $b \cup a = a$ plyne, podle a), že $a = b$.

Zjistili jsme, že kongruence $\boldsymbol{h}$ je antisymetrická, jinými slovy, že zobrazení $\boldsymbol{h}$ je částečné uspořádání množiny G. Nazýváme je *horní částečné uspořádání svazu* Γ.

Připomeňme, že následující symboly mají týž obsah: $a \leqq b$ ($\boldsymbol{h}$), $a \cup b = b$, $b \cap a = a$.

Obdobné úvahy platí, když vyměníme úlohy horního a dolního grupoidu. Potom máme tyto výsledky:

Oba vztahy

$$(\mathrm{d}) \qquad b \cup a = a\,, \quad a \cap b = b$$

platí současně.

Když ke každému prvku $a \in G$ *přiřadíme každý prvek* $b \in G$ *který splňuje rovnosti* (d), *obdržíme na* G *jistou antisymetrickou kongruenci* $\boldsymbol{d}$. Nazýváme ji *dolní částečné uspořádání svazu* Γ.

Vidíme, že následující symboly mají týž obsah: $a \leqq b$ ($\boldsymbol{d}$), $b \cup a = a$, $a \cap b = b$.

Horní a dolní částečné uspořádání svazu Γ nazýváme souhrnně *základní částečná uspořádání.*

Základní částečná uspořádání svazu Γ *jsou vzájemně inverzní, takže* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{h}^{-1}$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{d}^{-1}$. To plyne z toho, že v kongruenci $\boldsymbol{h}$ je každý prvek $b \in G$ obrazem všech prvků $a \in G$, které vyhovují rovnostem (h), a právě tyto prvky jsou obrazy prvku b v kongruenci $\boldsymbol{d}$, jak vidíme ze vzorců (d).

Všimněme si, že symboly $a \leqq b$ ($\boldsymbol{h}$) a $b \leqq a$ ($\boldsymbol{d}$) mají týž obsah.

Např. na hořejším svazu [1] obdržíme horní (dolní) částečné uspořádání tím, že ke každému přirozenému číslu přiřadíme každý jeho kladný násobek (dělitele); na svazu [2] tím, že ke každé množině $A \in G$ přiřadíme každou její nadmnožinu (podmnožinu) $B \in G$; na svazu [3] tím, že ke každému rozkladu $\bar{A} \in G$ přiřadíme každý jeho zákryt (zjemnění) $\bar{B} \in G$.

Vzhledem k hornímu (dolnímu) částečnému uspořádání svazu je prvek $a \cup b$ horní (dolní) a prvek $a \cap b$ dolní (horní) hranicí prvků a, b.

Protože horní a dolní částečné uspořádání jsou vzájemně inverzní, stačí ukázat, že tvrzení je správné např. v případě horního částečného uspořádání (**9.4**.2). Omezíme se na prvek $a \cup b$.

Máme ukázat, že vzhledem ke kongruenci $\boldsymbol{h}$ platí vztahy $a \leqq a \cup b$, $b \leqq a \cup b$ a dále, že ze vztahů $a \leqq c$, $b \leqq c$ následuje $a \cup b \leqq c$.

Správnost vztahů $a \leqq a \cup b$, $b \leqq a \cup b$ plyne z rovností, které platí v důsledku hořejších vzorců **18.6**.1.c), b), a):

$$a \cup (a \cup b) = (a \cup a) \cup b = a \cup b\,,$$
$$b \cup (a \cup b) = b \cup (b \cup a) = (b \cup b) \cup a = b \cup a = a \cup b\,.$$

Vztahy $a \leqq c$, $b \leqq c$ vyjadřují rovnosti

$$a \cup c = c\,, \quad b \cup c = c\,,$$

z nichž následuje, podle **18.6**.1c),

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) = a \cup c = c\,,$$

tj. $a \cup b \leqq c$. Tím je důkaz proveden.

Vidíme tedy, že *vzhledem k hornímu (dolnímu) částečnému uspořádání svazu má každá dvojice prvků svazu horní i dolní hranici; horní hranicí je spojení (průnik) a dolní hranicí je průnik (spojení) obou prvků.*

4. *Poznámka k definici svazu.* Svaz jsme definovali jako dvojici soumístných grupoidů, které mají zvláštní vlastnosti a jejichž násobení jsou vázána jistými zákony. Potom jsme ukázali, že na každém svazu jsou jistá vzájemně inverzní částečná uspořádání, vzhledem k nimž má každá dvojice prvků horní i dolní hranici; horní a dolní hranice jsou součiny obou prvků dvojice v grupoidech svazu.

