Později (v odst. **14.2**, **14.3.4**) uvidíme, že se některé grupoidy vyznačují tím, že na nich jsou každé dva faktoroidy doplňkové. Proto je vhodné podotknout, že dva faktoroidy daného grupoidu obecně doplňkovými nejsou. Na př. na grupoidu, jehož pole má čtyři prvky $a, b, c, d$ a násobení je dáno vzorcem $xy = y$, jsou všechny rozklady vytvořující (cvič. 8.8.6); faktoroidy, jejichž pole jsou na př. oba rozklady $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ a $\{a\}$, $\{b, c, d\}$ doplňkovými nejsou (cvič. **2.10.11**).

**8.8.** Cvičení.

**8.8.1.** Ukažte, že grupoidy $\mathfrak{Z}_n$, $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ $(n \geqq 1)$ jsou isomorfní.

**8.8.2.** Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla $m > 1$. Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \overline{\mathfrak{Z}}_n$ a $\overline{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ $(n > 1)$, když $m, n$ nejsou nesoudělná?

**8.8.3.** Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel s výjimkou těch, jejichž číslice v desítkové soustavě obsahují 0, a jehož násobení je definováno takto: Pro $a, b \in \mathfrak{G}$ je součin $ab$ číslo dané v desítkové soustavě číslicí $a_1 \dots a_\alpha b_1 \dots b_\beta$, při čemž $a_1 \dots a_\alpha$ $(b_1 \dots b_\beta)$ je číslice v desítkové soustavě čísla $a$ $(b)$. Tedy na př. $14 . 23 = 1423$. Ukažte, že: 1. grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní; 2. rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož prvky jsou množiny všech čísel v $\mathfrak{G}$, která jsou v desítkové soustavě dána číslicemi vždy o stejném počtu cifer, je vytvořující.

**8.8.4.** Každý faktoroid na nějakém abelovském (asociativním) grupoidu jest abelovský (asociativní).

**8.8.5.** Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje prvek $a$ takový, že $aa = a$, t. zv. *rovnomocný* neboli *idempotentní* prvek, pak onen prvek libovolného faktoroidu v $\mathfrak{G}$, který obsahuje prvek $a$, je rovněž rovnomocný.

**8.8.6.** Grupoid $\mathfrak{G}$, jehož polem je libovolná množina a násobení je dáno tím, že pro $a, b \in \mathfrak{G}$ jest $ab = a$ $(ab = b)$, jest asociativní a všechny jeho rozklady jsou vytvořující.

## 9. VĚTY O ISOMORFISMU GRUPOIDŮ. DEFORMACE FAKTOROIDŮ.

**9.1.** První věta.

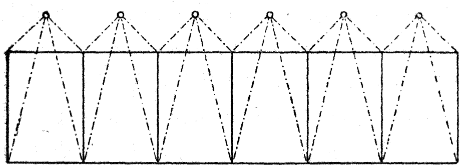
Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. V odst. **8.1.2** jsme ukázali, že rozklad $\bar{D}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$, je vytvořující. Nechť $\bar{\mathfrak{D}}$ značí faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $\bar{D}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ přiřadíme onen prvek $a^* \in \mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se $\bar{a}$ skládá, obdržíme jisté prosté zobrazení faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$; označme je $\boldsymbol{i}$. Podle definice zobrazení $\boldsymbol{i}$ platí tedy rovnost $\boldsymbol{i}\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, a to pro každý prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ a každý prvek $a \in \bar{a}$. Nechť $\bar{a}, \bar{b}$ značí libovolné prvky v $\bar{\mathfrak{D}}$ a nechť $a$ je libovolný prvek v $\bar{a}$ a $b$ libovolný prvek v $\bar{b}$. Pak platí vztahy: $ab \in \overline{ab} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ a odtud plyne $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{i}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{b}$. Máme tedy rovnost $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \boldsymbol{i}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{b}$, která vyjadřuje, že $\boldsymbol{i}$ je deformace, a tedy (protože je prostá) isomorfismus faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ na $\mathfrak{G}^*$. Tím jsme došli k poznatku, že když existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak na $\mathfrak{G}$ existuje faktoroid isomorfní s $\mathfrak{G}^*$, a to faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ příslušný k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$, při čemž isomorfismus je výše definované zobrazení $\boldsymbol{i}$. O faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ pravíme, že *patří* neboli *přísluší k deformaci* $\boldsymbol{d}$.

