13. Homomorfní zobrazení (deformace) grupoidů

13.1. Definice

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili (**12.2**), rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G^* grupoidu $\mathfrak{G}^*$, a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly, které jsme popsali (v kap. 6) při studiu zobrazení množin. Podle této definice se tedy týká pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem mít nějaký vztah k násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^*$. Pro teorii grupoidů jsou nejdůležitější tzv. homomorfní zobrazení, která, stručně řečeno, jsou charakterizována tím, že zachovávají násobení v obou grupoidech. Podrobná definice je tato:

Libovolné zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ se nazývá *homomorfní*, když součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení $\boldsymbol{d}$, tj. když pro $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $\boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b$.

Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *homomorfismus*. Název homomorfní zobrazení je v literatuře ustálen, ale je dlouhý, a proto budeme zpravidla místo něho používat názvu *deformace*.

Již při studiu zobrazení množin jsme si všimli, že nemusí vždycky existovat zobrazení nějaké množiny na libovolnou jinou množinu; odtud plyne, že zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, a ovšem tím méně deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, nemusí existovat. Jestliže nějaká deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje, pak pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ je *homomorfní* s grupoidem $\mathfrak{G}$.

13.2. Příklad deformace

Nechť např. n značí libovolné přirozené číslo a $\boldsymbol{d}$ zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ na grupoid $\mathfrak{Z}_n$ definované takto: Pro $a \in \mathfrak{Z}$ je $\boldsymbol{d}a \in \mathfrak{Z}_n$ zbytek dělení čísla a číslem n. Snadno zjistíme, že $\boldsymbol{d}$ je deformace, a tedy homomorfismus grupoidu $\mathfrak{Z}$ na $\mathfrak{Z}_n$. Vskutku, nechť a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{Z}$. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}$ je součin ab prvku a s prvkem b součet $a + b$ a podle definice zobrazení $\boldsymbol{d}$ jsou $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}ab$ zbytky dělení čísel $a, b, a + b$ číslem n. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}_n$, je součin $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b$ prvku $\boldsymbol{d}a$

$\mathbf{d}b: \mathbf{d}a + \mathbf{d}b = n(\mathbf{d}a + \mathbf{d}b)_0 + \mathbf{d}a \cdot \mathbf{d}b$ $\mathbf{d}(a \cdot b): a + b = n(a+b)_0 + \mathbf{d}(\ldots$
$= na_0 + \mathbf{d}a$ $a + b = n(a_0 + b_0) + \mathbf{d}a + \mathbf{d}b =$
$= nb_0 + \mathbf{d}b$ $= n[a_0 + b_0 + (\mathbf{d}a + \mathbf{d}b)_0] + \mathbf{d}a \cdot \mathbf{d}b$

s prvkem $\mathbf{d}b$ zbytek dělení čísla $\mathbf{d}a + \mathbf{d}b$ číslem n, a protože čísla $\mathbf{d}a + \mathbf{d}b$, $a + b$ se liší jenom o celý násobek čísla n, je $\mathbf{d}a\mathbf{d}b$ zbytek dělení čísla $a + b$ číslem n. Odtud vychází rovnost $\mathbf{d}a\mathbf{d}b = \mathbf{d}ab$ a vidíme, že zobrazení $\mathbf{d}$ je deformace. Při dalším studiu grupoidů se setkáme ještě častěji s příklady deformace, a proto se prozatím spokojíme s tímto jedním příkladem.

13.3. Vlastnosti deformace

Nechť $\mathbf{d}$ značí libovolnou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$.

Nechť $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ značí libovolné neprázdné podmnožiny.

1. Připomeňme, že symbolem $\mathbf{d}A$ označujeme obraz množiny A v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$, tedy podmnožinu v $\mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\mathbf{d}$ jednotlivých prvků množiny A.

