8.5.3 vynucuje tato faktorová grupa jistý zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Připomeňme si, že $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktoroid na grupě $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek je součtem všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, které jsou obsaženy vždy v témže prvku faktorové grupy $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$. Zejména je tedy množina A prvkem faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, a protože obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$, je podle úvahy v odst. **13.3.2** polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{B}$ jest invariantní v $\mathfrak{A}$, neboť má tuto vlastnost dokonce v $\mathfrak{G}$, a je zřejmé, že platí rovnost $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Došli jsme k tomuto výsledku:

Zákryt faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynucený faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, při čemž pole invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ je součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, z nichž se skládá invariantní podgrupa $\mathfrak{B}_1$ v $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ je faktorová grupa $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

14.6. Cvičení.

14.6.1. Řád faktorové grupy na libovolné konečné grupě řádu N jest dělitelem čísla N.

14.6.2. V úplné grupě euklidovských pohybů na přímce nebo v rovině jest ona podgrupa, která se skládá ze všech euklidovských pohybů $\mathbf{f}[a]$ nebo $\mathbf{f}[\alpha; a, b]$ invariantní (viz cvič. **11.7.1**). Příslušná faktorová grupa má právě dva prvky; jeden se skládá ze všech euklidovských pohybů $\mathbf{f}[a]$ nebo $\mathbf{f}[\alpha; a, b]$, druhý pak z $\mathbf{g}[a]$ nebo $\mathbf{g}[\alpha; a, b]$.

15. DEFORMACE A VĚTY O ISOMORFISMU GRUP.

15.1. Deformace grup.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\mathbf{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Když jeden z grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ je grupa, co se dá říci o druhém?

15.1.1. *Deformace grupy na grupoid.*

*Když $\mathfrak{G}$ je grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ je grupa. **Mimo to obraz v $\mathbf{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}$ jest jednotka grupy $\mathfrak{G}^*$ a obraz prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ je prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a.***

Abychom tato tvrzení dokázali, uvažme, že podle cvič. 7.6.2 je grupoid $\mathfrak{G}^*$ asociativní. Nechť $\underline{1}^*$ značí obraz jednotky $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$, takže $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\underline{1}$. Podle cvič. **10.7.4** jest $\underline{1}^*$ jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Nechť dále a^* značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ je zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$, existuje alespoň jeden prvek $a \in \mathfrak{G}$ takový, že $a^* = \boldsymbol{d}a$. Z rovnosti $aa^{-1} = \underline{1}$ plyne $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$ a podobně z rovnosti $a^{-1}a = \underline{1}$ rovnost $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $\boldsymbol{d}a^{-1} \,.\, a^* = \underline{1}^*$, a odtud vychází, že prvek $\boldsymbol{d}a^{-1}$ jest inversní vzhledem k a^*, takže $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Dále vidíme, že obraz v $\boldsymbol{d}$ prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ je prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a, a tím jsou naše tvrzení dokázána. Stručně můžeme říci, že každá deformace zobrazuje grupu opět na grupu a zachovává v obou grupách jednotky a inversní prvky.

Z tohoto výsledku zejména vychází, že *jsou-li nějaké dva grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní a jeden z nich je grupa, pak také druhý je grupa.* Neboť jsou-li $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní, pak existuje isomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a současně existuje isomorfismus (inversní) grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$. Je tedy každý z obou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ obrazem druhého v jistém isomorfismu a tedy, je-li jeden z nich grupa, pak také druhý je grupa, jakožto isomorfní obraz grupy. Každý isomorfismus zachovává ovšem v obou grupách, jako každá deformace, jednotky a inversní prvky; dále zachovává podgrupy a jak se snadno přesvědčíme, též invariantní podgrupy.

15.1.2. *Deformace grupoidu na grupu.* O grupoidu $\mathfrak{G}$ nečiňme nyní dalších předpokladů, ale o grupoidu $\mathfrak{G}^*$ předpokládejme, že je grupou. Podle první věty o isomorfismu grupoidů je grupa $\mathfrak{G}^*$ isomorfní ($\boldsymbol{i}$) s jistým faktoroidem $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$. $\overline{\mathfrak{G}}$ přísluší k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$ a v isomorfismu $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}^*$ je každý prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ zobrazen na onen prvek grupy $\mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se skládá. Podle předcházejícího výsledku je $\overline{\mathfrak{G}}$ grupa, protože $\mathfrak{G}^*$ je grupa. Isomorfismus $\boldsymbol{i}$ zachovává v obou grupách jednotky a inversní prvky; proto jest jednotka $\overline{\underline{1}}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ v isomorfismu $\boldsymbol{i}$ zobrazena na jednotku $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$, takže $\boldsymbol{i}\overline{\underline{1}} = \underline{1}^*$, a každé dva inversní prvky $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou zobrazeny na dva inversní prvky v $\mathfrak{G}^*$, takže $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^*$, $\boldsymbol{i}\bar{a}^{-1} = a^{*-1}$. Protože každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$, a to onoho prvku, pro nějž platí