Nechť nyní naopak $\bar{\mathfrak{D}}$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ a nechť $\boldsymbol{d}$ značí zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\bar{\mathfrak{D}}$ definované takto: Obraz v $\boldsymbol{d}$ libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest onen prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$, v němž $a$ leží, t. j. pro nějž platí $a \in \bar{a}$. Snadno ukážeme, že $\boldsymbol{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\bar{\mathfrak{D}}$. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $a, b \in \mathfrak{G}$ a o oněch prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$, které obsahují $a, b$, takže $\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, $\bar{b} = \boldsymbol{d}b$. Ze vztahů $ab \in \overline{ab} \subset \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ plyne $ab \in \bar{a} \cdot \bar{b}$ a dále $\boldsymbol{d}ab = \bar{a} \cdot \bar{b} = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b$, takže skutečně zobrazení $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{D}}$. Vychází tedy, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovat na každý faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ ležící na $\mathfrak{G}$, a to tak, že se každý prvek v $\mathfrak{G}$ zobrazí na onen prvek v $\bar{\mathfrak{D}}$, v němž leží. Odtud plyne dále, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovat na každý grupoid $\mathfrak{G}^*$, který jest isomorfní s některým faktoroidem na $\mathfrak{G}$.

Hořejší výsledky stručně shrnuje t. zv. *první věta o isomorfismu grupoidů*:

*Když grupoid $\mathfrak{G}^*$ je homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$, pak jest isomorfní s jistým faktoroidem na $\mathfrak{G}$; když grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest isomorfní s některým faktoroidem na grupoidu $\mathfrak{G}$, pak je homomorfní s $\mathfrak{G}$.*

Obsah první věty o isomorfismu grupoidů je znázorněn na příkladě v obr. 9. V něm jsou vyznačena pole dvou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ a jistá deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ je množina bodů uvnitř a na obvodu velkého obdélníka, pole grupoidu $\mathfrak{G}^*$ se skládá z vyznačených bodů nad obdélníkem; deformace $\boldsymbol{d}$ zobrazuje všechny prvky grupoidu $\mathfrak{G}$, ležící vždy v některém menším obdélníku na onen prvek grupoidu $\mathfrak{G}^*$, který je nad ním, jak je naznačeno čarami jdoucími od vrcholů menších obdélníků k prvkům grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Množiny bodů uvnitř a na obvodech menších obdélníků jsou prvky faktoroidu na $\mathfrak{G}$, který jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$.



Obr. 9.

9.2. Druhá věta.

Nechť nyní $\overline{\mathfrak{A}}$ značí libovolný faktoroid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}$ libovolný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $B \sqcap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$. V odst. 8.4.1 jsme vyložili, že tato dvojice jednoznačně určuje jednak obal $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a jednak průsek $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$. Obal $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ je podgrupoid v $\overline{\mathfrak{A}}$ a průsek $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ je faktoroid v $\mathfrak{B}$. Podle definice grupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ má každý prvek $\bar{a} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ a podmnožina $B$ neprázdný průnik $\bar{x} = \bar{a} \cap B$; tento průnik je prvkem v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Podle definice grupoidu $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ je každý prvek $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ neprázdným průnikem $\bar{a} \cap B$ jistého prvku $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ a podmnožiny $B$; prvek $\bar{a}$ je tedy incidentní s $B$ a je tedy prvkem v $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ přiřadíme prvek $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, obdržíme jisté zobrazení, označme je $\boldsymbol{i}$, podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ jest isomorfismus.

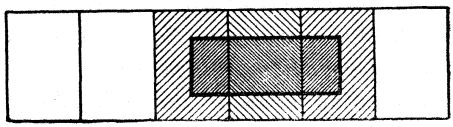
Především snadno zjistíme, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ je prosté. Je-li totiž některý prvek $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ v zobrazení $\boldsymbol{i}$ obrazem některých prvků $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$, takže $\bar{x} = \bar{a} \cap B = \bar{b} \cap B$, máme vztahy $\emptyset \neq \bar{x} \subset \bar{a} \cap \bar{b}$, a odtud plyne $\bar{a} = \bar{b}$, neboť dva různé prvky grupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ incidentní nejsou.

