7.5.3. *Příklady*. Na př. zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ do sebe, v němž je každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ zobrazen na součin (v aritmetickém smyslu) $ka \in \mathfrak{Z}$, kde k značí libovolné celé nezáporné číslo, jest operátor na $\mathfrak{Z}$. V případě $k \geqq 1$ máme meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$, v případě $k = 1$ automorfismus na $\mathfrak{Z}$ a v případě $k = 0$ operátor, ale nikoli meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$.

Nejjednodušším příkladem automorfismu libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$ jest identické zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$, t. zv. *identický automorfismus* na $\mathfrak{G}$.

7.6. Cvičení.

7.6.1. Když některé dva prvky v grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou vzájemně zaměnitelné, pak jejich obrazy v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jsou také vzájemně zaměnitelné. Obraz každého abelovského grupoidu v každé deformaci jest opět abelovský.

7.6.2. Když některá uspořádaná trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{G}$ má jenom jeden součin, pak totéž platí o uspořádané trojici jejich obrazů $\mathbf{d}a$, $\mathbf{d}b$, $\mathbf{d}c \in \mathfrak{G}^*$ v každé deformaci $\mathbf{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého asociativního grupoidu v každé deformaci jest opět asociativní.

7.6.3. Když grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní a má centrum, pak obraz centra v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na nějaký grupoid $\mathfrak{G}^*$ je v centru grupoidu $\mathfrak{G}^*$.

7.6.4. Vzorem grupoidní podmnožiny v $\mathfrak{G}^*$ v nějaké deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí býti podmnožina grupoidní.

7.6.5. Každé meromorfní zobrazení na libovolném konečném grupoidu $\mathfrak{G}$ jest automorfismus na $\mathfrak{G}$.

7.6.6. Uveďte sami příklady deformace!

8. O FAKTOROIDECH.

8.1. Vytvořující rozklady.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupoidy.

8.1.1. *Definice. Libovolný rozklad $\bar{A}$ v $\mathfrak{G}$ se nazývá vytvořující, když součin každé uspořádané dvojice jeho prvků je částí některého prvku téhož* *rozkladu*. Jinými slovy, *když ke každé uspořádané dvojici prvků $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$.*

Pokud jde o vytvořující rozklady *na grupoidu* $\mathfrak{G}$, všimněme si, že největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ jsou vytvořující. Na každém grupoidu existují tedy alespoň oba krajní vytvořující rozklady.

8.1.2. *Rozklad patřící k deformaci.* Předpokládejme, že existuje deformace $\mathbf{d}$ grupoidu G na G^*. Deformace $\mathbf{d}$, jakožto zobrazení množiny G na G^*, určuje rozklad $\bar{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\mathbf{d}$, jehož každý prvek $\bar{a}$ se skládá ze všech vzorů v $\mathbf{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$. Protože $\mathbf{d}$ zachovává násobení v obou grupoidech, dá se očekávat, že rozklad $\bar{G}$ je k násobení v $\mathfrak{G}$ v nějakém vztahu. Uvažujme o libovolných dvou prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}$. Podle definice rozkladu $\bar{G}$ existují prvky $a^*, b^* \in \mathfrak{G}^*$ takové, že $\bar{a}$ $(\bar{b})$ je množina všech vzorů v $\mathbf{d}$ prvku a^* (b^*). Všimněme si součinu $\bar{a}\bar{b}$ množiny $\bar{a}$ s množinou $\bar{b}$. Každý prvek $c \in \bar{a}\bar{b}$ je součin některého prvku $a \in \bar{a}$ s některým prvkem $b \in \bar{b}$ a z rovnosti $\mathbf{d}c = \mathbf{d}ab = \mathbf{d}a \,.\, \mathbf{d}b = a^*b^*$ vychází, že je vzorem v $\mathbf{d}$ prvku a^*b^*. Tedy prvek c je obsažen v onom prvku $\bar{c} \in \bar{G}$, který se skládá ze vzorů prvku a^*b^*. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a vidíme, že rozklad $\bar{G}$ je vytvořující. Došli jsme k výsledku, že *rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k libovolné deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na jiný grupoid, je vytvořující.*

8.1.3. *Vlastnosti vytvořujících rozkladů.*

Popíšeme nyní vlastnosti vytvořujících rozkladů.

8.1.3.1. Nechť $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad *v grupoidu* $\mathfrak{G}$. *Podmnožina* $\mathbf{s}\bar{A} \subset \mathfrak{G}$, t. j. tedy podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, *je grupoidní.* Vskutku, k libovolným prvkům $a, b \in \mathbf{s}\bar{A}$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ takové, že $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a odtud vychází, že $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathbf{s}\bar{A}$, takže ab je prvkem v $\mathbf{s}\bar{A}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ označujeme symbolem $\mathbf{s}\mathfrak{A}$. Je zřejmé, že $\bar{A}$ je vytvořující rozklad *na* podgrupoidu $\mathbf{s}\mathfrak{A}$.

