2. Rozklady v množině

2.1. Rozklad v množině

Nechť G značí (všude v této knize) libovolnou neprázdnou množinu.

Rozkladem v G rozumíme neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

Pojem rozkladu v množině je jedním z nejdůležitějších pojmů, které se v této knize vyskytují; je to základní množinový pojem pro teorii grupoidů a grup, kterou chceme v dalším výkladu vyvinouti.

Podle definice má tedy každý rozklad v G alespoň jeden prvek, každý prvek rozkladu je neprázdná podmnožina v G a zejména si zapamatujme, že průnik každých dvou prvků rozkladu je prázdná množina.

Jednoduchým příkladem rozkladu např. v množině všech přirozených čísel je systém skládající se z jednoho prvku, jímž je množina všech kladných sudých čísel. Obecněji je příkladem rozkladu v G systém skládající se z jednoho prvku, jímž je libovolná neprázdná podmnožina v G. Systém množin [4] v odst. **1.1** je příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel $\geqq 2$.

2.2. Rozklad na množině

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad v G. Libovolný prvek G může být nejvýše v jednom prvku rozkladu $\bar{A}$, protože každé dva prvky v $\bar{A}$ jsou disjunktní; může se ovšem stát, že není vůbec v žádném prvku rozkladu $\bar{A}$.

Když je rozklad $\bar{A}$ takový, že každý prvek v G je v některém prvku rozkladu A, pak pravíme, že *rozklad $\bar{A}$ pokrývá množinu G*, nebo že *je na množině G* nebo že *je rozkladem množiny G*.

Je-li tedy $\bar{A}$ rozklad množiny G, existuje ke každému prvku $a \in G$ prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že $a \in \bar{a}$. Např. v hořejších příkladech je poslední příkladem rozkladu *na* množině všech přirozených čísel $\geqq 2$, neboť každé přirozené číslo $\geqq 2$ je buď prvočíslo nebo je součinem několika prvočísel, a tedy se vyskytuje v některém prvku toho rozkladu.

Důležitými příklady rozkladů na množině G jsou oba tzv. *krajní rozklady* množiny G: *největší* a *nejmenší* rozklad množiny G. Největší rozklad množiny G, který označujeme symbolem $\bar{G}_{\max}$, se skládá z jediného prvku, G. Nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ je systém všech množin skládajících se vždy z jednoho prvku množiny G.

Např. množina, jejímž jediným prvkem je množina všech přirozených čísel, je největším rozkladem množiny všech přirozených čísel, a systém všech množin, z nichž každá se skládá z jednoho přirozeného čísla, je jejím nejmenším rozkladem.

Všimněme si, že libovolný rozklad $\bar{A}$ v množině G je rozkladem na množině $\mathbf{s}\bar{A}$. Tato poznámka často umožňuje použít k popisu vlastností rozkladů v množinách poznatků o rozkladech na množinách.

2.3. Obal a průsek

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad a B libovolnou podmnožinu v G.

Obalem podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků rozkladu $\bar{A}$ incidentních s B. Označujeme jej $B \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset B$. Protože každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, incidentní s B, je současně incidentní s podmnožinou $B \cap \mathbf{s}\bar{A}$ a naopak, platí rovnost $B \sqsubset \bar{A} = (B \cap \mathbf{s}\bar{A}) \sqsubset \bar{A}$. Vidíme, že obal $B \sqsubset \bar{A}$ je částí rozkladu $\bar{A}$, která popř. může splynout s rozkladem $\bar{A}$ nebo i může být prázdná. První případ $B \sqsubset \bar{A} = \bar{A}$ nastane právě tehdy, když každý prvek rozkladu $\bar{A}$ je incidentní s B. Druhý případ $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ nastane právě tehdy, když žádný prvek rozkladu $\bar{A}$ není incidentní s B; tento případ je charakterizován rovností $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = \emptyset$. Když obal $B \sqsubset \bar{A}$ není prázdný, představuje rozklad v množině G.