Dále snadno ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ je deformace. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$. Nechť $\bar{x} = \boldsymbol{i}\bar{a}$, $\bar{y} = \boldsymbol{i}\bar{b} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, takže $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$. Máme ukázat, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ zachovává násobení v grupoidech $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, t. j. že $\bar{x} \cdot \bar{y} = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b})$. Z rovností $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$ plynou vztahy $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \overline{\mathfrak{A}}$; podle definice násobení v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, je $\bar{x} \cdot \bar{y}$ prvek v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ obsahující množinu $\bar{x}\bar{y}$ a podle definice faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ existuje prvek $\bar{c} \in \overline{\mathfrak{A}}$ takový, že

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{c} \cap B$. Vychází tedy $\emptyset \neq \bar{x}\bar{y} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \cap \bar{c}$ a odtud plyne $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, protože dva různé prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ nejsou incidentní. Máme tedy rovnost $\bar{x} \cdot y = \bar{a} \cdot \bar{b} \cap B$ a tedy také $\bar{x} \cdot \bar{y} = \mathsf{i}(\bar{a} \cdot \bar{b})$. Došli jsme k výsledku, který stručně vyjadřuje t. zv. *druhá věta o isomorfismu grupoidů:*

*Obal libovolného podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ v libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ v $\mathfrak{G}$ ($B \cap \mathsf{s}\bar{A} \neq \emptyset$) a průsek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ jsou isomorfní, t. j.* $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}} \simeq \bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$.

Když zejména faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ je *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap \mathsf{s}\bar{A} \neq \emptyset$ je splněn a z naší věty vyplývá, že *obal libovolného podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ v libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ a průsek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ jsou isomorfní.*



Obr. 10.

Obsah druhé věty o isomorfismu grupoidů je znázorněn na příkladě v obr. 10. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ je množina všech bodů v nákresné rovině, pole faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech stejných obdélníků a pole podgrupoidu $\mathfrak{B}$ z bodů uvnitř a na obvodu vnitřního obdélníka. Řídkým a hustým čárkováním jsou vyznačeny prvky obalu $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ a průseku $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Podle hořejšího výsledku je zobrazení každého prvku obalu $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ na onen prvek průseku $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, který obsahuje, isomorfismus podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}} \subset \bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$.

## 9.3. Třetí věta.

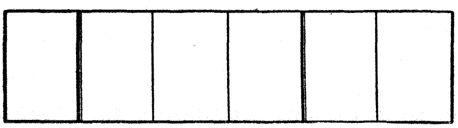
Jest ještě jedna důležitá věta o isomorfismu grupoidů a ta se týká zákrytu faktoroidu.

Nechť $\bar{\mathfrak{B}}$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ a $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ libovolný faktoroid na $\bar{\mathfrak{B}}$. Jak víme, vynucuje faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ jistý zákryt $\bar{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Připomeňme si, že $\bar{\mathfrak{A}}$ je faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek je součtem všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, které jsou obsaženy vždy v témže prvku faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$. Když ke každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$, který je součtem všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ ležících v prvku $b$, obdržíme jisté zobrazení, označme je $\boldsymbol{i}$, faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$. Ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ jest isomorfismus.

Především je zřejmé, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ je prosté. Abychom ukázali, že je deformací, uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2 \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ a o součinu $\bar{\bar{b}}_3 \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ prvku $\bar{\bar{b}}_1$ s prvkem $\bar{\bar{b}}_2$. Podle definice násobení faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, platí pro každý prvek $\bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{B}}$, obsažený v $\bar{\bar{b}}_1$ a každý prvek $\bar{b}_2 \in \overline{\mathfrak{B}}$, obsažený v $\bar{\bar{b}}_2$, vztah $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$. Nechť $\bar{a}_1$ značí onen prvek zákrytu $\overline{\mathfrak{A}}$, který je součtem všech prvků $\bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{B}}$ obsažených v $\bar{\bar{b}}_1$, tedy $\bar{a}_1 = \Sigma \bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, a podobně, nechť $\bar{a}_2 = \Sigma \bar{b}_2$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, $\bar{a}_3 = \Sigma \bar{b}_3$ $(\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3)$, takže $\bar{a}_1 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1$, $\bar{a}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$, $\bar{a}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 \in \overline{\mathfrak{A}}$. Pak ze vztahu $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$ plyne především $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$ a dále $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \Sigma \bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \Sigma \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$, a odtud vychází, že $\bar{a}_3$ jest onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, který obsahuje $\bar{a}_1\bar{a}_2$, takže $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$. Tato rovnost se dá psáti ve tvaru $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1 \cdot \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$ a vyjadřuje, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ je deformace, a tedy (protože je prosté) isomorfismus. Došli jsme k výsledku, který stručně vyjadřuje t. zv. *třetí věta o isomorfismu grupoidů:*