8.1.3.2. *Obal a průsek grupoidní podmnožiny s vytvořujícím rozkladem.*

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad a B libovolnou grupoidní podmnožinu v grupoidu $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $B \cap \mathbf{s}\bar{A}$ není prázdný. Pak obal $B \sqsubset \bar{A}$ podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ je rozklad v $\mathfrak{G}$ a podobně průsek $\bar{A} \sqcap B$ rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B je rozklad v $\mathfrak{G}$ a dokonce v $\mathbf{s}\bar{A}$. Ukážeme, že $B \sqsubset \bar{A}$ a $\bar{A} \sqcap B$ jsou *vytvořující rozklady v* $\mathfrak{G}$.

Abychom ukázali, že rozklad $B \sqsubset \bar{A}$ je vytvořující, uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in B \sqsubset \bar{A}$. Podle definice rozkladu $B \sqsubset \bar{A}$ jsou $\bar{a}, \bar{b}$ prvky v $\bar{A}$ a jsou incidentní s podmnožinou B, takže existují prvky $a \in B \cap \bar{a}$, $b \in B \cap \bar{b}$. Prvek ab je tedy jednak v množině BB a jednak v množině $\bar{a}\bar{b}$. Protože podmnožina B je grupoidní, je $BB \subset B$, a protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Odtud plyne, že prvek ab jest jednak v B, jednak v $\bar{c}$ a tedy, že prvek $\bar{c}$ jest incidentní s podmnožinou B. Vychází tedy $\bar{c} \in B \sqsubset \bar{A}$ a tím je dokázáno, že rozklad $B \sqsubset \bar{A}$ je vytvořující.

Nyní ukážeme, že také rozklad $\bar{A} \sqcap B$ je vytvořující. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap B$. Podle definice rozkladu $\bar{A} \sqcap B$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ takové, že $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$. Množina $\bar{x}\bar{y}$ je tedy jednak částí množiny $\bar{a}\bar{b}$, jednak částí množiny BB. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a protože podmnožina B je grupoidní, je $BB \subset B$. Odtud plyne, že $\bar{x}\bar{y}$ jest jednak částí množiny $\bar{c}$, jednak částí podmnožiny B a tedy $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{c} \cap B$. Avšak $\bar{z} = \bar{c} \cap B$ je prvek v $\bar{A} \sqcap B$. Vychází tedy, že ke každým dvěma prvkům $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap B$ existuje další prvek $\bar{z} \in \bar{A} \sqcap B$ takový, že $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$. Tím je dokázáno, že rozklad $\bar{A} \sqcap B$ je vytvořující.

Když zejména $\bar{A}$ je *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$ je splněn, neboť pak $\mathbf{s}\bar{A} = G \supset B$ a máme $B \cap \mathbf{s}\bar{A} = B \neq \emptyset$; $\bar{A} \sqcap B$ je pak rozklad na B. Každá dvojice skládající se z nějakého vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějaké grupoidní podmnožiny B v $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně dva vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$: $B \sqsubset \bar{A}$, $\bar{A} \sqcap B$. První je podmnožinou v $\bar{A}$, druhý je rozkladem na B.

8.1.3.3. *Nejmenší společný zákryt dvou vytvořujících rozkladů.* Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na $\mathfrak{G}$.

Ukážeme, že *jejich nejmenší společný zákryt* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *je opět vytvořující.*

Za tím účelem uvažujme o libovolné uspořádané dvojici prvků $\bar{u}, \bar{v} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Máme ukázat, že existuje prvek $\bar{w} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ takový, že $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$.

Budiž $\bar{a} \in \bar{A}$ libovolný prvek ležící v $\bar{\bar{u}}$ a $\bar{b} \in \bar{A}$ libovolný prvek ležící ve $\bar{\bar{v}}$, takže $\bar{a} \subset \bar{\bar{u}}$, $\bar{b} \subset \bar{\bar{v}}$. Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Prvek $\bar{c}$ leží v jistém prvku $\bar{\bar{w}} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, takže $\bar{c} \subset \bar{\bar{w}}$.