$\bar{i}\bar{a} = a^*$, skládá se jednotka $\bar{1}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ ze všech vzorů v $\mathbf{d}$ prvku $\underline{1}^*$ a podobně dva inversní prvky $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ se skládají ze všech vzorů v $\mathbf{d}$ dvou inversních prvků a^*, a^{*-1} v $\mathfrak{G}^*$. Platí tedy tato věta:

Když $\mathfrak{G}^*$ je grupa, pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\mathbf{d}$, je grupa a jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Jednotka grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ je množina všech vzorů v $\mathbf{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ a každé dva inversní prvky v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou množiny všech vzorů v $\mathbf{d}$ dvou inversních prvků v $\mathfrak{G}^*$.

Na jednoduchém příkladě ukážeme, že *je-li $\mathfrak{G}^*$ grupa, pak nejenom že $\mathfrak{G}$ nemusí býti grupa, nýbrž může býti jakýkoli grupoid.* Skutečně, nechť $\mathfrak{G}^*$ značí grupu skládající se z jediného prvku $\underline{1}^*$, takže $\underline{1}^*\underline{1}^* = \underline{1}^*$, a nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolný grupoid. Máme ukázati, že existuje deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Jest zřejmé, že zobrazení, které ke každému prvku v $\mathfrak{G}$ přiřazuje prvek $\underline{1}^*$, je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$.

15.2. Cayleyova věta a realisace abstraktních grup.

15.2.1. *Levé translace.* Nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolnou grupu a a libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Přiřadíme-li ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ prvek $ax \in \mathfrak{G}$, obdržíme jisté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ do sebe; protože rovnice $ax = b$, v níž b značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, má jediné řešení $x \in \mathfrak{G}$, je to prosté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na sebe, t. j. permutace grupy $\mathfrak{G}$. *Tato permutace grupy $\mathfrak{G}$ se nazývá levá translace určená prvkem a* a označuje se ${}_a\mathbf{t}$. Levá translace určená prvkem $\underline{1}$ je zřejmě identický automorfismus na $\mathfrak{G}$. Když a, b jsou různé prvky v $\mathfrak{G}$, pak obě levé translace ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t}$ jsou různé, neboť prvek $\underline{1}$ se v ${}_a\mathbf{t}$ zobrazí na prvek a a v ${}_b\mathbf{t}$ se zobrazí na prvek b. Složíme-li libovolnou levou translaci ${}_a\mathbf{t}$ s libovolnou levou translací ${}_b\mathbf{t}$, obdržíme zřejmě levou translaci určenou prvkem ba, takže platí rovnost ${}_b\mathbf{t}{}_a\mathbf{t} = {}_{ba}\mathbf{t}$.

15.2.2. *Věta Cayleyova.* Uvažujme nyní o grupoidu, jehož pole je množina všech levých translací určených jednotlivými prvky grupy $\mathfrak{G}$ a násobení je definováno vzorcem ${}_a\mathbf{t} \,.\, {}_b\mathbf{t} = {}_{ab}\mathbf{t}$, v němž ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t}$ značí dva libovolné prvky toho grupoidu. Označme tento grupoid $\mathfrak{T}_l$. Přiřadíme-li ke každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ prvek ${}_a\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$, obdržíme zřejmě zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$, a toto zobrazení je prosté, protože každé dva různé prvky $a, b \in \mathfrak{G}$ jsou zobrazeny na dva různé prvky ${}_a\mathbf{t}$, ${}_b\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$.

Protože součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je zobrazen na ${}_{ab}\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_l$, t. j. na součin ${}_a\mathbf{t} \,.\, {}_b\mathbf{t}$ obrazu ${}_a\mathbf{t}$ prvku a s obrazem ${}_b\mathbf{t}$ prvku b, je toto zobrazení deformace a tedy isomorfismus grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$. Grupoid $\mathfrak{T}_l$ je tedy grupa, a to permutační grupa, a máme tuto t. zv. *Cayleyovu větu:*

Každá grupa jest isomorfní s jistou permutační grupou.