Naopak lze definici svazu založit na pojmu antisymetrické kongruence. Když je na množině G dána libovolná antisymetrická kongruence, vzhledem k níž má každá dvojice prvků $a, b \in G$ horní hranici $a \cup b$ a dolní hranici $a \cap b$, můžeme na množině G definovat dvě násobení tím, že součin uspořádané dvojice prvků a, b je jednou $a \cup b$ a po druhé $a \cap b$. Dá se snadno ukázat, že dvojice grupoidů na poli G s těmito násobeními je svazem a výchozí antisymetrická kongruence je horním a kongruence k ní inverzní dolním částečným uspořádáním tohoto svazu.

5. *Význačné druhy svazů.* Nechť Γ je svaz na poli G.

a) Svazy s krajními prvky. Když se některý prvek $O \in G$ vyznačuje tím, že pro každý prvek $a \in G$ platí $a \leqq O$ (**h**) [$a \leqq O$ (**d**)], pravíme o něm, že je *největší vzhledem k hornímu (dolnímu) částečnému uspořádání*; když se některý prvek $o \in G$ vyznačuje tím, že vždycky platí $o \leqq a$ (**h**) [$o \leqq a$ (**d**)], nazývá se *nejmenší vzhledem k hornímu (dolnímu) částečnému uspořádání*. Snadno vidíme, přihlédneme-li k současné platnosti vztahů **18.6.3** (h) nebo (d), že *největší prvek vzhledem k hornímu (dolnímu) částečnému uspořádání je nejmenším (největším) vzhledem k částečnému uspořádání dolnímu (hornímu)*. Rovněž je snadné seznat, že ve svazu může být vzhledem k témuž základnímu částečnému uspořádání nejvýše jeden největší a nejvýše jeden nejmenší prvek. Největší a nejmenší prvky vzhledem ke každému základnímu částečnému uspořádání svazu se nazývají *krajními prvky*.

Když ve svazu Γ oba krajní prvky vzhledem k oběma základním částečným uspořádáním existují, pravíme že Γ je svaz s krajními prvky.

Např. hořejší svaz [1] má vzhledem k hornímu částečnému uspořádání nejmenší prvek 1, ale nemá největší prvek; vzhledem k dolnímu částečnému uspořádání má tedy největší prvek 1, ale nemá nejmenší prvek. Svaz [2] je svaz s krajními prvky; největším (nejmenším) prvkem vzhledem k hornímu částečnému uspořádání je množina, z jejíchž částí se pole svazu skládá (prázdná množina). Rovněž [3] je svaz s krajními prvky; největším (nejmenším) prvkem svazu vzhledem k hornímu částečnému uspořádání je největší (nejmenší) rozklad na množině, z jejíchž rozkladů se svaz skládá.

b) Svazy modulární (Dedekindovy). Když pro některé prvky $a, b, c \in G$, které se vyznačují tím, že $a \leqq c$ (**h**), platí rovnost

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c\,,$$

pravíme, že *trojčlenná posloupnost prvků a, b, c splňuje horní modulární* neboli *horní Dedekindův vztah*; podobně, když je $a \leqq c$ (**d**) a platí rovnost

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c\,,$$

pravíme, že *ona posloupnost splňuje dolní modulární* neboli *dolní Dedekindův vztah.*

Je zřejmé, že *když trojčlenná posloupnost prvků a, b, c splňuje horní (dolní) Dedekindův vztah, pak inverzní posloupnost c, b, a splňuje dolní (horní) Dedekindův vztah.*

Svaz Γ se nazývá *modulární* neboli *Dedekindův*, když každá trojčlenná posloupnost prvků $a, b, c \in G$, v níž je $a \leqq c$ (**h**) ($a \leqq c$ (**d**)) splňuje horní (dolní) Dedekindův vztah.

Např. hořejší svaz [2] je Dedekindův, neboť pro každé tři části A, B, C libovolné množiny, které se vyznačují tím, že $A \subset C$, platí rovnost $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (**1.10.5**; **1.10.3**). Připomeňme, že současně má tento svaz krajní prvky.

6. *Homomorfní zobrazení (deformace) svazů.* Pojem homomorfního zobrazení, definovaný pro grupoidy (**13.1**), dá se bez obtíží převést na svazy.

Buďte Γ, Γ^* libovolné svazy.

Zobrazení $\boldsymbol{d}$ svazu Γ do svazu Γ^* se nazývá *homomorfní zobrazení* neboli *deformace*, když současně zachovává obě svazová násobení, tj. když pro libovolné prvky $a, b \in \Gamma$ současně platí:

$$\boldsymbol{d}(a \cup b) = \boldsymbol{d}a \cup \boldsymbol{d}b\,; \quad \boldsymbol{d}(a \cap b) = \boldsymbol{d}a \cap \boldsymbol{d}b\,.$$

Podobně se na svazy dají převést další pojmy související s pojmem deformace. Zejména nazýváme prostou deformaci svazu Γ do svazu Γ^* *izomorfním zobrazením* a jde-li o zobrazení na svaz Γ^*, izomorfismem. Když je svaz Γ nějakým izomorfismem $\boldsymbol{i}$ zobrazen na svaz Γ^*, pravíme, že svaz Γ^* je izomorfním obrazem svazu Γ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$.