Každý prvek $p \in \bar{\bar{u}}$ leží v jistém prvku $\bar{p} \in \bar{A}$, který je částí prvku $\bar{\bar{u}}$; podobně leží každý prvek $q \in \bar{\bar{v}}$ v jistém prvku $\bar{q} \in \bar{A}$, který je částí prvku $\bar{\bar{v}}$. Mimo to je množina $\bar{p}\bar{q}$ částí jistého prvku $\bar{r} \in \bar{A}$, takže $pq \in \bar{p}\bar{q} \subset \bar{r}$. Z toho vidíme, že k důkazu platnosti vztahu $\bar{\bar{u}}\bar{\bar{v}} \subset \bar{\bar{w}}$ stačí zjistit, že pro každé dva prvky $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{\bar{u}}$, $\bar{q} \subset \bar{\bar{v}}$, prvek $\bar{r} \in \bar{A}$, obsahující množinu $\bar{p}\bar{q}$, je částí prvku $\bar{\bar{w}}$, t. j. $\bar{r} \subset \bar{\bar{w}}$.

Nuže, buďtež $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{A}$, $\bar{p} \subset \bar{\bar{u}}$, $\bar{q} \subset \bar{\bar{v}}$ libovolné prvky.

Přihlížejíce k definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu, že prvek $\bar{a}$ leží v $\bar{\bar{u}}$ a prvek $\bar{b}$ ve $\bar{\bar{v}}$, soudíme, že existuje řetězec v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \text{ (kde } \bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}), \tag{1}$$

a podobně řetězec od $\bar{b}$ do $\bar{q}$,

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\beta \text{ (kde } \bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\beta = \bar{q}). \tag{2}$$

Můžeme předpokládat, že $\beta = \alpha$, neboť na př. v případě $\beta < \alpha$ stačí prvek $\bar{b}_\beta$, označit dalšími symboly: $\bar{b}_{\beta+1}, \ldots, \bar{b}_\alpha$.

Protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existují v $\bar{A}$ prvky

$$\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha \text{ (kde } \bar{c}_1 = \bar{c},\ \bar{c}_\alpha = \bar{r}) \tag{3}$$

takové, že $\bar{a}_1\bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$. Přihlížejíce k definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu, že prvek $\bar{c}$ leží ve $\bar{\bar{w}}$, soudíme, že k důkazu platnosti vztahu $\bar{r} \subset \bar{\bar{w}}$ stačí zjistit, že množina prvků (3) je řetězcem v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{c}$ do $\bar{r}$.

Protože (1) a (2) jsou řetězce v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$, existuje ke každým dvěma sousedním prvkům $\bar{a}_\nu, \bar{a}_{\nu+1}$ jistý prvek $\bar{x}_\nu \in \bar{B}$, který je s oběma incidentní, a podobně ke každým dvěma sousedním prvkům $\bar{b}_\nu, \bar{b}_{\nu+1}$ s nimi incidentní prvek $\bar{y}_\nu \in \bar{B}$ ($\nu = 1, \ldots, \alpha - 1$). Rozklad $\bar{B}$ je vytvořující a tudíž existuje jistý prvek $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$, pro nějž platí $\bar{x}_\nu\bar{y}_\nu \subset \bar{z}_\nu$. Protože prvek $\bar{x}_\nu$ je incidentní s $\bar{a}_\nu$ a prvek $\bar{y}_\nu$ s $\bar{b}_\nu$, je množina $\bar{x}_\nu\bar{y}_\nu$ incidentní s $\bar{a}_\nu\bar{b}_\nu$; z toho plyne, že prvek $\bar{z}_\nu$ je incidentní s $\bar{a}_\nu\bar{b}_\nu$ a tedy i s prvkem $\bar{c}_\nu$. Podobně vidíme, že prvek $\bar{z}_\nu$ je incidentní s $\bar{c}_{\nu+1}$. Tím je zjištěno, že každé dva sousední prvky $\bar{c}_\nu, \bar{c}_{\nu+1}$ jsou incidentní s jistým prvkem $\bar{z}_\nu \in B$, a vychází, že množina prvků (3) je řetězcem v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{c}$ do $\bar{r}$.

8.1.3.4. *Největší společné zjemnění dvou vytvořujících rozkladů.* Nechť opět $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné vytvořující rozklady na $\mathfrak{S}$.

Ukážeme, že *také největší společné zjemnění* $(\bar{A}, \bar{B})$ *obou rozkladů je vytvořující.*

Především připomeňme, že nějaká podmnožina v $\mathfrak{S}$ je prvkem rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$ tehdy a jen tehdy, když je neprázdným průnikem některých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$.

Nuže, budiž $\bar{u}, \bar{v} \in (\bar{A}, \bar{B})$ libovolná uspořádaná dvojice prvků. Máme ukázat, že existuje prvek $\bar{w} \in (\bar{A}, \bar{B})$ takový, že $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$.

