12.6. Cvičení.

12.6.1. Když grupa $\mathfrak{G}$ jest abelovská, pak levá třída libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k nějaké podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ je současně pravou třídou prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$; odtud plyne rovnost levého a pravého rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$.

12.6.2. Levý (a současně pravý) rozklad grupy $\mathfrak{Z}$, vytvořený podgrupou skládající se ze všech násobků libovolného přirozeného čísla n, je rozklad $\bar{Z}_n$, o němž jsme uvažovali v odst. **8.3.**

12.6.3. Řád každé grupy, jejíž prvky jsou permutace nějaké konečné množiny řádu n, je dělitelem čísla $n!$.

12.6.4. Počet prvků v libovolné konečné abelovské grupě řádu N, které jsou samy k sobě inversní, je dělitelem čísla N.

12.6.5. Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu a B libovolnou podmnožinu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Ukažte, že: 1. součet všech levých (pravych) tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s B, je $B\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}B$); 2. součet všech levých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s některou pravou třídou $\mathfrak{A}a$, je týž, jako součet všech pravých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$ incidentních s levou třídou $a\mathfrak{A}$.

13. O INVARIANTNÍCH PODGRUPÁCH.

13.1. Definice.

Když nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ se vyznačuje vlastností, že levá a pravá třída každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ splývají, když tedy pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, *pak pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní nebo normální podgrupa v grupě $\mathfrak{G}$.* V tomto případě ovšem *levý a pravý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ splývají v jeden t. zv. rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$.*

13.2. Vlastnosti invariantních podgrup.

13.2.1. Všimněme si nyní vlastností invariantních podgrup. V každé grupě $\mathfrak{G}$ existují alespoň dvě invariantní podgrupy, a to nejmenší podgrupa $\mathfrak{E}$, skládající se z jediného prvku 1, a největší podgrupa $\mathfrak{G}$. V grupách mohou existovati podgrupy, které nejsou invariantní; na př. podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{S}_3$, skládající se z obou permutací $\underline{1}$, f (označení jako v odst. 12.5.2) není invariantní v $\mathfrak{S}_3$, neboť, jak jsme v odst. 12.5.2 viděli, máme na př. $a\mathfrak{A} = \{a, c\}$, $\mathfrak{A}a = \{a, d\}$, takže $a\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}a$.

13.2.2. Když jsou dány v nějaké grupě $\mathfrak{G}$ dvě podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}$ je nadgrupa na $\mathfrak{A}$, takže $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$, a když podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak je tím spíše invariantní v $\mathfrak{B}$. Když ale naopak podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{B}$, pak nemusí nutně býti invariantní v $\mathfrak{G}$, neboť platí-li rovnost $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{B}$, nemusí platiti pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$. Když na př. nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ není invariantní v $\mathfrak{G}$, je sice invariantní v $\mathfrak{A}$, ale není invariantní v $\mathfrak{G}$.

13.2.3. *Když nějaká podgrupa $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$, pak je zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$.* Pak totiž máme $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$ pro každý prvek $x \in \mathfrak{C}$ a odtud vychází, že podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ jsou vzájemně zaměnitelné. Když nějaké podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ jsou vzájemně zaměnitelné, pak nemusí nutně některá z nich býti invariantní v $\mathfrak{G}$, jak je tomu na př. v případě, když $\mathfrak{A}$ není v $\mathfrak{G}$ invariantní a $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$.

13.2.4. *Průnik a součin invariantních podgrup.*

Když podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou invariantní v $\mathfrak{G}$, pak také průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ jsou invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$.

Vskutku, když předpoklad je splněn, platí pro každý prvek $x \in \mathfrak{G}$ rovnosti $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$, $x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x$. Z nich soudíme, přihlížejíce k větě 12.2.6 a k obdobné větě pro pravé třídy, že platí tyto rovnosti: $x(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = x\mathfrak{A} \cap x\mathfrak{B} = \mathfrak{A}x \cap \mathfrak{B}x = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})x$; tím je zjištěno, že podgrupa $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$. Dále soudíme, přihlížejíce k výsledkům v odst. 10.2.2, že platí vzorce: $x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (x\mathfrak{A})\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}x)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(x\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}x) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})x$; z nich plyne, že podgrupa $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je invariantní v $\mathfrak{G}$.