Průsekem rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B nebo *podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$* rozumíme množinu neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\bar{A}$ s podmnožinou B. Označujeme jej $\bar{A} \sqcap B$ nebo $B \sqcap \bar{A}$. Vidíme, že i průsek $\bar{A} \sqcap B$ může být prázdný. To nastane právě tehdy, když žádný prvek rozkladu $\bar{A}$ není incidentní s B; tento případ, jak jsme výše poznamenali, je charakterizován rovností $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = \emptyset$. Když průsek $\bar{A} \sqcap B$ není prázdný, představuje rozklad v množině G a dokonce v množině B. Všimněme si, že rozklad $\bar{A} \sqcap B$ je současně rozkladem na množině $B \cap \mathbf{s}\bar{A}$. Zřejmě platí: $\mathbf{s}(\bar{A} \sqcap B) = B \cap \mathbf{s}\bar{A}$.

V přehledu vidíme, že obal $B \sqsubset \bar{A}$ a průsek $B \sqcap \bar{A}$ jsou vždy současně neprázdné nebo prázdné systémy podle toho, zda je $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$ nebo $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = \emptyset$. Když $B \neq \emptyset$ a rozklad $\bar{A}$ množinu G pokrývá, jsou $B \sqsubset \bar{A}$ a $B \sqcap \bar{A}$ neprázdné systémy, z nichž první je částí v $\bar{A}$ a druhý rozkladem na B. Každý rozklad $\bar{A}$ na G a neprázdná množina B v G určují tedy: 1) jistou neprázdnou podmnožinu v $\bar{A}$, totiž obal $B \sqsubset \bar{A}$, 2) jistý rozklad na B, totiž průsek $\bar{A} \sqcap B$.

Pojmy obalu a průseku, které jsme popsali, rozšíříme v tom smyslu, že na místo podmnožiny $B \subset G$ nastoupí rozklad v G. Půjde tedy o obal rozkladu v rozkladu a průsek rozkladu s rozkladem.

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ jsou rozklady v G.

Obalem rozkladu $\bar{B}$ v rozkladu $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků rozkladu $\bar{A}$, incidentních s některým prvkem v $\bar{B}$. Označujeme jej $\bar{B} \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset \bar{B}$. Protože každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, incidentní s některým prvkem v $\bar{B}$, je současně incidentní s $\mathbf{s}\bar{B}$, a naopak, platí: $\bar{B} \sqsubset \bar{A} = \mathbf{s}\bar{B} \sqsubset \bar{A}$. Tímto vztahem je nový pojem obalu převeden na pojem obalu podmnožiny v rozkladu. Když se rozklad $\bar{B}$ skládá z jediného prvku B, je ovšem $\bar{B} \sqsubset \bar{A} = B \sqsubset \bar{A}$.

Průsekem rozkladu $\bar{A}$ s rozkladem $\bar{B}$ rozumíme množinu všech neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\bar{A}$ s prvky v $\bar{B}$. Označujeme jej $\bar{A} \sqcap \bar{B}$. Z definice vidíme, že $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{B} \sqcap \bar{A}$; s ohledem na tuto symetrii mluvíme též o *průseku rozkladů* $\bar{A}, \bar{B}$. Protože pro každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ je $\bar{a} \cap \bar{b} = (\bar{a} \cap \mathbf{s}\bar{B}) \cap (\bar{b} \cap \mathbf{s}\bar{A})$, platí rovnost: $\bar{A} \sqcap \bar{B} = (\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}) \sqcap (\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A})$. Každý systém $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}$, $\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$ je rozkladem na $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B}$ nebo je prázdný, podle toho, zda je $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} \neq \emptyset$ nebo $= \emptyset$. Vidíme, že průsek rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ splývá v případě $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} \neq \emptyset$ s průsekem rozkladů $\bar{A} \sqcap \mathbf{s}\bar{B}$, $\bar{B} \sqcap \mathbf{s}\bar{A}$ ležících na $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B}$, kdežto v případě $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{B} = \emptyset$ je prázdný. Všimněme si, že průsek každých dvou rozkladů ležících na téže množině je vždy jejím rozkladem. Když se rozklad $\bar{B}$ skládá z jediného prvku B, je ovšem $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{A} \sqcap B$.

2.4. Zákryt a zjemnění rozkladu

Nechť $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ jsou rozklady v G.

Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) nazýváme *zákryt* (*zjemnění*) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$), když každý prvek rozkladu $\bar{B}$ je částí některého prvku rozkladu $\bar{A}$. Tento vztah vyjadřujeme také tím, že *rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je* popř. *leží na* (*pod*) *rozkladu* (*rozkladem*) $\bar{B}$ ($\bar{A}$). Píšeme pak $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$. Např. je největší rozklad na G zákrytem rozkladu $\bar{A}$ a nejmenší rozklad na $\mathbf{s}\bar{A}$ je zjemněním rozkladu $\bar{A}$. Zejména ($\bar{A} = \bar{B}$) je rozklad $\bar{A}$ svým zákrytem i zjemněním. Když je $\bar{A} \geqq \bar{B}$ a současně $\bar{A} \neq \bar{B}$, pravíme, že rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je *vlastní* zákryt (zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$) a tento vztah zdůrazňujeme symbolem $\bar{A} > \bar{B}$ nebo $\bar{B} < \bar{A}$.

Z definice významu znaménka $\geqq$ plynou tyto výroky:

a) $\bar{A} \geqq \bar{A}$;

b) *když* $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{C}$, *pak* $\bar{A} \geqq \bar{C}$;

c) *když* $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$, *pak* $\bar{A} = \bar{B}$.

Platnost výroků a) a b) je zřejmá. Pokud jde o výrok c), soudíme takto: Předpokládejme, že platí vztahy $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$. Buď $\bar{b} \in \bar{B}$ libovolný prvek. Potom existují prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b}' \in \bar{B}$ takové, že $\bar{b}' \supset \bar{a} \supset \bar{b}$. Vidíme, že množiny $\bar{b}'$, $\bar{b}$ jsou incidentní a tudíž identické, neboť jsou prvky téhož rozkladu $\bar{B}$. Máme tedy $\bar{b}' = \bar{a} = \bar{b}$ a vychází $\bar{b} \in \bar{A}$. Tím je zjištěno, že rozklad $\bar{B}$ je částí rozkladu $\bar{A}$, tj. $\bar{B} \subset \bar{A}$, a podobně platí, že rozklad $\bar{A}$ je částí rozkladu $\bar{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$. Odtud vychází $\bar{A} = \bar{B}$.

Když platí $\bar{A} \geqq \bar{B}$, pak sice každý prvek rozkladu $\bar{B}$ je částí některého prvku rozkladu $\bar{A}$, ale rozklad $\bar{A}$ může obsahovat prvky, v nichž není obsažen žádný prvek rozkladu $\bar{B}$. Když takové prvky nejsou, tj. když každý prvek rozkladu $\bar{A}$ obsahuje jako část některý prvek rozkladu $\bar{B}$, pravíme, že rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je *normální* zákryt (zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$); když dokonce každý prvek rozkladu $\bar{A}$ je součtem některých prvků rozkladu $\bar{B}$, nazýváme rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) *ryzí* zákryt (zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$).

Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je ryzím zákrytem (ryzím zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$) jenom tehdy, když oba rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ leží na téže množině $\mathbf{s}\bar{A} = \mathbf{s}\bar{B}$; naopak vztahy $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\mathbf{s}\bar{A} = \mathbf{s}\bar{B}$ vyjadřují, že rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je ryzím zákrytem (ryzím zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$). Všimněme si, že *když $\bar{A}$, $\bar{B}$ leží na G a $\bar{A} \geqq \bar{B}$, pak rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je ryzí zákryt (ryzí zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$).*

Předpokládejme nyní, že rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je ryzím zákrytem (ryzím zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$), takže $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\mathbf{s}\bar{A} = \mathbf{s}\bar{B}$. Pak je každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ součtem některých prvků v $\bar{B}$ a je zřejmé, že systém těchto prvků je rozkladem prvku $\bar{a}$. Rovněž je zřejmé, že systém všech podmnožin v rozkladu $\bar{B}$, z nichž každá se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{B}$, které jsou části vždy téhož prvku v $\bar{A}$, je jistý rozklad $\bar{\bar{B}}$ rozkladu $\bar{B}$. Rozklad $\bar{\bar{B}}$ naopak určuje rozklad $\bar{A}$, který vznikne utvořením součtů všech prvků rozkladu $\bar{B}$ ležících vždy v témž prvku rozkladu $\bar{\bar{B}}$. Pravíme, že rozklad $\bar{\bar{B}}$ *vynucuje* zákryt $\bar{A}$. Můžeme tedy říci, že rozklad $\bar{B}$ obdržíme z rozkladu $\bar{A}$, když každý prvek rozkladu $\bar{A}$ nahradíme vhodným jeho rozkladem; a rozklad $\bar{A}$ získáme z rozkladu $\bar{B}$, když na $\bar{B}$ zvolíme vhodný rozklad $\bar{\bar{B}}$ a utvoříme součty všech prvků rozkladu $\bar{B}$, které leží vždy v témž prvku rozkladu $\bar{\bar{B}}$.