Jak jsme právě připomněli, je prvek $\bar{u}$ průnikem jistých prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ a podobně $\bar{v}$ průnikem jistých prvků $\bar{p} \in \bar{A}$, $\bar{q} \in \bar{B}$, t. j. $\bar{u} = \bar{a} \cap \bar{b}$, $\bar{v} = \bar{p} \cap \bar{q}$. Dále soudíme, přihlížejíce k tomu, že rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou vytvořující, že existují prvky $\bar{c} \in \bar{A}$, $\bar{r} \in \bar{B}$, pro něž platí $\bar{a}\bar{p} \subset \bar{c}$, $\bar{b}\bar{q} \subset \bar{r}$.

Z těchto vztahů plyne:

$$\bar{u}\bar{v} = (\bar{a} \cap \bar{b})(\bar{p} \cap \bar{q}) \subset \bar{a}\bar{p} \cap \bar{b}\bar{q} \subset \bar{c} \cap \bar{r} \quad (= \bar{w})$$

a vidíme, že existuje prvek $\bar{w} \in (\bar{A}, \bar{B})$ takový, že $\bar{u}\bar{v} \subset \bar{w}$. Tím je důkaz proveden.

8.2. Definice faktoroidu.

Nyní přistoupíme k definici pojmu faktoroidu, který má v celé další theorii vynikající úlohu. Nechť i nadále $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{S}$. K rozkladu $\bar{A}$ můžeme jednoznačně přiřadit grupoid, který označíme $\bar{\mathfrak{A}}$, definovaný takto: Pole grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ je vytvořující rozklad $\bar{A}$ a násobení je dáno pravidlem, že součin libovolného prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ s libovolným prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$ jest onen prvek $\bar{c} \in \bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Píšeme pak zpravidla

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c},$$

takže znaménka $\cdot$ (tečka nahoře) používáme k označení součinů v grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ podobně jako používáme znaménka . (tečka dole) k označení součinů v grupoidu $\mathfrak{S}$, a máme $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \bar{\mathfrak{A}}$.

Grupoid $\bar{\mathfrak{A}}$ nazýváme *faktoroid v grupoidu* $\mathfrak{S}$ a v případě, že $\bar{A}$ je *na* grupoidu $\mathfrak{S}$, *faktoroid na grupoidu* $\mathfrak{S}$ nebo *faktoroid grupoidu* $\mathfrak{S}$. Každý vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{S}$ určuje tedy jednoznačně jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$, a to onen, jehož polem je; pravíme, že *ke každému vytvořujícímu rozkladu v $\mathfrak{G}$ přísluší neboli patří jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$.*

Všimněme si, že na grupoidu $\mathfrak{G}$ existují alespoň dva faktoroidy, a to t. zv. *největší faktoroid* $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$, který přísluší k největšímu vytvořujícímu rozkladu $\overline{G}_{\max}$, a *nejmenší faktoroid* $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$, příslušný k nejmenšímu vytvořujícímu rozkladu $\overline{G}_{\min}$ grupoidu $\mathfrak{G}$.

8.3. Příklad faktoroidu.

Uvažujme na př. o grupoidu $\mathfrak{Z}$. Nechť n značí libovolné přirozené číslo a nechť $\bar{a}_i$, kde i je libovolné číslo $0, \ldots, n-1$, značí množinu všech prvků v $\mathfrak{Z}$, které při dělení číslem n dají zbytek i. Množiny $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ jsou tedy tyto:

$$
\begin{array}{lllllll}
\bar{a}_0 & = \{\ldots, -2n, & -n, & 0, & n, & 2n, & \ldots\} \\
\bar{a}_1 & = \{\ldots, -2n+1, & -n+1, & 1, & n+1, & 2n+1, & \ldots\} \\
\bar{a}_2 & = \{\ldots, -2n+2, & -n+2, & 2, & n+2, & 2n+2, & \ldots\} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\bar{a}_{n-1} & = \{\ldots, -2n+\overline{n-1}, & -n+\overline{n-1}, & n-1, & n+\overline{n-1}, & 2n+\overline{n-1}, & \ldots\}
\end{array}
$$