13.2.5. *Oreova věta.* Vyjadřuje, že *pro každé tři invariantní podgrupy $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$, platí rovnost*

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}.$$

Vskutku, především vidíme, že každý prvek podgrupy $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ je součinem ab jistého prvku $a \in \mathfrak{A}$ s jistým prvkem $b \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$; z věty 12.2.6 a z předpokladu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ plynou vztahy: $ab \in a\mathfrak{B} \cap a\mathfrak{C} = a\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Tím je zjištěno, že podgrupa $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ je částí podgrupy $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Dále je každý prvek $c \in \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ součinem jistého prvku

$a \in \mathfrak{A}$ s jistým prvkem $b \in \mathfrak{B}$, takže $c = ab$; vidíme, že je $b = a^{-1}c$, takže vzhledem k předpokladu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ platí vztah $b \in \mathfrak{C}$, a vychází $b \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ a tedy $c \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$. Tím je zjištěno, že podgrupa $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ je částí podgrupy $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$, a důkaz je ukončen.

13.2.6. *Dedekindův svaz invariantních podgrup.* Systém O všech invariantních podgrup v grupě $\mathfrak{G}$ není prázdný (**13.2.1**); součin a průnik každých dvou prvků tohoto systému jest opět prvkem systému (**13.2.4**). Když ke každé uspořádané dvojici invariantních podgrup $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$ přiřadíme jednou invariantní podgrupu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ a po druhé invariantní podgrupu $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, obdržíme po každé násobení v systému O a tím dvojici soumístných grupoidů Ω na tomto poli. Každý z obou grupoidů jest abelovský (**13.2.3, 1.6.1**) a asociativní (**10.2.2, 1.7.4**) a všechny jeho prvky jsou rovnomocné (**10.3.2, 1.7.1**). Mimo to vidíme, že násobení obou grupoidů spolu souvisí podle vzorců $\mathfrak{A}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, v nichž ovšem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ značí libovolné prvky systému O. Tím je zjištěno, že Ω je svaz na poli O (**10.6.1**).

Zvolme za horní grupoid svazu Ω na př. onen, v němž součin dvou invariantních podgrup je dán jejich součinem. Potom obdržíme horní částečné uspořádání $\boldsymbol{h}$ svazu Ω, když ke každé invariantní podgrupě $\mathfrak{A} \in O$ přiřadíme každou její nadgrupu $\mathfrak{B} \in O$. Podle Oreovy věty (**13.2.5**) splňuje každá uspořádaná trojice invariantních podgrup $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in O$, v níž je $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{C}$ $(\boldsymbol{h})$ horní Dedekindův vztah. Mimo to vidíme, že svaz Ω má krajní prvky, a to největší podgrupu $\mathfrak{G}$ a nejmenší podgrupu $\mathfrak{E}$.

Tím jsme došli k výsledku, že *v každé grupě je systém všech invariantních podgrup s výše popsanými násobeními Dedekindovým svazem s krajními prvky.*

13.3. Vytvořující rozklady na grupě.

13.3.1. *Věta první.* Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Jak jsme viděli v odst. **12.3.1**, vytvořuje podgrupa $\mathfrak{A}$ levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a pravý rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$. Položme si otázku, zda na př. levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ může být vytvořující.

Předpokládejme nejprve, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ vytvořující je, a uvažujme o dvou libovolných prvcích $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, takže a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$. Podle definice vytvořujícího rozkladu existuje prvek $c\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ takový, že platí vztah

$$a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}.$$

Z tohoto vztahu plyne zejména $ab\mathfrak{A} = (a1) . b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, tedy $ab\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, a odtud opět $ab = ab . 1 \in c\mathfrak{A}$, takže podle **12.2.1** a **12.2.4** máme $c\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy především vztah $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} \subset ab\mathfrak{A}$. Každý prvek v levé třídě $ab\mathfrak{A}$ je součinem $ab . x$ prvku ab s některým prvkem $x \in \mathfrak{A}$ a zřejmě platí vztahy $abx = (a1)(bx) \in a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A}$; odtud plyne, že současně je $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} \supset ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}, \tag{1}$$

t. j. součin levé třídy $a\mathfrak{A}$ s levou třídou $b\mathfrak{A}$ je levá třída $ab\mathfrak{A}$.

