16. Deformace faktoroidů

16.1. Věty o izomorfismu grupoidů

Přistoupíme nyní k úvahám o tzv. *větách o izomorfismu grupoidů*. Tyto věty popisují situace, které se vyskytují při homomorfních zobrazováních grupoidů popř. faktoroidů a souvisí s pojmem izomorfismu. Množinová struktura těchto vět je vyjádřena větami o ekvivalenci, o nichž jsme jednali v odst. **6.8**.

1. *První věta*. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. V odst. **14.2** jsme ukázali, že rozklad $\bar{D}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ je vytvořující. Nechť $\bar{\mathfrak{D}}$ značí faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $\bar{D}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ přiřadíme onen prvek $a^* \in \mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se $\bar{a}$ skládá, obdržíme jisté prosté zobrazení faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$; označme je $\boldsymbol{i}$. Podle definice zobrazení $\boldsymbol{i}$ platí tedy rovnost $\boldsymbol{i}\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, a to pro každý prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ a každý prvek $a \in \bar{a}$. Nechť $\bar{a}$, $\bar{b}$ značí libovolné prvky v $\bar{\mathfrak{D}}$ a nechť a je libovolný prvek v $\bar{a}$ a b libovolný prvek v $\bar{b}$. Pak platí vztahy: $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ a odtud plyne $\boldsymbol{i}(\bar{a} \circ \bar{b}) = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{i}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{b}$. Máme tedy rovnost $\boldsymbol{i}(\bar{a} \circ \bar{b}) = \boldsymbol{i}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{b}$, která vyjadřuje, že $\boldsymbol{i}$ je deformace, a tedy (protože je prostá) izomorfismus faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ na $\mathfrak{G}^*$. Tím jsme došli k poznatku, že když existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak na $\mathfrak{G}$ existuje faktoroid izomorfní s $\mathfrak{G}^*$, a to faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ příslušný k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$, přičemž izomorfismus je výše definované zobrazení $\boldsymbol{i}$. O faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ pravíme, že *patří* neboli *přísluší* k deformaci $\boldsymbol{d}$.

Nechť nyní naopak $\bar{\mathfrak{D}}$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ a nechť $\boldsymbol{d}$ značí zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\bar{\mathfrak{D}}$ definované takto: Obraz v $\boldsymbol{d}$ libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ je onen prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$, v němž a leží, tj. pro nějž platí $a \in \bar{a}$. Snadno ukážeme, že $\boldsymbol{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\bar{\mathfrak{D}}$. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $a, b \in \mathfrak{G}$ a o oněch prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$, které obsahují a, b, takže $\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, $\bar{b} = \boldsymbol{d}b$. Ze vztahů $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ plyne $ab \in \bar{a} \circ \bar{b}$ a dále $\boldsymbol{d}ab = \bar{a} \circ \bar{b} = \boldsymbol{d}a \circ \boldsymbol{d}b$, takže skutečně zobrazení $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{D}}$. Vychází tedy, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovat na každý faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ ležící na $\mathfrak{G}$, a to tak, že se každý prvek v $\mathfrak{G}$ zobrazí na onen prvek v $\bar{\mathfrak{D}}$, v němž leží. Odtud plyne dále, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovat na každý grupoid $\mathfrak{G}^*$, který je izomorfní s některým faktoroidem na $\mathfrak{G}$.

Hořejší výsledky stručně shrnuje tzv. *první věta o izomorfismu grupoidů*:

Když grupoid $\mathfrak{G}^*$ je homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$, pak je izomorfní s jistým faktoroidem na $\mathfrak{G}$; když grupoid $\mathfrak{G}^*$ je izomorfní s některým faktoroidem na grupoidu $\mathfrak{G}$, pak je homomorfní s $\mathfrak{G}$. Zobrazení faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ patřícího k deformaci $\boldsymbol{d}$

*grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$, v němž se každý prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ zobrazí na **d**-obraz bodů grupoidu $\mathfrak{G}$ obsažených v prvku $\bar{a}$, je izomorfismus.*

2. *Druhá věta.* Buďte $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ spřažené faktoroidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Každý prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ je tedy incidentní právě s jedním prvkem v $\bar{\mathfrak{B}}$ a současně je každý prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ incidentní právě s jedním prvkem v $\bar{\mathfrak{A}}$ (**15**.3.3). Když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{B}}$, který je s ním incidentní, obdržíme prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$. Ukážeme, že toto zobrazení $\boldsymbol{i}$ představuje izomorfismus faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$.