Snadno ukážeme, že *platí rovnost*:

$$\mathbf{d}(AB) = \mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B$$

Jednak je každý prvek $c^* \in \mathbf{d}(AB)$ obrazem v $\mathbf{d}$ součinu ab jistého prvku $a \in A$ s jistým prvkem $b \in B$, takže máme $c^* = \mathbf{d}ab = \mathbf{d}a \,.\, \mathbf{d}b \in \mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B$, a z toho vidíme, že platí vztah: $\mathbf{d}(AB) \subset \mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B$. Jednak je každý prvek $c^* \in \mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B$ součinem jistého prvku $a^* \in \mathbf{d}A$ s jistým prvkem $b^* \in \mathbf{d}B$, takže existují prvky $a \in A$, $b \in B$ takové, že $a^* = \mathbf{d}a$, $b^* = \mathbf{d}b$, a máme: $c^* = a^*b^* = \mathbf{d}a \,.\, \mathbf{d}b = \mathbf{d}ab \in \mathbf{d}(AB)$; z toho vidíme, že platí vztah: $\mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B \subset \mathbf{d}(AB)$, a důkaz je ukončen.

2. Se zřetelem na tento výsledek soudíme, že *když je množina AB částí množiny C, pak také množina $\mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B$ je částí množiny $\mathbf{d}C$*; tj. ze vztahu $AB \subset C$ plyne $\mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}B \subset \mathbf{d}C$.

3. Když je množina A polem podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, takže je grupoidní, máme vztah $AA \subset A$ a z něho následuje $\mathbf{d}A \,.\, \mathbf{d}A \subset \mathbf{d}A$. Odtud vidíme, že *obraz pole podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}^*$*. Podgrupoid v $\mathfrak{G}^*$, jehož pole je $\mathbf{d}A$, se nazývá *obraz podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v deformaci $\mathbf{d}$* a označuje se symbolem $\mathbf{d}\mathfrak{A}$; podgrupoid $\mathfrak{A}$ se nazývá *vzor podgrupoidu $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ v deformaci $\mathbf{d}$*. Je zřejmé, že $\mathbf{d}$ je deformace podgrupoidu $\mathfrak{A}$ na podgrupoid $\mathbf{d}\mathfrak{A}$, takže podgrupoid $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ je homomorfní s podgrupoidem $\mathfrak{A}$.

Tyto pojmy a výsledky platí zejména v případě, že jde o pole G grupoidu $\mathfrak{G}$. Zvláště vidíme, že *obraz $\mathbf{d}\mathfrak{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ v deformaci $\mathbf{d}$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}^*$ homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$*. Když $\mathbf{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, máme ovšem $\mathfrak{G}^* = \mathbf{d}\mathfrak{G}$.

4. Když je $\mathbf{d}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a $\mathbf{f}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}^*$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{F}$, pak $\mathbf{fd}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{F}$. Vskutku, podle

definice složeného zobrazení $\mathbf{fd}$, a protože $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ jsou deformace, platí pro $a, b \in \mathfrak{G}$ rovnosti

$$\mathbf{fd}(ab) = \mathbf{f}(\mathbf{d}ab) = \mathbf{f}(\mathbf{d}a \, . \, \mathbf{d}b) = \mathbf{f}(\mathbf{d}a) \, . \, \mathbf{f}(\mathbf{d}b) = \mathbf{fd}a \, . \, \mathbf{fd}b \, ,$$

a tedy skutečně platí $\mathbf{fd}(ab) = \mathbf{fd}a \, . \, \mathbf{fd}b$.

13.4. Isomorfní zobrazení

1. K pojmu deformace se připojují některé další důležité pojmy, které jsou v něm zahrnuty. Je to především pojem prosté deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$, tj. tedy takové deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$, v níž každý prvek grupoidu $\mathfrak{G}^*$ má nejvýš jeden vzor. Pro prostou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$ je ustálen název *izomorfní zobrazení* grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$.

Z výsledků v odst. **6.7** a **13.3.4** vyplývá, že *když* $\mathbf{d}$ *je izomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$ *do grupoidu* $\mathfrak{G}^*$ *a* $\mathbf{f}$ *izomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}^*$ *do nějakého grupoidu* $\mathfrak{F}$, *pak složené zobrazení* $\mathbf{fd}$ *grupoidu* $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{F}$ *je opět izomorfní.*

2. Izomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *izomorfismus*. Ke každé prosté deformaci $\mathbf{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje ovšem zobrazení inverzní $\mathbf{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$, které je prosté, a snadno se přesvědčíme, že je deformací. Nechť a^*, b^* značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}^*$ a $a, b \in \mathfrak{G}$ jejich vzory v $\mathbf{d}$, takže $\mathbf{d}a = a^*$, $\mathbf{d}b = b^*$, $\mathbf{d}ab = a^*b^*$. Podle definice inverzního zobrazení $\mathbf{d}^{-1}$ plynou odtud rovnosti: $a = \mathbf{d}^{-1}a^*$, $b = \mathbf{d}^{-1}b^*$, $ab = \mathbf{d}^{-1}a^*b^*$, a z nich skutečně vychází $\mathbf{d}^{-1}a^*b^* = \mathbf{d}^{-1}a^* \, . \, \mathbf{d}^{-1}b^*$. Když tedy existuje nějaký izomorfismus $\mathbf{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak existuje izomorfismus $\mathbf{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$; v tomto případě pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}^*$) je *izomorfní* s $\mathfrak{G}^*$ ($\mathfrak{G}$) nebo že grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ jsou izomorfní, a píšeme $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}^*$ nebo $\mathfrak{G}^* \simeq \mathfrak{G}$. Je zřejmé, že pole každých dvou izomorfních grupoidů jsou ekvivalentní množiny.

Zobrazení složené ze dvou izomorfismů je opět izomorfismus.

3. *Příklady.* Abstraktní grupoid, jehož pole je $\{\mathbf{e}\}$ a násobení je popsáno v první multiplikační tabulce v odst. **11.4.2**, je izomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_1$. Abstraktní grupoid, jehož pole je $\{\mathbf{e}, \mathbf{a}\}$ a násobení je popsáno v druhé multiplikační tabulce v odst. **11.4.2**, je izomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_2$; abstraktní grupoid, jehož pole je $\{\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}\}$ a násobení je popsáno ve třetí multiplikační tabulce v odst. **11.4.2**, je izomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_3$.

13.5. Operátory, zobrazení meromorfní a automorfní

1. Další pojmy zahrnuté v pojmu deformace se vztahují na případ, kdy jde o deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe nebo na sebe.

Deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe se nazývá také *operátor na grupoidu* $\mathfrak{G}$, kratčeji; *operátor grupoidu* $\mathfrak{G}$ nebo též *endomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$.

Prostý operátor na $\mathfrak{G}$ neboli izomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe se nazývá také *meromorfní zobrazení na grupoidu* $\mathfrak{G}$ nebo *meromorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$. Meromorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ se nazývá *vlastní*, když obraz grupoidu $\mathfrak{G}$ je vlastním podgrupoidem v $\mathfrak{G}$.

2. Izomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe se nazývá také *automorfní* zobrazení na $\mathfrak{G}$, stručněji *automorfismus na* $\mathfrak{G}$.

3. *Příklady.* Např. zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ do sebe, v němž je každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ zobrazen na součin (v aritmetickém smyslu) $ka \in \mathfrak{Z}$, kde k značí libovolné celé nezáporné číslo, je operátor na $\mathfrak{Z}$. V případě $k \geqq 1$ máme meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$, v případě $k = 1$ automorfismus na $\mathfrak{Z}$ a v případě $k = 0$ operátor, ale nikoli meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$.

Nejjednodušším příkladem automorfismu libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$ je identické zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$, tzv. *identický automorfismus* na $\mathfrak{G}$.

13.6. Cvičení

1. Když jsou některé dva prvky v grupoidu $\mathfrak{G}$ vzájemně zaměnitelné, pak jejich obrazy v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jsou také vzájemně zaměnitelné. Obraz každého abelovského grupoidu v každé deformaci je opět abelovský.

2. Když se součin některé trojčlenné posloupnosti prvků $a, b, c \in \mathfrak{G}$ skládá jenom z jednoho prvku, pak totéž platí o posloupnosti obrazů $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}c \in \mathfrak{G}^*$ v každé deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého asociativního grupoidu v každé deformaci je opět asociativní.

3. Když je grupoid $\mathfrak{G}$ asociativní a má centrum, pak obraz centra v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na nějaký grupoid $\mathfrak{G}^*$ je v centru grupoidu $\mathfrak{G}^*$.

4. Vzorem grupoidní podmnožiny v $\mathfrak{G}^*$ v nějaké deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí být podmnožina grupoidní.

5. Každé meromorfní zobrazení na libovolném konečném grupoidu $\mathfrak{G}$ je automorfismus na $\mathfrak{G}$.

6. O izomorfismu grupoidů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ platí tyto výroky: a) $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ (reflexivnost); b) z $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ plyne $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$ (symetrie); c) z $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$ plyne $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$ (tranzitivnost).

7. Uveďte sami příklady deformace.