Z rovnosti (1) plynou zejména pro $b = a^{-1}$ vztahy: $a\mathfrak{A}a^{-1} = a\mathfrak{A} . (a^{-1}1) \subset a\mathfrak{A} . a^{-1}\mathfrak{A} = aa^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, a tedy vychází $a\mathfrak{A}a^{-1} \subset \mathfrak{A}$. Protože a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, platí tento vztah i pro prvek a^{-1}, a tedy máme současně $a^{-1}\mathfrak{A}a \subset \mathfrak{A}$; odtud plyne $\mathfrak{A} = (aa^{-1})\mathfrak{A}(aa^{-1}) = a(a^{-1}\mathfrak{A}a)a^{-1} \subset a\mathfrak{A}a^{-1}$, t. j. $a\mathfrak{A}a^{-1} \supset \mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$a\mathfrak{A}a^{-1} = \mathfrak{A},$$

nebo, což je totéž, $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, takže levá třída každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ je současně pravou třídou prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$. Je tedy podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní v grupě $\mathfrak{G}$.

Předpokládejme nyní naopak, že podgrupa $\mathfrak{A}$ je invariantní v grupě $\mathfrak{G}$. Pak především podle definice plyne, že levá třída $a\mathfrak{A}$ každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$ je současně pravou třídou $\mathfrak{A}a$ prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$. Pak pro každé dvě levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ platí tyto rovnosti: $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} = a(\mathfrak{A}b)\mathfrak{A} = a(b\mathfrak{A})\mathfrak{A} = ab(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = ab\mathfrak{A}$ a z nich plyne $a\mathfrak{A} . b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$. Platí-li tedy náš předpoklad, pak součin levé třídy $a\mathfrak{A}$ s levou třídou $b\mathfrak{A}$ je levá třída $ab\mathfrak{A}$, a tím je také zjištěno, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$, který jest ovšem rovný rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, je vytvořující. Můžeme tedy své hořejší úvahy shrnouti v této větě:

Je-li podgrupa $\mathfrak{A}$ invariantní v grupě $\mathfrak{G}$, a jenom v tomto případě, je levý (pravý) rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ vytvořující. Součin libovolného prvku $a\mathfrak{A}$ rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$ s libovolným prvkem $b\mathfrak{A}$ je pak prvek $ab\mathfrak{A}$.

13.3.2. *Věta druhá.* Pozoruhodná vlastnost grup záleží v tom, že každý vytvořující rozklad libovolné grupy $\mathfrak{G}$ je vytvořen nějakou invariantní podgrupou.

Uvažujme o libovolném vytvořujícím rozkladu $\overline{G}$ grupy $\mathfrak{G}$. Protože každý prvek grupy $\mathfrak{G}$ jest obsažen v některém prvku rozkladu $\overline{G}$ a právě jenom v jednom, existuje jistý prvek $A \in \overline{G}$, který obsahuje jednotku 1 grupy $\mathfrak{G}$. Dokážeme, že A je polem invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a $\overline{G}$ je rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený touto invariantní podgrupou.

Proto především uvažme, že existuje prvek $\bar{a} \in \overline{G}$ takový, že $AA \subset \bar{a}$, neboť rozklad $\overline{G}$ je vytvořující. Protože jednak platí vztahy $\underline{1} = \underline{1} \,.\, \underline{1} \in AA \subset \bar{a}$ a jednak $\underline{1} \in A$, máme $\bar{a} = A$, a tím jest ukázáno, že množina A je grupoidní. Příslušný podgrupoid $\mathfrak{A}$ obsahuje jednotku 1 grupy $\mathfrak{G}$ a jak nyní ukážeme, obsahuje s každým svým prvkem a také inversní prvek a^{-1}.