Důležitost tohoto výsledku záleží v tom, že se v theorii grup, pokud jde o studium vlastností společných isomorfním grupám, můžeme omezit na grupy permutační.

15.2.3. *Realisace abstraktních grup.* S těmito úvahami úzce souvisí tato otázka: *Když je dána nějaká abstraktní grupa $\mathfrak{G}$, zda existuje nějaká permutační grupa, která se dá na ni deformovat?* O každé takové permutační grupě pravíme, že *realisuje abstraktní grupu* $\mathfrak{G}$, takže naše otázka zní, zda se každá abstraktní grupa dá realisovat permutacemi.

Z hořejších úvah vyplývá, že odpověď na tuto otázku je kladná, neboť každá abstraktní grupa je (dokonce) isomorfní s příslušnou grupou levých translací $\mathfrak{T}_l$, takže grupa $\mathfrak{T}_l$ grupu $\mathfrak{G}$ realisuje.

Na př. realisujme abstraktní grupu řádu 4., jejíž multiplikační tabulka je napsána jako druhá v odst. **11.6.1.** Příslušné levé translace určené jednotlivými prvky jsou podle té tabulky tyto permutace:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ \underline{1} & a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ a & \underline{1} & c & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ b & c & \underline{1} & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ c & b & a & \underline{1} \end{pmatrix}$$

a tvoří spolu s násobením, které definujeme tím, že součinem $\boldsymbol{p} \,.\, \boldsymbol{q}$ rozumíme složenou permutaci $\boldsymbol{pq}$, permutační grupu, která realisuje naši abstraktní grupu 4. řádu.

15.2.4. *Pravé translace.* Podobně jako jsme definovali levé translace na nějaké grupě $\mathfrak{G}$, definujeme pravé translace:

Když a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$ a když ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ přiřadíme prvek $xa \in \mathfrak{G}$, obdržíme permutaci grupy $\mathfrak{G}$, t. zv. pravou translaci $\mathbf{t}_a$ určenou prvkem a.

O pravých translacích na $\mathfrak{G}$ platí podobné výsledky jako o translacích levých a doporučujeme čtenáři, aby si je odvodil.

15.3. Věty o isomorfismu grup.

V kap. **9**. jsme pojednali o větách o isomorfismu grupoidů a nyní si všimneme těchto vět v případě, že jde o grupy. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupy.

15.3.1. *První věta.* Předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Jak jsme v odst. **9.1** viděli, je faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ isomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. **14.1** jest $\overline{\mathfrak{G}}$ faktorová grupa vytvořená jistou invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$ a polem této invariantní podgrupy je onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$. Protože $\underline{1}$ je vzorem v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$, vidíme, že onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje $\underline{1}$, se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$. Vychází tedy, že množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ je polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$.

Předpokládejme nyní naopak, že grupa $\mathfrak{G}^*$ jest isomorfní s faktorovou grupou $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na $\mathfrak{G}$ vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{D}$ invariantní v $\mathfrak{G}$. Pak existuje isomorfismus $\boldsymbol{i}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. **9.1** zobrazení $\boldsymbol{d}'$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ definované tím, že pro $a \in \mathfrak{G}$ jest $\boldsymbol{d}'a$ onen prvek v $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, v němž a leží, je deformace grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Odtud plyne, že $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{d}'$ je deformace grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. **14.1** jest jednotkou grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ pole D invariantní podgrupy $\mathfrak{D}$. Protože v $\boldsymbol{i}$ je na jednotku $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$ zobrazena právě jenom jednotka grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, jsou v $\boldsymbol{d}$ zobrazeny na $\underline{1}^*$ právě jenom ony prvky v $\mathfrak{G}$, které leží v D. Vychází tedy, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že $\mathfrak{D}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.

Tyto výsledky vyjadřuje *první věta o isomorfismu grup*:

Dá-li se grupa $\mathfrak{G}$ deformovat ($\boldsymbol{d}$) na grupu $\mathfrak{G}^*$, pak množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ tvoří invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa na $\mathfrak{G}$, vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{D}$, jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$, t. j. $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{G}^*$. Naopak, je-li grupa $\mathfrak{G}^*$ isomorfní s faktorovou grupou na $\mathfrak{G}$, vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{D}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že $\mathfrak{D}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.