Vidíme, že systém $\{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}\}$ je rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$; označíme jej $\overline{Z}_n$. Snadno ukážeme, že $\overline{Z}_n$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$. Za tím účelem zjistíme, že součin libovolného prvku $\bar{a}_i \in \overline{Z}_n$ s libovolným prvkem $\bar{a}_j \in \overline{Z}_n$ je částí některého dalšího prvku $\bar{a}_k \in \overline{Z}_n$. Podle své definice skládá se možina $\bar{a}_i\bar{a}_j$ ze součinů $a \,.\, b$ každého prvku $a \in \bar{a}_i$ s každým prvkem $b \in \bar{a}_j$. Nechť tedy a (b) značí libovolný prvek v $\bar{a}_i$ ($\bar{a}_j$), takže zbytek dělení čísla a (b) číslem n jest i (j). Podle definice násobení grupoidu $\mathfrak{Z}$ jest $a.b$ číslo $a + b$ a toto je v množině $\bar{a}_k$, kde k značí zbytek dělení čísla $i + j$ číslem n, neboť čísla $a + b$ a $i + j$ mají při dělení číslem n stejné zbytky. Vychází tedy $\bar{a}_i\bar{a}_j \subset \bar{a}_k$ a tím je dokázáno, že rozklad $\overline{Z}_n$ je vytvořující. Příslušný faktoroid $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ se tedy skládá z n prvků: $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ a jeho násobení je definováno pravidlem, že součin $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j$ je prvek $\bar{a}_k$, při čemž k je zbytek dělení čísla $i + j$ číslem n Je zřejmé, že $\overline{\mathfrak{Z}}_1$ je největší faktoroid na $\mathfrak{Z}$.

8.4. Obal a průsek podgrupoidu s faktoroidem.

8.4.1. *Definice.* Nechť $\overline{\mathfrak{A}}$ značí libovolný faktoroid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}$ libovolný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$. Výše jsme viděli, že $B \sqsubset \bar{A}$, $\bar{A} \sqcap B$ jsou vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$.

Faktoroid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k vytvořujícímu rozkladu $B \sqsubset \bar{A}$, nazýváme *obal podgrupoidu* $\mathfrak{B}$ *ve faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$ a značíme $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ nebo $\bar{\mathfrak{A}} \sqsupset \mathfrak{B}$.

Faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $\bar{A} \sqcap B$ nazýváme *průsek faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$ *s podgrupoidem* $\mathfrak{B}$ nebo *průsek podgrupoidu* $\mathfrak{B}$ *s faktoroidem* $\bar{\mathfrak{A}}$ a označujeme $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$.

Zřejmě je $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ podgrupoid ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ a $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ je faktoroid v podgrupoidu $\mathfrak{B}$.

Když zejména $\bar{\mathfrak{A}}$ je *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$ je splněn a $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ je faktoroid na podgrupoidu $\mathfrak{B}$. Každá dvojice, skládající se z nějakého faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějakého podgrupoidu $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$, určuje tedy jednoznačně další dvojici, která se skládá z podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ v $\bar{\mathfrak{A}}$ a z faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ na $\mathfrak{B}$.

8.4.2. *Příklad.* Abychom tyto pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$ ($n \geq 1$). Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla m, a abychom svůj příklad zjednodušili, předpokládejme, že největší společný dělitel čísel m, n jest 1, t. j. že čísla m, n jsou nesoudělná.

Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$?

Uvažme, které z prvků $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jsou incidentní s podgrupoidem $\mathfrak{A}_m$. Libovolný prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$, když a jen když v něm existuje nějaký celý násobek xm čísla m (x celé číslo). Protože každý prvek v $\bar{a}_i$ má tvar $yn + i$, kde také y značí celé číslo, vidíme, že prvek $\bar{a}_i$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$, když a jen když rovnice $xm = yn + i$ a tedy také rovnice $xm - yn = i$ má řešení v celých číslech x, y. Protože největší společný dělitel čísel m, n jest 1, existují celá čísla a, b vyhovující rovnici $am - bn = 1$.*) Odtud plyne, že pro každé číslo $i = 0, \ldots,$

*) Nechť m, n značí libovolná přirozená čísla a d jejich největší společný dělitel. Z gymnasia víme, že po jistém počtu k dělení, která provádíme podle tohoto schematu:

$$m = q_1 n + r_1,\ n = q_2 r_1 + r_2,\ r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ \ldots,\ r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k,$$

při čemž $q_1, \ldots, q_k$ značí podíly a $r_1, \ldots, r_k$ zbytky dělení, přijdeme ke zbytku $r_k = 0$; pak číslo r_{k-1} ($r_0 = n$) je největší společný dělitel d. Z těchto rovnic

$n - 1$ má rovnice $xm - yn = i$ řešení v celých číslech, a to $x = ai$, $y = bi$, a tím jest ukázáno, že každý prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je incidentní s $\mathfrak{A}_m$. Vychází tedy, že faktoroid $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$ je identický se $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ a prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ jsou množiny, skládající se ze všech celých násobků čísla m obsažených v jednotlivých prvcích $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$.

8.5. Zákryt a zjemnění faktoroidu.

Nechť $\bar{\mathfrak{B}}$ značí nějaký faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$ a uvažujme o nějakém rozkladu $\bar{\bar{B}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Každý prvek v $\bar{\bar{B}}$ je tedy systém podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Když utvoříme součet všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, které jsou vždy v témže prvku rozkladu $\bar{\bar{B}}$, obdržíme jistý rozklad $\bar{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}$. Podle názvů vyložených v odst. 2.5, je $\bar{A}$ zákryt vytvořujícího rozkladu $\bar{B}$ (pole faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$) vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$.