2.5. Řetězce rozkladů

Nechť $A \supset B$ jsou neprázdné podmnožiny v G.

Řetězcem rozkladů od A do B v množině G, stručněji *řetězcem od A do B*, rozumíme α-člennou ($\alpha \geqq 1$) posloupnost rozkladů $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_\alpha$ v G s těmito vlastnostmi: 1) $\bar{K}_1$ leží na A; 2) $\bar{K}_{\gamma+1}$ leží na některém prvku v $\bar{K}_\gamma$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$; 3) $B \in \bar{K}_\alpha$.

Takový řetězec označujeme symbolem

$$\bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha, \quad \text{stručněji} \quad [\bar{K}].$$

Pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ značíme množinu $\mathbf{s}\bar{K}_\gamma$ písmenem $\bar{a}_\gamma$; zejména tedy máme $\bar{a}_1 = A$. Mimoto klademe $\bar{a}_{\alpha+1} = B$. Z definice řetězce plyne $\bar{a}_2 \in \bar{K}_1, \ldots, \bar{a}_{\alpha+1} \in \bar{K}_\alpha$ a dále: $A = \bar{a}_1 \supset \ldots \supset \bar{a}_{\alpha+1} = B$. Množiny A, B se jmenují *konce řetězce* $[\bar{K}]$. Vidíme, že každý prvek rozkladu $\bar{K}_\alpha$ může být koncem řetězce $[\bar{K}]$. Rozklady $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_\alpha$ se nazývají *členy řetězce* $[\bar{K}]$; $\bar{K}_1$ je *počáteční* a $\bar{K}_\alpha$ *koncový člen řetězce* $[\bar{K}]$. *Délkou řetězce* $[\bar{K}]$ rozumíme počet α členů v $[\bar{K}]$.

Důležitým typem řetězců jsou tzv. elementární řetězce nad rozkladem.

Nechť $\bar{A}$ je rozklad v G a B prvek v $\bar{A}$, tedy $B \in \bar{A}$. Označme $A = \mathbf{s}\bar{A}$.

Elementární řetězec rozkladů od A do B nad rozkladem $\bar{A}$, stručněji *elementární řetězec nad $\bar{A}$*, je řetězec rozkladů od A do B,

$$([\mathring{K}] =) \quad \mathring{K}_1 \to \ldots \to \mathring{K}_\alpha$$

vyznačující se tím, že pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ je člen $\mathring{K}_\gamma$ zákrytem rozkladu $\bar{A}_\gamma = \bar{A} \sqcap \bar{a}_\gamma$; přitom značí $\bar{a}_\gamma = s\mathring{K}_\gamma$ $(\bar{a}_1 = A)$.

V takovém řetězci je především člen $\mathring{K}_1$ zákrytem rozkladu $\bar{A}_1$ $(= \bar{A})$. V množině $\bar{a}_1$ $(=A)$ leží její část $\bar{a}_2$ určená vztahy $B \subset \bar{a}_2 \in \mathring{K}_1$ a na ní leží rozklad $(\bar{A}_2 =)$ $\bar{A} \sqcap \bar{a}_2$. Rozklad $\bar{A}_2$ obsahuje množinu B jako prvek a je částí rozkladu $\bar{A}_1$. Dále je člen $\mathring{K}_2$ zákrytem rozkladu $\bar{A}_2$. V množině $\bar{a}_2$ leží její část $\bar{a}_3$ určená vztahy $B \subset \subset \bar{a}_3 \in \mathring{K}_2$ a na ní leží rozklad $(\bar{A}_3 =)$ $\bar{A} \sqcap \bar{a}_3$. Rozklad $\bar{A}_3$ obsahuje množinu B jako prvek a je částí rozkladu $\bar{A}_2$. Dále je člen $\mathring{K}_3$ zákrytem rozkladu $\bar{A}_3$, atd. Konečně je člen $\mathring{K}_\alpha$ zákrytem rozkladu $(\bar{A}_\alpha =)$ $\bar{A} \sqcap \bar{a}_\alpha$ a máme: $B \in \mathring{K}_\alpha$.