15.3.2. *Druhá věta.* Nechť nyní $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a že je zaměnitelná s $\mathfrak{C}$. Podle druhé věty o isomorfismu grupoidů je obal $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ podgrupy $\mathfrak{C}$ ve faktorové grupě $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ isomorfní s průsekem $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ faktorové grupy $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ s podgrupou $\mathfrak{C}$, t. j. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \simeq (\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$, při čemž isomorfismus je zobrazení, v němž je ke každému prvku obalu $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$ přiřazen s ním incidentní prvek průseku $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$. Podle odst. **14.4.1** je $\mathfrak{A}$ invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a platí vzorce: $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \sqcap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$. Odtud vychází *druhá věta o isomorfismu grup*:

Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ takové, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a je zaměnitelná s $\mathfrak{C}$, pak $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a platí vztah

$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}),$$

při čemž isomorfismus je dán incidencí prvků.

Důsledkem této věty (pro $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$) je tato věta:

Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$ a je-li $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{C}$ a platí vztah

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}),$$

při čemž isomorfismus je dán incidencí prvků.

15.3.3. *Třetí věta.*

Jak víme z theorie grupoidů (kap. **9**), máme ještě třetí větu o isomorfismu grupoidů a ta se týká zákrytu faktoroidu.

Nechť $\mathfrak{B}$ značí libovolnou invariantní podgrupu v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ libovolnou invariantní podgrupu ve faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Podle třetí věty o isomorfismu grupoidů je faktorová grupa $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ isomorfní se zákrytem $\bar{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynuceným faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$, t. j. $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1 \simeq \bar{\mathfrak{A}}$, při čemž isomorfismus je zobrazení, v němž je ke každému prvku $\bar{\bar{b}} \in (\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ přiřazen součet $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ všech prvků $\bar{b} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$. Podle odst. **14.5** je součet všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\mathfrak{B}_1$ polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a $\bar{\mathfrak{A}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$; mimo to máme $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Odtud plyne třetí věta o isomorfismu grup:

Je-li $\mathfrak{B}$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}_1$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, pak součet prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\mathfrak{B}_1$ je polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a platí vztah

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A},$$

při čemž isomorfismus přiřazuje ke každému prvku $\bar{\bar{b}}$ faktorové grupy na levé straně součet všech prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$.

15.4. Deformace faktorových grup.

Navazujíce na výsledky v odst. **9.5** o deformaci faktoroidů, všimněme si, jak se tyto výsledky utvářejí v případě, že jde o faktorové grupy.

Nechť $\mathbf{d}$ značí libovolnou deformaci grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$, takže máme $\mathfrak{G}^* = \mathbf{d}\mathfrak{G}$.

Z odst. **15.3.1** víme, že množina všech vzorů v $\mathbf{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ tvoří jistou invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$.

Deformace $\mathbf{d}$ určuje rozšířené zobrazení $\mathbf{d}$ systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$ do systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}^*$; v tomto zobrazení je obrazem každé podmnožiny $A \subset \mathfrak{G}$ podmnožina $\mathbf{d}A \subset \mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\mathbf{d}$ jednotlivých prvků $a \in A$ (**3.8.1**).

Budiž $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ libovolná faktorová grupa na grupě $\mathfrak{G}$, vytvořená jistou invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$.

Podle věty **14.3.4** jsou faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ doplňkové. Z toho plyne, že faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ má v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ jistý obraz $\mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$; $\mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je faktoroid na grupě $\mathfrak{G}^*$ (**9.5.1**). Částečné rozšířené zobrazení $\mathbf{d}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na faktoroid $\mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je deformace, t. zv. rozšířená deformace $\mathbf{d}$ (**9.5.2**).

Obraz pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ obsahuje jednotku grupy $\mathfrak{G}^*$ (**15.1.1**). Z toho plyne, že $\mathbf{d}A \in \mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je polem jisté podgrupy $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}^*$ a že faktoroid $\mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ je faktorová grupa vytvořená invariantní podgrupou $\mathbf{d}\mathfrak{A}$ (**13.3.2**), t. j. $\mathbf{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) = \mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$.

Nejmenší společný zákryt $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ faktorových grup $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ a faktorová grupa $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ jsou isomorfní; isomorfní zobrazení faktoroidu $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ na $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ obdržíme, když ke každému prvku onoho faktoroidu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ (**9.5.3**). Faktoroid $[\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/\mathfrak{D}]$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ (**14.3.2**).

Došli jsme k tomuto výsledku:

Když grupa $\mathfrak{G}^*$ je homomorfní ($\mathbf{d}$) s grupou $\mathfrak{G}$, pak obrazem každé faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ je faktorová grupa $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ a částečné rozšířené zobrazení $\mathbf{d}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na faktorovou grupu $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ je deformace. Faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$, $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ jsou isomorfní; isomorfní zobrazení faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ na $\mathbf{d}\mathfrak{G}/\mathbf{d}\mathfrak{A}$ obdržíme, když ke každému prvku první faktorové grupy přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$.