8.5.1. Otázka, kterou nyní rozhodneme, je tato:

Když $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující rozklad faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, je pak $\bar{A}$ vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$?

Snadno ukážeme, že ano. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$. Podle definice rozkladu $\bar{A}$ je prvek $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$ součtem všech prvků $\bar{b}_1 \in \bar{\mathfrak{B}}$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}})$ obsažených v jistém prvku $\bar{\bar{b}}_1$ $(\bar{\bar{b}}_2)$ rozkladu $\bar{\bar{B}}$; odtud plyne, že $\bar{a}_1\bar{a}_2$ je součet součinů $\bar{b}_1\bar{b}_2$ každé množiny $\bar{b}_1$, která je prvkem v $\bar{\bar{b}}_1$, s každou množinou $\bar{b}_2$, která je prvkem v $\bar{\bar{b}}_2$. Tyto skutečnosti můžeme symbolicky vyjádřiti takto: $\bar{a}_1 = \Sigma\bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, $\bar{a}_2 = \Sigma\bar{b}_2$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \Sigma\bar{b}_1\bar{b}_2$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$. Podle definice násobení faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ máme pro každý takový součin $\bar{b}_1\bar{b}_2$ vztah $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$ a odtud plyne $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \Sigma\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$. Když rozklad $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$ takový, že $\bar{\bar{b}}_1 \cdot \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$, t. j. takový, že součin $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2$ každého prvku $\bar{b}_1 \in \bar{\mathfrak{B}}$, který je v $\bar{\bar{b}}_1$, s každým prvkem $\bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$, který je v $\bar{\bar{b}}_2$, je prvkem množiny $\bar{\bar{b}}_3$. Označíme-li tedy písmenem $\bar{a}_3$ onen prvek v $\bar{A}$, který je součtem všech prvků v $\bar{\mathfrak{B}}$ ležících v $\bar{\bar{b}}_3$,

vidíme, že každé číslo r_j, při čemž $0 \leq j \leq k - 1$, se dá psáti ve tvaru $a_j m - b_j n$, kde a_j, b_j značí jistá celá čísla (na př. $r_0 = 0 \,.\, m - (-1)\, n$, $r_1 = 1 \,.\, m - q_1 n$, $r_2 = (-q_2)\, m - (-1 - q_1 q_2)\, n$, atd.); odtud plyne, že existují celá čísla a, b vyhovující rovnici $am - bn = d$, a to $a = a_{k-1}$, $b = b_{k-1}$. Všimněme si, že také rovnice $am + bn = d$ má řešení v celých číslech a, b, a to $a = a_{k-1}$, $b = -b_{k-1}$.

máme $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1,\ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, a tedy také $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \Sigma b_1 \cdot \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$(kde $\bar{b}_1 \in \in \bar{\bar{b}}_1,\ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2$). Vychází tedy $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ a tím je dokázáno, že rozklad $\bar{A}$ je vytvořující.

8.5.2. Naopak, jak nyní ukážeme, platí také tato věta:
Když rozklad $\bar{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ je vytvořující, pak totéž platí o rozkladu $\bar{\bar{B}}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$.

Za tím účelem předpokládejme, že rozklad $\bar{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ je vytvořující, a uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2 \in \bar{\bar{B}}$. Podle definice rozkladu $\bar{A}$ jsou $\bar{a}_1 = \Sigma\bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, $\bar{a}_2 = \Sigma\bar{b}_2$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$ prvky rozkladu $\bar{A}$, a protože rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existuje prvek $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$; podle definice rozkladu $\bar{A}$, je prvek $\bar{a}_3$ součtem všech prvků $\bar{b}_3 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsažených v jistém prvku $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$, takže $\bar{a}_3 = \Sigma\bar{b}_3$ $(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3)$. Ukážeme-li, že pro $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$, $\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2$ je prvek $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsažen v $\bar{\bar{b}}_3$, ukážeme tím, že platí vztah $\bar{\bar{b}}_1 \,.\, \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$ a bude zjištěno, že rozklad $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující. Za tím účelem uvažme, že pro $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$, $\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2$ jednak platí vztahy $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$, jednak $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3 = \Sigma\bar{b}_3$ $(\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3)$, takže množina $\bar{b}_1\bar{b}_2$ jest jednak částí prvku $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$, jednak částí součtu všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ obsažených v $\bar{\bar{b}}_3$. Odtud plyne, že prvek $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\mathfrak{B}}$ jest incidentní s některými prvky $\bar{b}_3 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsaženými v $\bar{\bar{b}}_3$ a tedy jest identický s některým prvkem $\bar{b}_3 \in \bar{\mathfrak{B}}$ obsaženým v $\bar{\bar{b}}_3$, neboť dva různé prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ incidentní nejsou. Tím je zjištěno, že platí vztah $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, a důkaz je proveden.