*Libovolný faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na nějakém faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ a zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ vynucený faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ jsou isomorfní, t. j. $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \simeq \overline{\mathfrak{A}}$.*

Obsah třetí věty o isomorfismu grupoidů je znázorněn na příkladě v obr. 11. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ je množina bodů uvnitř a na obvodě velkého obdélníka, pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodě menších obdélníků a prvky faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ jsou množiny prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$, patřící vždy do jednoho obdélníka vyznačeného silnější čarou; pole zákrytu $\overline{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$, vynuceného faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech těchto obdélníků. Podle hořejšího výsledku je zobrazení každého prvku $\bar{\bar{b}}$ faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, který je součtem prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$, isomorfismus faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$.



Obr. 11.

## 9.4. Deformace faktoroidů.

Nechť $\boldsymbol{d}$ značí libovolnou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$.

Z odst. **9.1** víme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest isomorfní s faktoroidem $\overline{\mathfrak{D}}$ příslušným k deformaci $\boldsymbol{d}$, t. j. s faktoroidem na grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož polem je rozklad $\bar{D}$, příslušný k deformaci $\boldsymbol{d}$.

Z odst. **3.8.1** víme, že deformace $\boldsymbol{d}$ určuje rozšířené zobrazení $\boldsymbol{d}$ systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$ do systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}^*$; v tomto zobrazení jest obrazem každé podmnožiny $A \subset \mathfrak{G}$ podmnožina $\boldsymbol{d}A \subset \mathfrak{G}^*$, která se skládá z obrazů v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků $a \in A$.

Uvažujme o libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$. Jeho polem je jistý vytvořující rozklad $\bar{A}$.

Podle věty v odst. **3.8.4** je $\boldsymbol{d}\bar{A}$ rozkladem grupoidu $\mathfrak{G}^*$ tehdy a jen tehdy, když rozklady $\bar{A}$, $\bar{D}$ jsou doplňkové, t. j. když faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ jsou doplňkové.

Předpokládejme, že tato podmínka je splněna.

**9.4.1.** Snadno vidíme, že *rozklad* $\boldsymbol{d}\bar{A}$ *je vytvořující*. Vskutku, buďtež $\bar{a}^*, \bar{b}^* \in \boldsymbol{d}\bar{A}$ libovolné prvky. Pak existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ takové, že $\boldsymbol{d}\bar{a} = \bar{a}^*$, $\boldsymbol{d}\bar{b} = \bar{b}^*$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Podle věty **7.3.2** máme: $\boldsymbol{d}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$, a vidíme, že existuje prvek $(\boldsymbol{d}\bar{c} =)\ \bar{c}^* \in \boldsymbol{d}\bar{A}$ takový, že $\bar{a}^*\bar{b}^* \subset \bar{c}^*$. Tím je zjištěno, že rozklad $\boldsymbol{d}\bar{A}$ je vytvořující.

Faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}^*$, jehož polem je vytvořující rozklad $\boldsymbol{d}\bar{A}$, se nazývá *obraz faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$ *v rozšířeném zobrazení* $\boldsymbol{d}$ a označuje se symbolem $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$; faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ se nazývá *vzor faktoroidu* $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ *v rozšířeném zobrazení* $\boldsymbol{d}$.

**9.4.2.** Rozšířeným zobrazením $\boldsymbol{d}$ je určeno částečné zobrazení faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$, jímž je ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$ přiřazen jeho obraz $\boldsymbol{d}\bar{a} \in \boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$. V dalším rozumíme zobrazením $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ toto částečné zobrazení.