Nechť $a \in A$ a nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\overline{G}$, který obsahuje inversní prvek a^{-1}. Protože $1 = aa^{-1} \in A\bar{b}$, je prvek $\underline{1}$ obsažen v součinu $A\bar{b}$ a ovšem je obsažen také v A. Protože rozklad $\overline{G}$ je vytvořující a protože obě podmnožiny $A\bar{b}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, máme $A\bar{b} \subset A$. Odtud plyne: $\underline{1}.a^{-1} \in A$, t. j. $a^{-1} \in A$, a tím je zjištěno, že $\mathfrak{A}$ je podgrupou v $\mathfrak{G}$.

Zbývá ukázati, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$ a že každý prvek $\bar{a} \in \overline{G}$ je třída libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$. Nechť $a \in \mathfrak{G}$ a nechť nyní $\bar{a}$ značí onen prvek v $\overline{G}$, který obsahuje a, takže máme vztahy: $a \in \bar{a} \in \overline{G}$. Když $x \in \bar{a}$, pak je $x = \underline{1} \,.\, x \in A\bar{a}$ a odtud plyne $\bar{a} \subset A\bar{a}$; protože rozklad $\overline{G}$ je vytvořující a obě podmnožiny $A\bar{a}$, $\bar{a}$ obsahují prvek a, platí vztah $A\bar{a} \subset \bar{a}$. Vychází tedy $A\bar{a} = \bar{a}$ a podobně obdržíme $\bar{a}A = \bar{a}$, takže platí rovnosti

$$\bar{a} = A\bar{a} = \bar{a}A. \tag{2}$$

Zřejmě jest $aA \subset \bar{a}A$. Ukažme, že současně platí $\bar{a}A \subset aA$. Nechť $\bar{b}$ značí onen prvek v $\overline{G}$, který obsahuje prvek a^{-1}. Protože rozklad $\overline{G}$ je vytvořující a protože obě podmnožiny $\bar{b}\bar{a}$, A obsahují prvek $\underline{1}$, je $\bar{b}\bar{a} \subset A$, a tedy součin $a^{-1}x$ prvku a^{-1} s libovolným prvkem $x \in \bar{a}$ jest obsažen v A. Tedy $x = a(a^{-1}x) \in aA$ a vidíme, že platí vztah $\bar{a} \subset aA$. Odtud plyne $\bar{a}A \subset aAA = aA$. Vychází tedy $\bar{a}A = aA$ a podobně se odvodí, že platí rovnost $A\bar{a} = Aa$. Odtud a z (2) vychází

$$\bar{a} = a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a.$$

Tyto rovnosti především ukazují, že podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{G}$. Protože platí pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ a onen prvek $\bar{a} \in \bar{G}$, v němž prvek a jest obsažen, platí také pro libovolný prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ a libovolný prvek $a \in \bar{a}$, a ukazují tedy, že každý prvek $\bar{a} \in \bar{G}$ je třída libovolného prvku $a \in \bar{a}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$.

Tím jsme určili všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$:

Všechny vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom rozklady grupy $\mathfrak{G}$ vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.

13.3.3. *Vlastnosti vytvořujících rozkladů grupy.* Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na grupě $\mathfrak{G}$. Podle **13.3.2** jest $\bar{A}$ ($\bar{B}$) rozklad vytvořený jistou podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), která jest invariantní v grupě $\mathfrak{G}$. Podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou tedy vzájemně zaměnitelné (**13.2.3**). Z výsledků o levých nebo pravých rozkladech grupy (**12.3**) vidíme, že vytvořující rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ mají tyto vlastnosti:

a. *Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) je zákrytem (zjemněním) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$) tehdy a jen tehdy, když podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$, t. j. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.*

b. *Nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ je rozklad vytvořený invariantní podgrupou $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.*

c. *Největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ je rozklad vytvořený invariantní podgrupou $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