8.5.3. Vidíme tedy, že *oba rozklady $\bar{A}$, $\bar{\bar{B}}$ jsou vytvořující současně*, t. j. když jeden z nich je vytvořující, pak je také druhý. Když jsou vytvořující, pak k rozkladu $\bar{A}$ přísluší jistý faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ a podobně k rozkladu $\bar{\bar{B}}$ přísluší jistý faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$. Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ se nazývá *zákryt faktoroidu* $\bar{\mathfrak{B}}$ *vynucený faktoroidem* $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ a faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ se nazývá *zjemnění faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$; označení $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ nebo $\bar{\mathfrak{B}} \leqq \bar{\mathfrak{A}}$. Každý faktoroid na libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ vynucuje tedy jistý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ a naopak, každý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ je vynucen jistým faktoroidem na $\bar{\mathfrak{B}}$. Zřejmě platí vztahy $\bar{\mathfrak{G}}_{\max} \geqq \bar{\mathfrak{B}} \geqq \bar{\mathfrak{G}}_{\min}$ pro každý faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$.

8.5.4. *Příklad.* Abychom tyto pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$. Předpokládejme, že číslo n je větší než 1 a že není prvočíslo. Pak existuje nějaký dělitel $(1 <)\ d\ (< n)$

čísla n a máme $n = qd$, kde q značí další přirozené číslo, a to $1 < q < n$. Uvažujme nyní o rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, jehož prvky jsou tyto:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{a}}_0 &= \{\bar{a}_0, & \bar{a}_d, & \quad \bar{a}_{2d}, & \ldots, & \ \bar{a}_{(q-1)d}\}, \\
\bar{\bar{a}}_1 &= \{\bar{a}_1, & \bar{a}_{d+1}, & \quad \bar{a}_{2d+1}, & \ldots, & \ \bar{a}_{(q-1)d+1}\}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{\bar{a}}_{d-1} &= \{\bar{a}_{d-1}, & \bar{a}_{d+d-1}, & \quad \bar{a}_{2d+d-1}, & \ldots, & \ \bar{a}_{(q-1)d+d-1}\},
\end{aligned}$$

takže libovolný prvek $\bar{\bar{a}}_i$ $(i = 0, \ldots, d-1)$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ se skládá z těch prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, jejichž indexy dají dělením číslem d zbytek i. Ukažme, že rozklad $\bar{\bar{Z}}_d$ je vytvořující. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}_i$, $\bar{\bar{a}}_j$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ a ukažme, že platí vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$, kde k je zbytek dělení čísla $i + j$ číslem d. Nechť $\bar{a}_\alpha$ značí libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_i$, $\bar{a}_\beta$ libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_j$ takže α dá dělením číslem d zbytek i a β zbytek j; čísla $\alpha + \beta$, $i + j$ liší se tedy jenom o celý násobek čísla d. Podle definice násobení faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ jest $\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma$, kde γ je zbytek dělení čísla $\alpha + \beta$ číslem n. Protože d je dělitelem čísla n, liší se čísla $\alpha + \beta, \gamma$, a tedy i čísla $i + j, \gamma$ jenom o celý násobek čísla d; číslo γ má tedy při dělení číslem d zbytek k. Odtud vychází $\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma \in \bar{\bar{a}}_k$ a tím je zjištěn zmíněný vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$. Zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$, příslušným k vytvořujícímu rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$, skládá se z d prvků

$$\{\ldots, -n + i, -n + d + i, \ldots, -n + (q-1)\, d + i, i, d + i, \ldots,$$
$$(q-1)\, d + i, n + i, n + d + i, \ldots, n + (q-1)\, d + i, \ldots\},$$

při čemž i značí vždy jedno číslo $0, \ldots, d-1$.

8.6. Společný zákryt a společné zjemnění dvou faktoroidů.

Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ značí libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

8.6.1. *Definice. Společným zákrytem*, stručněji: *zákrytem faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ rozumíme každý faktoroid na $\mathfrak{G}$, který je zákrytem každého faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$.

Podobně rozumíme *společným zjemněním*, stručněji: *zjemněním faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ každý faktoroid na $\mathfrak{G}$, který je zjemněním každého faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$.

Na př. největší faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$ je společným zákrytem a nejmenší faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{\min}$ společným zjemněním faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$.