Za tím účelem vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{\mathfrak{A}}$ a s nimi incidentní prvky $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$, takže $\bar{b}_1 = \boldsymbol{i}\bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = \boldsymbol{i}\bar{a}_2$. Položme $\bar{x}_1 = \bar{a}_1 \cap \bar{b}_1$ $(\neq \emptyset)$, $\bar{x}_2 = \bar{a}_2 \cap \bar{b}_2$ $(\neq \emptyset)$. Zřejmě platí vztahy: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$, $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$, přičemž ovšem $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \in \bar{\mathfrak{A}}$ $(\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}})$ značí součin z prvku $\bar{a}_1$ $(\bar{b}_1)$ a $\bar{a}_2$ $(\bar{b}_2)$. Máme tedy: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \cap \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$ a vidíme, že prvek $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$ je incidentní s prvkem $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$. Odtud plyne $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 = \boldsymbol{i}(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2)$ a vychází $\boldsymbol{i}(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2) = \boldsymbol{i}\bar{a}_1 \circ \boldsymbol{i}\bar{a}_2$. Tím je důkaz ukončen.

Výsledek, k němuž jsme došli, shrnuje tzv. *druhá věta o izomorfismu grupoidů*:

Každé dva spřažené faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou izomorfní, tedy $\bar{\mathfrak{A}} \simeq \bar{\mathfrak{B}}$. *Zobrazení faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$, které obdržíme, když ke každému prvku v $\bar{\mathfrak{A}}$ přiřadíme onen prvek v $\bar{\mathfrak{B}}$, jenž s ním inciduje, je izomorfismus.*

Důležitý zvláštní případ (**15**.3.3) této věty se týká izomorfismu obalu a průseku podgrupoidu $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{G}$ a faktoroidu $\bar{\mathfrak{Y}}$ v $\mathfrak{G}$: *V případě $X \cap \mathsf{s}\bar{Y} \neq \emptyset$ platí vztah:*

$$\mathfrak{X} \sqsubset \bar{\mathfrak{Y}} \simeq \bar{\mathfrak{Y}} \sqcap \mathfrak{X},$$

přičemž izomorfismus je realizován incidencí prvků. X popř. $\bar{Y}$ značí pole grupoidu $\mathfrak{X}$ popř. $\bar{\mathfrak{Y}}$.

3. *Třetí věta.* Nechť $\bar{\mathfrak{B}}$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ na $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ a libovolný faktoroid na $\bar{\mathfrak{B}}$. Jak víme (**15**.4.1), vynucuje faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ jistý zákryt $\bar{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Připomeňme si, že $\bar{\mathfrak{A}}$ je faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek je součtem všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, které jsou obsaženy vždy v témž prvku faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$. Když ke každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$, který je součtem všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ ležících v prvku $\bar{\bar{b}}$, obdržíme jisté zobrazení, označme je $\boldsymbol{i}$, faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ na faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$. Ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ je izomorfismus.