18.7. Cvičení

1. Když je permutace $\boldsymbol{p}$ nějaké množiny složena z permutací $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ $(n \geqq 2)$, pak inverzní permutace $\boldsymbol{p}^{-1}$ je složena z permutací $\boldsymbol{p}_n^{-1}, \ldots, \boldsymbol{p}_1^{-1}$.

2. Každá cyklická permutace nějaké konečné množiny, jejíž cyklus je alespoň dvojčlenný, se dá složit z několika transpozic, a to podle vzorce: $(a, b, c, \ldots, k, l, m) = (a, b)\,(b, c) \ldots (k, l)\,(l, m)$.

3. Označme (kvůli přehlednosti dolejšího vzorce) prvky nějaké množiny H řádu n $(\geqq 2)$, číslicemi $1, \ldots, n$. Každá transpozice $(i, i + j)$ množiny H se dá složit z několika transpozic $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n)$, a to podle vzorce: $(i, i + j) = (i + j - 1, i + j) \ldots (i + 1, i + 2)\,(i, i + 1)\,(i + 1, i + 2) \ldots (i + j - 1, i + j)$. Každá permutace množiny H se dá složit z několika transpozic $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n)$.

4. Když má grupoid $\mathfrak{G}$ jednotku, pak její obraz v každé deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ je jednotkou obrazu $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$.

5. Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na libovolném grupoidu s jednotkou $\mathfrak{G}$ má jednotku; onen prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje jednotku grupoidu $\mathfrak{G}$, je jednotkou faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$.

6. Uveďte příklady grupoidů, které mají jenom jednu nebo (s výjimkou grup) právě dvě vlastnosti popsané v odst. **18.1, 18.3** a **18.4.**

7. Každá konečná semigrupa je grupou.

8. V pologrupě nezávisí součin libovolné n-členné posloupnosti prvků $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ na jejich pořadí, jsou-li každé dva prvky a_i, a_j vzájemně zaměnitelné. V abelovské pologrupě nezávisí součin libovolné konečné posloupnosti prvků na jejich pořadí.

9. V libovolném Brandtově grupoidu plynou z rovnosti $ab = c$ pro pravé a levé jednotky prvků a, b, c; a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} následující vztahy, z nichž naopak každý stačí k tomu, aby ona rovnost platila: b a c, c^{-1} a a^{-1}, a a b^{-1} mají vždy tytéž pravé jednotky; b^{-1} a c^{-1}, c a a, a^{-1} a b mají vždy tytéž levé jednotky (které se rovnají příslušným pravým jednotkám).

10. V libovolném Brandtově grupoidu se nazývají prvky, které mají stejnou pravou a současně stejnou levou jednotku, *vzájemně dvojnásob příslušné*. Všechny prvky, které dvojnásob přísluší k některé jednotce, tvoří grupu. Komplexy prvků, které jsou vzájemně dvojnásob příslušné, tvoří opět Brandtův grupoid; jeho jednotkami jsou grupy složené z prvků dvojnásob příslušných k jednotkám.

11. Vlastnosti horního a dolního grupoidu požadované v definici svazu (**18.6.1**) nejsou nezávislé, neboť vlastnosti b), b′) jsou důsledkem ostatních. Přesvědčte se o tom tím, že aplikujete rovnost d′) [d)] na prvky $a, b = a$ a rovnost d) [d′)] na prvky $a, b = a \cup a$ $[a, b = a \cap a]$.

12. Když se nějaký svaz skládá z rozkladů na množině G, z nichž každé dva jsou doplňkové, a když násobení jsou definována jako v hořejším příkladě [3], pak je modulární.

13. Svaz je modulární tehdy a jen tehdy, když v něm každé tři prvky a, b, c splňují rovnost: $(a \cup b) \cap [c \cup (a \cap b)] = (a \cap b) \cup [c \cap (a \cup b)]$.

14. Izomorfní obraz každého modulárního svazu je opět modulární.

15. Budiž Γ libovolný svaz rozkladů na množině G se svazovými operacemi [ ] a ( ). Libovolná řada rozkladů na G, jejíž všechny členy jsou prvky v Γ, se nazývá *hlavní řada* svazu Γ, když každé její zjemnění obsahující pouze prvky svazu Γ je jejím prodloužením. Platí tyto věty: a) *když svaz Γ obsahuje největší (nejmenší) prvek, pak jím začíná (končí) každá hlavní řada svazu Γ*; b) *všechny vzájemně doplňkové hlavní řady svazu Γ mají touž redukovanou délku.*