Např. řetězec skládající se z jediného rozkladu $\bar{A}$ je elementární řetězec od A do B nad rozkladem $\bar{A}$ délky 1. Když před (za) rozklad $\bar{A}$ přidáme libovolný konečný počet největších rozkladů množiny A (B), obdržíme opět elementární řetězec rozkladů od A do B nad $\bar{A}$.

Vezměme nyní v úvahu libovolný řetězec $([\bar{K}] =)$ $\bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ od A do B. Použijeme hořejších označení.

Když rozklad $\bar{K}_\gamma$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha)$ není největším rozkladem na $\bar{a}_\gamma$, když je tedy $\bar{a}_{\gamma+1}$ vlastní podmnožinou v $\bar{a}_\gamma$, nazýváme $\bar{K}_\gamma$ *podstatným* členem řetězce $[\bar{K}]$. V opačném případě je $\bar{K}_\gamma$ *nepodstatný* člen řetězce $[\bar{K}]$. Když v řetězci $[\bar{K}]$ existuje alespoň jeden nepodstatný člen $\bar{K}_\gamma$, nazýváme $[\bar{K}]$ *řetězec s opakováním*, ježto $\bar{a}_{\gamma+1} = \bar{a}_\gamma$. Když jsou všechny členy řetězce $[\bar{K}]$ podstatné, pravíme, že $[\bar{K}]$ je *řetězec bez opakování*. Počet α' podstatných členů v řetězci $[\bar{K}]$ je tzv. *redukovaná délka* řetězce $[\bar{K}]$. Zřejmě platí $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$; rovnost $\alpha' = \alpha$ charakterizuje řetězec bez opakování. V případě $A = B$ jsou všechny členy řetězce $[\bar{K}]$ nepodstatné, takže $\alpha' = 0$ a naopak. Když $A \neq B$, můžeme řetězec $[\bar{K}]$ vypuštěním všech jeho nepodstatných členů *redukovat*, tj. zkrátit na jistý řetězec $[\bar{K}']$ bez opakování. Délka redukovaného řetězce $[\bar{K}']$ se rovná redukované délce α' řetězce $[\bar{K}]$. Naopak lze řetězec $[\bar{K}]$ *prodloužit* tím, že mezi libovolné členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{K}_{\gamma+1}$ a popř. před počáteční člen $\bar{K}_1$ (za koncový člen $\bar{K}_\alpha$) řetězce $[\bar{K}]$ vsuneme největší rozklad množiny $\bar{a}_{\gamma+1}$, popř. $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_{\alpha+1})$, nebo libovolný konečný počet takových rozkladů. Každé zkrácení (prodloužení) řetězce $[\bar{K}]$ se dá vytvořit postupným vypuštěním (vsunutím) vždy jednoho největšího rozkladu na některé z podmnožin $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\alpha+1}$. Rovněž je zřejmé, že každý řetězec vzniklý zkrácením nebo prodloužením řetězce $[\bar{K}]$ má touž redukovanou délku jako $[\bar{K}]$.

Zjemněním $[\mathring{K}]$ *řetězce* $[\bar{K}]$ rozumíme řetězec rozkladů v množině G s libovolnými konci A_0, B_0, které vyhovují vztahům $A_0 \supset A \supset B \supset B_0$, a to řetězec tohoto typu:

$$\bar{K}_{0,0} \to \bar{K}_{1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{1,\beta_1-1} \to \bar{K}_{1,\beta_1} \to \bar{K}_{2,1} \to \ldots \to \bar{K}_{2,\beta_2-1} \to \bar{K}_{2,\beta_2} \to$$
$$\to \ldots \to \bar{K}_{\alpha,\beta_\alpha} \to \bar{K}_{\alpha+1,1} \to \ldots \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1} \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}} \to \bar{K}_{\alpha+2,1} \to \ldots \to$$
$$\to \bar{K}_{\alpha+2,\beta_{\alpha+2}-1} \, .$$

V tomto vzorci především $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\alpha+2}$ značí přirozená čísla. Dále je

$$([\bar{K}'] =) \quad \bar{K}_{\delta,\beta_\delta} \to \ldots \to \bar{K}_{\delta+1,\beta_{\delta+1}-1} \, , \quad \text{kde} \quad \delta = 0, \ldots, \alpha + 1; \; \beta_0 = 0$$