Ukážeme, že *zobrazení* $\boldsymbol{d}$ *faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$ *na faktoroid* $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ *je deformací.* Vskutku, že vztahů $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}$ plyne $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a dále $\boldsymbol{d}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$, takže máme $\boldsymbol{d}\bar{a} \cdot \boldsymbol{d}\bar{b} = \boldsymbol{d}\bar{c} = \boldsymbol{d}(\bar{a} \cdot \bar{b})$, a tím je důkaz proveden.

Přihlížejíce k tomuto výsledku, nazýváme zobrazení $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ *rošířenou deformací* $\boldsymbol{d}$.

**9.4.3.** K rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\boldsymbol{d}\bar{\mathfrak{A}}$ přísluší jistý faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$. Jeho prvky se skládají vždy ze všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, které mají v rozšířené deformaci $\boldsymbol{d}$ týž obraz.

Přihlížejíce k větě **3.8.5.1**, soudíme, že zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ je nejmenší společný zákryt $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}]$ faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{D}}$.

Když ke každému prvku $\overline{u} \in [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$ přiřadíme onen prvek $\overline{\overline{a}} \in \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, který obsahuje prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ v něm ležící, obdržíme isomorfní zobrazení faktoroidu $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$ na faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ (odst. **9.3**); když ke každému prvku $\overline{\overline{a}} \in \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ přiřadíme onen prvek $\overline{a}^* \in \mathbf{d}\overline{\mathfrak{A}}$, jenž jest obrazem každého prvku $\overline{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ ležícího v $\overline{\overline{a}}$, obdržíme isomorfní zobrazení faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ na faktoroid $\mathbf{d}\overline{\mathfrak{A}}$ (odst. **9.1**). Složením těchto isomorfních zobrazení obdržíme isomorfní zobrazení faktoroidu $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$ na faktoroid $\mathbf{d}\overline{\mathfrak{A}}$ (odst. **7.4.2**). V něm je ke každému prvku $\overline{u} \in [\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$ přiřazen jistý prvek $\overline{a}^* \in \mathbf{d}\overline{\mathfrak{A}}$, který je obrazem prvku $\overline{u}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$ (odst. **3.8.5.2**).

Tím jsme došli k tomuto výsledku:

*Když se nějaký faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ zobrazí v rozšířené deformaci $\mathbf{d}$ na nějaký faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}^*$ na $\mathfrak{G}^*$, pak jsou faktoroidy $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$, $\overline{\mathfrak{A}}^*$ isomorfní. Isomorfní zobrazení faktoroidu $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{D}}]$ na $\overline{\mathfrak{A}}^*$ obdržíme, když ke každému prvku prvního faktoroidu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$.*

*Zejména je každý faktoroid, který je zákrytem faktoroidu $\overline{\mathfrak{D}}$, isomorfní se svým obrazem v rozšířené deformaci $\mathbf{d}$; isomorfní zobrazení obdržíme, když ke každému prvku zákrytu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{d}$.*

**9.5.** Cvičení.

**9.5.1.** Ujasněte si věty o isomorfismu grupoidů na příkladě grupoidů $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_m$, $\overline{\mathfrak{Z}}_n$, $\overline{\overline{\mathfrak{Z}}}_d$, o nichž byla řeč v odst. **8.3**, **8.4.2** a **8.5.4**.

**9.5.2.** Každé dva faktoroidy v libovolném grupoidu $\mathfrak{G}$, takové, že každý prvek jednoho jest incidentní právě jenom s jedním prvkem druhého, jsou isomorfní, při čemž isomorfismus je dán incidencí prvků.

**9.5.3.** Budiž $\mathbf{i}$ isomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ v rozšířeném zobrazení $\mathbf{i}$ je jistý faktoroid $\mathbf{i}\overline{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a částečné rozšířené zobrazení $\mathbf{i}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na $\mathbf{i}\overline{\mathfrak{A}}$ jest isomorfismus.

**9.5.4.** Budiž $\mathbf{d}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$. Každý faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}^*$ na grupoidu $\mathfrak{G}^*$ je v rozšířené deformaci $\mathbf{d}$ obrazem jistého faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, který leží na grupoidu $\mathfrak{G}$ a je zákrytem faktoroidu příslušného k deformaci $\mathbf{d}$.