Především je zřejmé, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ je prosté. Abychom ukázali, že je deformací, uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2 \in \bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ a o součinu $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ prvku $\bar{\bar{b}}_1$ s prvkem $\bar{\bar{b}}_2$. Podle definice násobení faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ platí pro každý prvek $\bar{b}_1 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsažený v $\bar{\bar{b}}_1$ a každý prvek $\bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsažený v $\bar{\bar{b}}_2$ vztah $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$. Nechť $\bar{a}_1$ značí onen prvek zákrytu $\bar{\mathfrak{A}}$, který je součtem všech prvků $\bar{b}_1 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsažených v $\bar{\bar{b}}_1$, tedy $\bar{a}_1 = \bigcup \bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, a podobně, nechť $\bar{a}_2 = \bigcup \bar{b}_2$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, $\bar{a}_3 = \bigcup \bar{b}_3$ $(\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3)$, takže $\bar{a}_1 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1$, $\bar{a}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$, $\bar{a}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\mathfrak{A}}$. Pak ze vztahu $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$ plyne především $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$ a dále $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \bigcup \bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bigcup \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$, a odtud vychází, že $\bar{a}_3$ je onen prvek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, který obsahuje $\bar{a}_1\bar{a}_2$, takže $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$. Tato rovnost se dá psát ve tvaru $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1 \circ \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$ a vyjadřuje, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ je deformace, a tedy (protože je prosté) izomorfismus. Došli jsme k výsledku, který stručně vyjadřuje tzv. *třetí věta o izomorfismu grupoidů*:

Libovolný faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na nějakém faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ a zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ vynucený faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ jsou izomorfní, tj. $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \simeq \overline{\mathfrak{A}}$. Zobrazení faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$, jímž se každý prvek $\overline{\overline{b}} \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ zobrazí na součet prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ obsažených v $\overline{\overline{b}}$, je izomorfismus.

16.2. Rozšířené deformace

Budiž $\boldsymbol{d}$ libovolná deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$.

Z odst. **16.1.1** víme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ je izomorfní s faktoroidem $\overline{\mathfrak{D}}$ příslušným k deformaci $\boldsymbol{d}$, tj. s faktoroidem na grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož polem je rozklad $\overline{D}$, příslušný k deformaci $\boldsymbol{d}$.

Z odst. **7.1** víme, že deformace $\boldsymbol{d}$ určuje rozšířené zobrazení $\bar{\boldsymbol{d}}$ systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$ do systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}^*$; v tomto zobrazení je obrazem každé podmnožiny $A \subset \mathfrak{G}$ podmnožina $\boldsymbol{d}A \subset \mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků $a \in A$; mimoto klademe $\boldsymbol{d}\emptyset = \emptyset$. Někdy místo $\bar{\boldsymbol{d}}$ píšeme stručněji $\boldsymbol{d}$, tedy např. $\boldsymbol{d}A$ místo $\bar{\boldsymbol{d}}A$.

Uvažujme o libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$. Jeho polem je jistý vytvořující rozklad $\overline{A}$.

Podle věty v odst. **7.2** je $\boldsymbol{d}\overline{A}$ rozkladem grupoidu $\mathfrak{G}^*$ tehdy a jen tehdy, když rozklady $\overline{A}$, $\overline{D}$ jsou doplňkové, tj. když faktoroidy $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ jsou doplňkové.

Předpokládejme, že tato podmínka je splněna.

1. Snadno vidíme, že *rozklad $\boldsymbol{d}\overline{A}$ je vytvořující.* Vskutku, buďtež $\bar{a}^*$, $\bar{b}^* \in \boldsymbol{d}\overline{A}$ libovolné prvky. Pak existují prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in \overline{A}$ takové, že $\boldsymbol{d}\bar{a} = \bar{a}^*$, $\boldsymbol{d}\bar{b} = \bar{b}^*$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Podle věty **13.3.2** máme: $\boldsymbol{d}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$, a vidíme, že existuje prvek $(\boldsymbol{d}\bar{c} =)\ \bar{c}^* \in \boldsymbol{d}\overline{A}$ takový, že $\bar{a}^*\bar{b}^* \subset \bar{c}^*$. Tím je zjištěno, že rozklad $\boldsymbol{d}\overline{A}$ je vytvořující.

Faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}^*$, jehož polem je vytvořující rozklad $\boldsymbol{d}\overline{A}$, se nazývá *obraz faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$* a označuje se symbolem $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$; faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ se nazývá *vzor faktoroidu $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$.*

2. Rozšířeným zobrazením $\boldsymbol{d}$ je určeno částečné zobrazení faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$, jímž je ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ přiřazen jeho obraz $\boldsymbol{d}\bar{a} \in \boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$. V dalším výkladu rozumíme zobrazením $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$ toto částečné zobrazení.