řetězec rozkladů v G (v případě $\beta_{\delta+1} = 1$ se čte jenom počáteční člen $\bar{K}_{\delta,\beta_\delta}$) tohoto typu: V případě $\delta = 0$ řetězec od $\bar{a}_0$ ($= A_0$) do $\bar{a}_1$ ($= A$), který se nemusí vyskytnout, jestliže $A_0 = A$; v případě $\delta = 1, \ldots, \alpha$ elementární řetězec od $\bar{a}_\delta$ do $\bar{a}_{\delta+1}$ nad rozkladem $\bar{K}_\delta$; v případě $\delta = \alpha + 1$ řetězec od $\bar{a}_{\alpha+1}$ ($= B$) do $\bar{a}_{\alpha+2}$ ($= B_0$), který se nemusí vyskytnout, jestliže $B = B_0$.

Vidíme, že každé zjemnění řetězce $[\bar{K}]$ obdržíme, když každý člen $\bar{K}_\gamma$ ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$) řetězce $[\bar{K}]$ nahradíme elementárním řetězcem od $\bar{a}_\gamma$ do $\bar{a}_{\gamma+1}$ nad $\bar{K}_\gamma$ a popř. přidáme před počáteční člen $\bar{K}_1$ (za koncový člen $\bar{K}_\alpha$) řetězce $[\bar{K}]$ libovolný řetězec s koncem A (začátkem B).

Zejména když nahradíme každý člen řetězce $[\bar{K}]$ elementárním řetězcem skládajícím se z tohoto členu, obdržíme opět řetězec $[\bar{K}]$. Vidíme, že řetězec $[\bar{K}]$ je současně svým vlastním zjemněním.

Redukovaná délka každého zjemnění řetězce $[\bar{K}]$ je součet redukovaných délek jednotlivých elementárních řetězců a zmíněných řetězců přidaných; rovná se tedy alespoň redukované délce řetězce $[\bar{K}]$.

2.6. Cvičení

1. $\mathbf{s}A \sqsubset \bar{A} = \bar{A} = \mathbf{s}A \sqcap \bar{A}$.
2. $\mathbf{s}(B \sqsubset \bar{A}) \sqsubset \bar{A} = B \sqsubset \bar{A}$;
$\mathbf{s}(B \sqcap \bar{A}) \sqcap \bar{A} = B \sqcap \bar{A}$;
$\mathbf{s}(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap \bar{A} = B \sqsubset \bar{A} = \mathbf{s}(B \sqcap \bar{A}) \sqsubset \bar{A}$.
3. Když $B \sqsubset \bar{A} = B \sqcap \bar{A}$, pak pro každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ platí buď $\bar{a} \subset B$ nebo $\bar{a} \cap B = \emptyset$; a naopak.
4. $\mathbf{s}(\mathbf{s}\bar{A} \sqsubset \bar{C}) \sqcap \bar{A} = \mathbf{s}\bar{C} \sqcap \bar{A}$.
5. Když $B \subset C$, platí vztahy: a) $(C \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = C \sqsubset (\bar{A} \sqcap B)$. Vzhledem k této rovnosti označujeme množinu na obou stranách této rovnosti symbolem $C \sqsubset \bar{A} \sqcap B$. Zejména pro $C = B$ máme $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = \bar{A} \sqcap B$; b) $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap C = \bar{A} \sqcap C$.
6. Když platí jeden ze tří následujících výroků, pak platí také ostatní dva: a) Každý prvek rozkladu $\bar{A}$ je incidentní alespoň s jedním prvkem rozkladu $\bar{C}$; b) $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$; c) $\mathbf{s}\bar{A} = \mathbf{s}(\mathbf{s}\bar{C} \sqsubset \bar{A})$.
7. Každé prodloužení libovolného řetězce rozkladů je současně jeho zjemněním.
8. Počet p_{n+1} rozkladů na každé konečné množině řádu $n + 1$ ($\geqq 1$) je konečný. Čísla p_{n+1} jsou dána vzorcem:

$$p_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot p_\nu\,, \quad (p_0 = 1)\,.$$

Zejména tedy máme:

$$p_1 = 1\,,\ p_2 = 2\,,\ p_3 = 5\,,\ p_4 = 15\,,\ p_5 = 52\,,\ p_6 = 203\,,\ \ldots$$