Zejména je každá faktorová grupa, která je zákrytem faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, isomorfní se svým obrazem v rozšířené deformaci $\mathbf{d}$; isomorfní zobrazení dostaneme, když ke každému prvku zákrytu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$.

15.5. Cvičení.

15.5.1. Realisujte permutacemi abstraktní grupu 4. řádu, jejíž multiplikační tabulka je napsána jako první v odst. **11.6.1.**

15.5.2. Když je dána multiplikační tabulka nějaké konečné grupy $\mathfrak{G}$, pak symboly levých translací na $\mathfrak{G}$ obdržíme, když po každé opíšeme vodorovné záhlaví a pod ně napíšeme jeden řádek tabulky. Podobně sestavíme ze svislého záhlaví a jednotlivých sloupců symboly pravých translací na $\mathfrak{G}$.

15.5.3. Pravidelný osmistěn má celkem 13 os souměrnosti (3 procházejí vždy dvěma protějšími vrcholy, 6 prochází středy vždy dvou protějších hran a 4 středy vždy dvou protějších stěn). Všechna otočení osmistěnu okolo os souměrnosti, která osmistěn převádějí v sebe, tvoří grupu 24. řádu, t. zv. *grupu oktaedrickou* (přitom se otočení okolo téže osy o úhly lišící se o celé násobky 360° považují za stejná); označme pro okamžik tuto grupu $\mathfrak{O}$. Každému otočení, které je prvkem v $\mathfrak{O}$, odpovídá jistá permutace 3 os souměrnosti procházejících vždy dvěma protějšími vrcholy. Když ke každému prvku v $\mathfrak{O}$ přiřadíme příslušnou permutaci, obdržíme deformaci grupy $\mathfrak{O}$ na symetrickou permutační grupu $\mathfrak{S}_3$. Použijte této deformace a dokažte pomocí první a třetí věty o isomorfismu grup, že grupa $\mathfrak{D}$ obsahuje invariantní podgrupy řádů 4, 12.

16. O CYKLICKÝCH GRUPÁCH.

16.1. Definice.

Libovolná grupa $\mathfrak{G}$ se nazývá cyklická, když v ní existuje prvek, t. zv. základní, který se vyznačuje tím, že každý prvek v $\mathfrak{G}$ je jeho mocninou. Když $\mathfrak{G}$ je cyklická grupa a a její základní prvek, pak grupu $\mathfrak{G}$ označujeme zpravidla symbolem (a).

Z prvního vzorce (1) odst. **11.3** plyne, že *každá cyklická grupa jest abelovská.*

16.2. Řád cyklických grup.

Uvažujme o libovolné cyklické grupě (a). Jsou-li mocniny a^i, a^j prvku a s každými dvěma různými mocniteli i, j různé, pak grupa (a) má řád 0, neboť obsahuje nekonečně mnoho prvků

$$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots. \tag{1}$$

Protože každý prvek grupy (a) je některou mocninou prvku a, není v grupě (a) jiných prvků než jsou tyto a vychází, že se grupa (a) skládá z prvků (1). Předpokládejme nyní, že mocniny prvku a s některými různými mocniteli i, j jsou rovné, takže $a^i = a^j$, $i \neq j$. Z této rovnosti plyne $a^{-j} . a^i = a^{-j} . a^j$, t. j. $a^{i-j} = \underline{1}$. Protože jedno z čísel $i - j$, $j - i$ je přirozené a mocniny prvku a s těmito mocniteli jsou rovny $\underline{1}$, vidíme, že existují přirozená čísla x vyhovující rovnici $a^x = \underline{1}$. Mezi těmito přirozenými čísly je jisté číslo nejmenší; označme je n, takže máme $a^n = \underline{1}$. Uvažujme o těchto prvcích grupy (a):

$$\underline{1}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}. \tag{2}$$

Především snadno zjistíme, že každé dva z nich jsou různé; skutečně, platí-li pro některé z nich rovnost $a^i = a^j$, jest jedno z obou čísel $i - j$, $j - i$ přirozené a menší než n a hoví rovnici $a^x = \underline{1}$; ale to odporuje definici čísla n. Grupa (a) má tedy alespoň n prvků (2) a má tedy řád buď 0 nebo $\geq n$. Dále snadno ukážeme, že grupa (a) jiných prvků nemá, takže její řád jest n. Za tím účelem uvažujme o libovolném