Ukážeme, že *zobrazení $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$ je deformací.* Vskutku, ze vztahů $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in \overline{\mathfrak{A}}$, $\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}$ plyne $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a dále $\boldsymbol{d}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$, takže máme $\boldsymbol{d}\bar{a} \circ \boldsymbol{d}\bar{b} = \boldsymbol{d}\bar{c} = \boldsymbol{d}(\bar{a} \circ \bar{b})$, a tím je důkaz proveden.

Se zřetelem na tento výsledek nazýváme zobrazení $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$ *rozšířenou deformací $\boldsymbol{d}$.*

3. K rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\overline{\mathfrak{A}}$ přísluší jistý faktoroid

$\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$. Jeho prvky se skládají vždy ze všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, které mají v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ týž obraz.

Se zřetelem na větu v odst. **7.2**, soudíme, že zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ je nejmenší společný zákryt $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}$.

Když ke každému prvku $\bar{u} \in [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ přiřadíme onen prvek $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathfrak{A}}}$, který obsahuje prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ ležící v $\bar{u}$, obdržíme izomorfní zobrazení faktoroidu $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ na faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ (**16.1.**3); když ke každému prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a}^* \in \boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$, jenž je obrazem každého prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ ležícího v $\bar{\bar{a}}$, obdržíme izomorfní zobrazení faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ (**16.1.**1). Složením těchto izomorfních zobrazení obdržíme izomorfní zobrazení faktoroidu $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ (**13.4**). V něm je ke každému prvku $\bar{u} \in [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ přiřazen jistý prvek $\bar{a}^* \in \boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$, který je obrazem prvku $\bar{u}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ (**7.2**).

Tím jsme došli k tomuto výsledku:

Když se nějaký faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ zobrazí v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ na nějaký faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}^*$ na $\mathfrak{G}^*$, pak jsou faktoroidy $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$, $\bar{\mathfrak{A}}^*$ izomorfní. Izomorfní zobrazení faktoroidu $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ na $\bar{\mathfrak{A}}^*$ obdržíme, když ke každému prvku prvního faktoroidu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$.

Zejména je každý faktoroid, který je zákrytem faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$, izomorfní se svým obrazem v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$; izomorfní zobrazení obdržíme, když ke každému prvku zákrytu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$.

16.3. Deformace posloupností grupoidů a α-stupňových grupoidních útvarů

V této kapitole se budeme zabývat některými složitějšími situacemi v souvislosti s deformacemi posloupností grupoidů a α-stupňových grupoidních útvarů. Příslušné úvahy vyplývají přirozeným způsobem ze situací, o nichž jsme jednali v odst. **6.9**, tím, že do úvah přibereme i algebraickou stránku vyplývající z násobení.

1. *Zobrazení posloupností grupoidů.* Nechť α $(\geqq 1)$ je libovolné přirozené číslo.

Vezměme v úvahu dvě α-členné posloupnosti: $(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha)$, $(\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha)$, jejichž členy $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha$; $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha$ jsou grupoidy.

a) Posloupnost $(\mathfrak{b})$ nazýváme *izomorfní* s posloupností $(\mathfrak{a})$, když je tato situace: Existuje zobrazení $\boldsymbol{a}$ posloupnosti $(\mathfrak{a})$ na posloupnost $(\mathfrak{b})$ vyznačující se tím, že ke každému členu $\mathfrak{a}_\gamma$ posloupnosti $(\mathfrak{a})$ existuje izomorfismus $\boldsymbol{i}_\gamma$ členu $\mathfrak{a}_\gamma$ na člen $\mathfrak{b}_\delta = \boldsymbol{a}\mathfrak{a}_\gamma$ posloupnosti $(\mathfrak{b})$.

