vale j spojitá a v ňom rastie alebo klesá; jej hodnoty teda tvoria interval J, v ktorom existuje funkcia inverzná.

Definujeme v intervale J vektor Y takto:

$$X = \varphi\big(x, y(x)\big), \quad Y(X) = \psi\big(x, y(x)\big)$$

Potom obidve krivky $\big(x, y(\bar{x})\big)$, $x \in j$ a $\big(X, Y(X)\big)$, $X \in J$ sú na seba zobrazené próste transformáciou (1); súradnice dvoch si odpovedajúcich bodov spolu súvisia podľa práve napísaných vzorcov a samozrejme súčasne spĺňajú rovnice

$$x = \Phi\big(X, Y(X)\big), \quad y(x) = \Psi\big(X, Y(X)\big)$$

Vektor $Y(X)$ má v každom čísle $X \in J$ deriváciu, ktorá je daná vzorcom

$$Y'(X) = \frac{\psi'_x\big(x, y(x)\big) + \psi'_y\big(x, y(x)\big)\, f\big(x, y(x)\big)}{\varphi'_x\big(x, y(x)\big) + \varphi'_y\big(x, y(x)\big)\, f\big(x, y(x)\big)} = F\big(X, Y(X)\big)$$

v ktorom $\big(x, y(x)\big)$ a $\big(X, Y(X)\big)$ značia odpovedajúce si body. Z posledného vzorca vidíme, že vektor $Y(X)$ je v intervale J riešením d. rovnice

$$Y' = F(X, Y)$$

13. Prehľad o existenčných teorémach a o vetách o jednoznačnosti riešení systémov explicitných d. rovníc 1. rádu

70. Existenčné teorémy

Tiež peanovské existenčné teorémy týkajúce sa d. rovnice (a), ktorými sme sa zaoberali v ods. 27 - 30, aj so svojimi dôkazmi dajú sa ľahko rozšíriť na systémy explicitných d. rovníc 1. rádu. Výnimku tvoria tie doplnky existenčných teorém, v ktorých sa uplatňujú pojmy dolných a horných funkcií. Spokojíme sa tu s uvedením existenčných teorém pre neohraničený a kompaktný $(n + 1)$- rozmerný interval a pre otvorenú množinu.

Nech je daná d. rovnica

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(A)}$$

Peanovská existenčná veta pre d. rovnicu (A) v prípade, že jej oborom je $(n + 1)$- <u>rozmerný neohraničený interval</u>, znie takto:

Nech v d. rovnici (A) je vektor f ohraničený a spojitý v (n + 1)-rozmernom neohraničenom intervale

$$(d \equiv) \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \quad -\infty < y < \infty \quad (a > 0)$$

Potom každým bodom tohto oboru d prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (A), definované v celom intervale $[\xi, \xi + a]$.

V prípade, že oborom d. rovnice (A)' je <u>kompaktný</u> (n + 1)- <u>rozmerný interval</u>, platí táto veta:

Nech v d. rovnici (A) je vektor f spojitý v (n + 1)-rozmernom kompaktnom intervale

$$(d \equiv) \quad \xi - a \leq x \leq \xi + a, \quad \eta - b \leq y \leq \eta + b \quad (a > 0; \; b > 0)$$

Potom bodom (ξ, η) prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (A), ktoré je definované v istom kompaktnom intervale a má svoje konce na hranici oboru d. Tento kompaktný interval je $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$ alebo je väčší.

Pritom značí $\alpha = \min\left(a, \frac{b_1}{M_1}, \ldots, \frac{b_n}{M_n}\right)$; b_i sú jednotlivé zložky vektora b, M_i je maximum absolútnej hodnoty zložky f_i vektora f v obore d a v prípade, že niektoré číslo M_i je nula, neberie sa do úvahy symbol $\frac{b_i}{M_i}$.

V prípade, že oborom d. rovnice (A) je <u>neprázdna otvorená</u> (n + 1)- <u>rozmerná množina</u>, existenčná teoréma znie:

Nech v d. rovnici (A) je vektor f spojitý v nejakej neprázdnej otvorenej (n + 1)- rozmernej množine ω. Potom každým bodom tohto oboru ω prechádza aspoň jedno riešenie d. rovnice (A), ktoré je definované v istom otvorenom intervale a má svoje konce na hranici oboru ω.