Přihlížejíce k výsledkům v odst. **2.5.4**, soudíme, že *každý zákryt každého společného zákrytu faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *je opět jejich zákrytem; podobně je každé zjemnění každého společného zjemnění faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *opět zjemněním těchto faktoroidů.*

8.6.2. *Nejmenší společný zákryt dvou faktoroidů.* Z odst. **8.1.3.3** víme, že nejmenší společný zákryt polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$. *Faktoroid patřící k nejmenšímu společnému zákrytu polí faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *se nazývá nejmenší společný zákryt,* stručněji: *nejmenší zákryt faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, *a označuje se* $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$ *nebo* $[\bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{A}}]$.

Z definice faktoroidu $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$ vyplývá, že jeho pole je zjemněním každého společného zákrytu polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ a tedy také každého vytvořujícího společného zákrytu polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$. Z toho vidíme, že faktoroid $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$ je společným zákrytem faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, který je nejmenší v tom smyslu, že každý společný zákryt obou faktoroidů jest jeho zákrytem.

8.6.3. *Největší společné zjemnění dvou faktoroidů.* Z odst. **8.1.3.4** víme, že největší společné zjemnění polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ je vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$. *Faktoroid patřící k největšímu společnému zjemnění polí faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *se nazývá největší společné zjemnění,* stručněji: *největší zjemnění faktoroidů* $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *a označuje se* $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ *nebo* $(\bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{A}})$.

Z definice faktoroidu $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ vyplývá, že jeho pole je zákrytem každého společného zjemnění polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ a tedy také každého vytvořujícího společného zjemnění polí faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$. Z toho vidíme, že faktoroid $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ je společným zjemněním faktoroidů $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, které je největší v tom smyslu, že každé společné zjemnění obou faktoroidů jest jeho zjemněním.

8.7. Doplňkové faktoroidy.

Buďte $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ libovolné faktoroidy na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Faktoroidy $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ *se nazývají doplňkové, když jsou doplňkovými jejich pole* (odst. **2.9.1**); t. j. když každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{B}}$, ležící v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$, jsou incidentní.

Když na př. jeden z obou faktoroidů je zákrytem druhého, jsou oba faktoroidy doplňkové.

Později (v odst. **14.2**, **14.3.4**) uvidíme, že se některé grupoidy vyznačují tím, že na nich jsou každé dva faktoroidy doplňkové. Proto je vhodné podotknout, že dva faktoroidy daného grupoidu obecně doplňkovými nejsou. Na př. na grupoidu, jehož pole má čtyři prvky a, b, c, d a násobení je dáno vzorcem $xy = y$, jsou všechny rozklady vytvořující (cvič. 8.8.6); faktoroidy, jejichž pole jsou na př. oba rozklady $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ a $\{a\}$, $\{b, c, d\}$ doplňkovými nejsou (cvič. **2.10.11**).

8.8. Cvičení.

8.8.1. Ukažte, že grupoidy $\mathfrak{Z}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ $(n \geqq 1)$ jsou isomorfní.

8.8.2. Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla $m > 1$. Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$ a $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ $(n > 1)$, když m, n nejsou nesoudělná?

8.8.3. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel s výjimkou těch, jejichž číslice v desítkové soustavě obsahují 0, a jehož násobení je definováno takto: Pro $a, b \in \mathfrak{G}$ je součin ab číslo dané v desítkové soustavě číslicí $a_1 \dots a_\alpha b_1 \dots b_\beta$, při čemž $a_1 \dots a_\alpha$ $(b_1 \dots b_\beta)$ je číslice v desítkové soustavě čísla a (b). Tedy na př. $14 . 23 = 1423$. Ukažte, že: 1. grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní; 2. rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož prvky jsou množiny všech čísel v $\mathfrak{G}$, která jsou v desítkové soustavě dána číslicemi vždy o stejném počtu cifer, je vytvořující.

8.8.4. Každý faktoroid na nějakém abelovském (asociativním) grupoidu jest abelovský (asociativní).

8.8.5. Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje prvek a takový, že $aa = a$, t. zv. *rovnomocný* neboli *idempotentní* prvek, pak onen prvek libovolného faktoroidu v $\mathfrak{G}$, který obsahuje prvek a, je rovněž rovnomocný.

8.8.6. Grupoid $\mathfrak{G}$, jehož polem je libovolná množina a násobení je dáno tím, že pro $a, b \in \mathfrak{G}$ jest $ab = a$ $(ab = b)$, jest asociativní a všechny jeho rozklady jsou vytvořující.

9. VĚTY O ISOMORFISMU GRUPOIDŮ. DEFORMACE FAKTOROIDŮ.

9.1. První věta.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. V odst. **8.1.2** jsme ukázali, že