Když je posloupnost $(\mathfrak{b})$ izomorfní s posloupností $(\mathfrak{a})$, pak zřejmě má posloupnost $(\mathfrak{a})$ touž vlastnost vzhledem k $(\mathfrak{b})$. Se zřetelem na tuto symetrii mluvíme o *izomorfních posloupnostech* $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$.

b) Nyní předpokládejme, že členy $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha$ posloupnosti $(\mathfrak{a})$ a též členy $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha$ posloupnosti $(\mathfrak{b})$ jsou faktoroidy v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Posloupnost $(\mathfrak{b})$ se nazývá *polospřažená* neboli *volně spřažená* (*spřažená*) *s posloupností* $(\mathfrak{a})$, když posloupnost $(b) = (b_1, \ldots, b_\alpha)$ složená z polí členů posloupnosti $(\mathfrak{b})$ je polospřažená (spřažená) s posloupností $(a) = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ skládající se z polí členů posloupnosti $(\mathfrak{a})$ (**6.9**.1c).

Když je posloupnost $(\mathfrak{b})$ je volně spřažená (spřažená) s posloupností $(\mathfrak{a})$, má posloupnost $(\mathfrak{a})$ vzhledem $(\mathfrak{b})$ touž vlastnost. Se zřetelem na tuto symetrii mluvíme o *polospřažených* neboli *volně spřažených* (*spřažených*) *posloupnostech* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b})$.

Podle druhé věty o izomorfismu grupoidů (**16.1.**2) soudíme, že *každé dvě spřažené posloupnosti faktoroidů v grupoidu* $\mathfrak{G}$ *jsou izomorfní.*

2. *Deformace α-stupňových grupoidních útvarů.* Budiž α $(\geqq 1)$ přirozené číslo a $((\mathfrak{A}) =) (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha)$, $((\mathfrak{A}^*) =) (\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha^*)$ libovolné posloupnosti grupoidů. Dále budiž $\tilde{\mathfrak{A}}$ libovolný α-stupňový grupoidní útvar vzhledem k posloupnosti $(\mathfrak{A})$ a $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ rovněž takový útvar vzhledem k posloupnosti $(\mathfrak{A}^*)$ (**15.5**).

Připomeňme, že každý prvek $\bar{\bar{a}} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ $(\bar{\bar{a}}^* \in \tilde{\mathfrak{A}}^*)$ představuje α-člennou posloupnost množin, $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$ $(\bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*))$, jejíž každý člen $\bar{a}_\gamma$ (a_γ^*) je komplexem v grupoidu $\mathfrak{A}_\gamma$ $(\mathfrak{A}_\gamma^*)$; $\gamma = 1, \ldots, \alpha$.

Předpokládáme, že existuje izomorfismus $\boldsymbol{i}$ útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$. Pak pro každé dva prvky $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{A}$ máme: $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}} = \boldsymbol{i}(\bar{\bar{a}} \,.\, \bar{\bar{b}})$.

a) Pravíme, že $\boldsymbol{i}$ je *silný izomorfismus* útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, když nastane tato situace:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny čísel $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem: Ke každému členu $\bar{a}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ libovolného prvku $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ existuje prostá funkce $\boldsymbol{a}_\gamma$, kterou se množina $\bar{a}_\gamma$ zobrazí na množinu $\bar{a}_\delta^*$, obsaženou jako δ-tý člen v prvku $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \tilde{\mathfrak{A}}^*$; přitom je $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Mimoto nastává tento "deformační zjev": Buďte $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ libovolné prvky a $\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ příslušný součin; podle definice útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ máme vztahy: $\bar{a}_\gamma\bar{b}_\gamma \subset \bar{c}_\gamma$. Dále buďte $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (a_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*)$, $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}}^* = (\bar{b}_1^*, \ldots, \bar{b}_\alpha^*)$ obrazy prvků $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}$ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$ a $\bar{\bar{a}}^*\bar{\bar{b}}^* = \bar{\bar{c}}^* = (\bar{c}_1^*, \ldots, \bar{c}_\alpha^*)$ příslušný součin, takže $\bar{a}_\gamma^*\bar{b}_\gamma^* \subset \bar{c}_\gamma^*$. Konečně buďte $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\gamma$, $\boldsymbol{c}_\gamma$ výše zmíněné prosté funkce patřící k členům $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\gamma$, $\bar{c}_\gamma$; jimi se množiny $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\gamma$ zobrazí prostě na množiny $\bar{a}_\delta^*$, $\bar{b}_\delta^*$ a (vzhledem k $\boldsymbol{i}\bar{\bar{c}} = \bar{\bar{c}}^*$) množina $\bar{c}_\gamma$ na $\bar{c}_\delta^*$ $(\delta = \boldsymbol{p}\gamma)$. Nuže, výše zmíněný deformační zjev se dá popsat takto: Pro každé dva body $a \in \bar{a}_\gamma$, $b \in \bar{b}_\gamma$ platí rovnost: $\boldsymbol{a}_\gamma a \,.\, \boldsymbol{b}_\gamma b = \boldsymbol{c}_\gamma(ab)$.