d. *Rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňkové.*

e. Systém O vytvořujících rozkladů na grupě $\mathfrak{G}$ není prázdný (**8.1.1**); nejmenší společný zákryt a největší společné zjemnění každých dvou prvků tohoto systému jest opět prvkem systému (**8.1.3.3**, **8.1.3.4**). Když ke každé uspořádané dvojici $\bar{A}, \bar{B} \in O$ přiřadíme jednou nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ a po druhé největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$, obdržíme po každé násobení v systému O a tím dvojici soumístných grupoidů Ω na tomto poli. Ω je svaz na poli O (**2.6.2.2**, **2.7.2.2**, **2.8**). Tento svaz se vyznačuje tím, že každé dva rozklady, z nichž se skládá, jsou doplňkové (**13.3.3.d**). Svaz Ω je tedy modulární (**10.7.9**). Mimo to má krajní prvky $\bar{G}_{\max}$, $\bar{G}_{\min}$ (**8.1.1**, **10.6.5.1**). Tím jsme došli k výsledku:

V každé grupě je systém všech vytvořujících rozkladů s výše popsanými násobeními Dedekindovým svazem s krajními prvky.

13.4. Cvičení.

13.4.1. V grupě $\mathfrak{S}_4$ skládající se ze všech permutací prvků a, b, c, d, tvoří všechny permutace, které zobrazují prvek d na sebe, podgrupu $\mathfrak{S}_3'$. Permutace, které zobrazují prvky a, b, c jako permutace **e**, ***a***, ***b*** v odst. **5.4.2** a prvek d nechávají beze změny, tvoří podgrupu v $\mathfrak{S}_4$, která jest invariantní v $\mathfrak{S}_3'$, ale není invariantní v $\mathfrak{S}_4$.

13.4.2. Nechť $\mathfrak{A}$ jest libovolná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Množina všech prvků $a \in \mathfrak{G}$ takových, že $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$, tvoří podgrupu $\mathfrak{N}$ na $\mathfrak{A}$, t. zv. *normalisátor podgrupy* $\mathfrak{A}$. Podgrupa $\mathfrak{A}$ jest invariantní v $\mathfrak{N}$ a každá podgrupa v $\mathfrak{G}$, v níž jest $\mathfrak{A}$ invariantní, je podgrupou v $\mathfrak{N}$.

13.4.3. Centrum grupy $\mathfrak{G}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$.

13.4.4. Když v nějaké konečné grupě řádu N ($\geqq 2$) existuje podgrupa řádu $\frac{1}{2}N$, pak tato podgrupa je v ní invariantní. Na př. v diedrické permutační grupě, řádu $2n$ ($n \geqq 3$) máme invariantní podgrupu řádu n, která se skládá ze všech prvků grupy, odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu (viz cvič. **11.7.2**).

13.4.5. Když ke každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ přiřadíme každý prvek $x^{-1}ax \in \mathfrak{G}$, při čemž $x \in \mathfrak{G}$ značí libovolný prvek, obdržíme symetrickou kongruenci na $\mathfrak{G}$. Rozklad příslušný k této kongruenci je t. zv. *hlavní rozklad grupy* $\mathfrak{G}$. Pole každé invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ je součtem některých prvků hlavního rozkladu. Hlavní rozklad je doplňkový ke každému vytvořujícímu rozkladu grupy $\mathfrak{G}$.

14. O FAKTOROVÝCH GRUPÁCH.

14.1. Definice.

Uvažujme nyní o libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$. Podle definice faktoroidu je pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ jistý vytvořující rozklad grupy $\mathfrak{G}$ a je tedy vytvořen, podle věty v odst. **13.3.2**, jistou podgrupou $\mathfrak{A}$, která jest invariantní v $\mathfrak{G}$. Podle definice násobení faktoroidu je součin $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A}$ libovolného prvku $a\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ s libovolným prvkem $b\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$ onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje množinu $a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A}$; protože tato množina splývá, jak jsme viděli, s prvkem $ab\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{G}}$, máme pro násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ tento vzorec: $a\mathfrak{A} \cdot b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$.