71. Vety o jednoznačnosti riešení

Uvažujme opäť o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (A)$$

a predpokladajme, že vektor f je spojitý v (n + 1)-rozmernom kompaktnom intervale

$$(d \equiv) \quad \xi \leq x \leq \xi + a, \quad \eta - b \leq y \leq \eta + b \quad (a > 0; \; b > 0)$$

Podľa výsledku v predchádzajúcom ods. vychádza z bodu (ξ, η) aspoň jedno riešenie d. rovnice (A) s koncami na hranici oboru d. Toto riešenie nie je nutne ani lokálne, ani absolútne jediné. Naopak, všeobecne z bodu (ξ, η)

vychádza nekonečne mnoho riešení, ktoré vytvárajú istý kuželovitý (peanovský) obor. Spojitosť vektora f teda zaručuje existenciu, nie však jednoznačnosť riešení d. rovnice (A). K tomu, aby z bodu (ξ, η) vychádzalo lokálne jediné riešenie d. rovnice (A), t.j. aby bod (ξ, η) bol vzhľadom na túto d. rovnicu lokálne sprava pravidelný, je nutné, aby vektor f mal nejaké ďalšie vlastnosti. Situácia je opäť obdobná ako v prípade jednej explicitnej d.rovnice (a) (ods. 50 - 54). Preto sa tu spokojíme len s formuláciou a stručnými poznámkami o (postačujúcej) podmienke Lipschitzovej a okrem toho uvedieme Rosenblatt - Nagumovu vetu pre lokálnu jednoznačnosť sprava.

Hovoríme, že vektor f spĺňa <u>v bode</u> (ξ, η) <u>Lipschitzovu</u> (L.) <u>podmienku sprava</u>, stručne: <u>L. podmienku sprava</u>, ak (pri prípadne zmenšených číslach a a zložkách vektora b) platí pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in d$ nerovnosť

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \max_{i=1,\dots n} |y_{1i} - y_{2i}| \, 1$$

Pritom L značí nejakú konštantu, tzv. <u>Lipschitzovu konštantu</u> a ďalší symbol vpravo značí vektor, ktorého všetky zložky sú rovnaké a rovnajú sa najväčšej z absolútnych hodnôt rozdielov rovnoľahlých zložiek vektorov y_1, y_2.

Uvedenú L. podmienku môžeme tiež vyjadriť tým, že množina vektorov

$$\frac{1}{\max\limits_{j=1,\dots,n} |y_{1j} - y_{2j}|} \big(f(x, y_1) - f(x, y_2)\big) \qquad (y_1 \neq y_2)$$

je ohraničená.

Rovnako si všimnime, že vektor f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku vtedy, ak v obore d existuje f_y a je v ňom ohraničená. Pripomeňme, že

$$f'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

pričom f_i, y_i značia zložky vektora f, y, takže uvedená podmienka vyjadruje, že v každom bode $(x, y) \in d$ existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ a ďalej existuje konštanta napr. $\frac{L}{n} > 0$, ktorú absolútne hodnoty týchto derivácií nikde v obore d neprevýšia.

Význam L. podmienky sprava pre jednoznačnosť riešení d. rovnice (A) je daný touto vetou:

Ak vektor f spĺňa v bode (ξ, η) L. podmienku sprava, potom je tento bod sprava lokálne pravidelný.

Podobná je, tzv. veta Rosenblatt-Nagumova o lokálnej jednoznačnosti sprava bodu (ξ, η).

Znie takto:

Ak vektor f je v obore d spojitý a ak (pri prípadne zmenšených číslach a a zložkách vektora b) platí pre každé dva body (x, y_1), (x, y_2) $\in d$ nerovnosť

$$(x-\xi) \, | f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq \max_{i=1,\dots,n} | y_{1i} - y_{2i} | \quad 1 \quad .$$

potom je bod (ξ, η) sprava lokálne pravidelný.

14. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

72. Základné pojmy a označenia

V ďalšom sa budeme zaoberať systémami lineárnych d. rovníc, t.j. systémami tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + a_{10}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (A) \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + a_{no} \end{aligned}$$

kde $n \geq 1$ a $a_{11}, \dots, a_{no}$ sú funkciami nezávisle premennaj x definovanými v nejakom intervale j.

Miesto názvu systém lineárnych d. rovníc budeme spravidla používať stručnejšie pomenovanie lineárny systém. Funkcie $a_{11}, \dots a_{no}$ sa nazývajú koeficienty lineárneho systému. Ak sa koeficienty $a_{10}, \dots, a_{no}$ identicky rovnajú nule, nazýva sa lineárny systém homogénny; v opačnom prípade nehomogénny, ktorý dostaneme, ak koeficienty $a_{10}, \dots a_{no}$ nahradíme nulami; naopak existuje nekonečne mnoho lineárnych systémov, ku ktorým patrí ten istý homogénny systém.

Ak označíme písmenom A štvorcovú maticu rádu n, ktorej členy sú koeficienty systému (A), teda $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1,\dots, n)$ a znakom a_o stĺpcový vektor o zložkách $a_{10}, \dots, a_{no}$, môžeme systém (A) písať v tvare

$$y' = Ay + a_o \qquad (A)$$

ktorý je východiskom ďalšej teórie.