Snadno seznáme, že zobrazení $\boldsymbol{i}^{-1}$, které je inverzní k silnému izomorfismu $\boldsymbol{i}$ útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, představuje silný izomorfismus v opačném směru, tj. silný izomorfismus útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Když existuje silný izomorfismus útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, pravíme, že útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ je *silně izomorfní s útvarem* $\tilde{\mathfrak{A}}$. Zřejmě je tento pojem symetrický vzhledem k oběma útvarům $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{A}}^*$; s ohledem na tuto symetrii mluvíme někdy o *silně izomorfních grupoidních útvarech* $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{A}}^*$.

b) Nyní předpokládejme, že posloupnosti grupoidů $(\mathfrak{A})$ a $(\mathfrak{A}^*)$ se skládají z faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ a $\overline{\mathfrak{A}}_1^*, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha^*$ v grupoidu $\mathfrak{G}$. V tomto případě je libovolný prvek $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ $(\bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \tilde{\mathfrak{A}})$ α-člennou posloupností a každý člen $\bar{a}_\gamma$ $(\bar{a}_\gamma^*)$ představuje rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$, který je komplexem ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ $(\overline{\mathfrak{A}}_\gamma^*)$.

Pravíme, že $\boldsymbol{i}$ *je izomorfismus spojený s polospřažením* neboli *izomorfismus spojený s volným spřažením* (*izomorfismus spojený se spřažením*) útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, když nastane tato situace:

Existuje permutace $\boldsymbol{p}$ množiny čísel $\{1, \ldots, \alpha\}$ s tímto účinkem: Každý člen $\bar{a}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ v libovolném prvku $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ a člen $\bar{a}_\delta^*$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, v odpovídajícím prvku $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \tilde{\mathfrak{A}}^*$, představují polospřažené (spřažené) rozklady v grupoidu $\mathfrak{G}$.

Snadno seznáme, že zobrazení $\boldsymbol{i}^{-1}$, které je inverzní k izomorfismu $\boldsymbol{i}$ spojenému s volným spřažením (k izomorfismu spojenému se spřažením) útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, je izomorfismem téhož druhu v opačném směru.

Budiž $\boldsymbol{i}$ izomorfismus spojený s volným spřažením útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$. Vezměme v úvahu libovolné členy $\bar{a}_\gamma$, $\bar{a}_\delta^*$, které jsou ve výše popsaném vztahu, takže $\bar{a}_\gamma$ je členem v posloupnosti $\bar{\bar{a}}$, $\bar{a}_\delta^*$ v posloupnosti $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^*$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. V této situaci jsou obaly $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{a}_\delta^* \sqsubset \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{a}_\delta^* = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{a}_\delta^*$ neprázdné a spřažené (**4.1**).

Budiž $\boldsymbol{a}_\gamma$ zobrazení obalu $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ na obal $\mathrm{H}\bar{a}_\delta^*$ definované incidencí prvků. Podle druhé věty o ekvivalenci (**6.8**) je zobrazení $\boldsymbol{a}_\gamma$ prosté. Vidíme, že pro každý prvek $a \in \mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ platí rovnost $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^*$ $(\in \mathrm{H}\bar{a}_\delta^*)$ právě tehdy, když $a \cap a^* \neq \emptyset$.

Ukážeme, že *pro zobrazení* $\boldsymbol{a}_\gamma$ *obalů* $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ *přiřazených k jednotlivým členům* $\bar{a}_\gamma$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ *prvků* $\bar{\bar{a}} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ *nastává výše popsaný deformační zjev.*

Vskutku, buďte $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{\bar{b}} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ libovolné prvky a $\overline{\overline{ab}} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ jejich součin; dále buďte $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*)$, $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}}^* = (\bar{b}_1^*, \ldots, \bar{b}_\alpha^*) \in \tilde{\mathfrak{A}}^*$ obrazy prvků $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}$ v izomorfismu $\boldsymbol{i}$ a $\bar{\bar{a}}^*\bar{\bar{b}}^* = \bar{\bar{c}}^* = (\bar{c}_1^*, \ldots, \bar{c}_\alpha^*) \in \tilde{\mathfrak{A}}^*$ jejich součin; konečně nechť $\boldsymbol{a}_\gamma, \boldsymbol{b}_\gamma, \boldsymbol{c}_\gamma$ značí příslušná prostá zobrazení obalů $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{c}_\gamma$.

Vezměme do úvahy libovolné prvky $a \in \mathrm{H}\bar{a}_\gamma$, $b \in \mathrm{H}\bar{b}_\gamma$, jejich obrazy $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^* \in \mathrm{H}\bar{a}_\delta$, $\boldsymbol{b}_\gamma b = b^* \in \mathrm{H}\bar{b}_\delta$ a příslušné součiny $c = a \circ b \in \bar{c}_\gamma$, $c^* = a^* \circ b^* \in \bar{c}_\delta^*$. Pak máme $a \cap a^* \neq \emptyset \neq b \cap b^*$ a dále:

$$c = a \circ b \supset ab \supset (a \cap a^*)(b \cap b^*),$$
$$c^* = a^* \circ b^* \supset a^*b^* \supset (a^* \cap a)(b^* \cap b).$$

Vidíme, že prvky c a c^* jsou incidentní. Máme tedy: $c \in \mathrm{H}\bar{c}_\gamma$, $c^* \in \mathrm{H}\bar{c}_\delta$, dále $c^* = \boldsymbol{c}_\gamma c$, takže vychází $\boldsymbol{a}_\gamma a \circ \boldsymbol{b}_\gamma b = \boldsymbol{c}_\gamma(a \circ b)$. Tím je důkaz proveden.

Když $\boldsymbol{i}$ je zejména izomorfismus spojený se spřažením, splývají uvažované obaly s příslušnými prvky. Vidíme, že *každý izomorfismus se spřažením útvaru* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *na útvar* $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ *představuje silný izomorfismus.*

Když existuje izomorfismus spojený s polospřažením (izomorfismus spojený se spřažením) útvaru $\tilde{\mathfrak{A}}$ na útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, pravíme, že útvar $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ je *izomorfní a polospřažený* neboli *izomorfní a volně spřažený* (*izomorfní a spřažený*) *s útvarem* $\tilde{\mathfrak{A}}$. Tyto pojmy jsou symetrické vzhledem k oběma útvarům $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{A}}^*$; proto někdy hovoříme o *izomorfních a polospřažených* neboli *izomorfních a volně spřažených* (*izomorfních a spřažených*) *grupoidních útvarech* $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{A}}^*$. *Zejména jsou každé dva izomorfní a spřažené* α*-stupňové grupoidní útvary silně izomorfní.*

16.4. Cvičení

1. Ujasněte si věty o izomorfismu grupoidů na příkladě grupoidů $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_m$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$, o nichž byla řeč v odst. **15.2**, **15.3**.2, **15.4**.1.

2. Budiž $\boldsymbol{i}$ izomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{i}$ je jistý faktoroid $\boldsymbol{i}\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a částečné rozšířené zobrazení $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na $\boldsymbol{i}\bar{\mathfrak{A}}$ je izomorfismus.

3. Budiž $\boldsymbol{d}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$. Každý faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}^*$ na grupoidu $\mathfrak{G}^*$ je v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ obrazem jistého faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, který leží na grupoidu $\mathfrak{G}$ a je zákrytem faktoroidu příslušného k deformaci $\boldsymbol{d}$.

4. Každé dva adjungované řetězce faktoroidů v grupoidu $\mathfrak{G}$ mají spřažená zjemnění. (Srov. **15.3**.5; **6.10**.9.)