$$\int_{y_1}^{y_2} x\, Q'_x\,(x,\ t)\ dt = 4\ x^4\ (y_2 - y_1)$$

Vidíme, že bod (0,0) je lokálne pravidelný sprava, ak platí

$$m\ x^4\ (y_2 - y_1) \leqq (y_2 - y_1) \cdot \left[-3\ x^4 + \frac{1}{3}\ (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\right]$$

Odtiaľ pre $y_2 - y_1 > 0$ vychádza

$$3\ (m + 3)\ x^4 \leqq y_1^2 + y_1\ y_2 + y_2^2$$

a vidíme, že táto nerovnosť je splnená vtedy, ak platí

$$3\ (m + 3)\ x^4 \leqq 0$$

Táto nerovnosť je ale splnená v tom prípade, keď $m \leqq -3$. Bod (0,0) je teda lokálne pravidelný sprava vtedy, keď $m \leqq -3$. Ak aplikujeme vzorec (2), dostaneme nerovnosť

$$m \cdot \left\{ y_2\ \sigma\ (y_2) - y_1\ \sigma\ (y_1) \right\} \leqq -4 \int_{y_1}^{y_2} \sigma\ (t)\ dt$$

z ktorej pre $\sigma\ (y) = y^{2k}$, $k > 0$, vychádza

$$m \leqq -\frac{4}{2k + 1}$$

Vidíme, že lokálna pravidelnosť sprava bodu (0,0) pre d. rovnicu (A) je bezpečná pre všetky $m < 0$ a zrejme tiež pre $m = 0$.

9. Ukážka aplikácie predchádzajúcej teórie

55. Perronov príklad

Ako aplikáciu predchádzajúcich výsledkov, Perronovej existenčnej teórie a viet o jednoznačnosti riešení uvedieme v tomto odseku príklad, ktorý pochádza od O. Perrona.

Uvažujme o d. rovnici

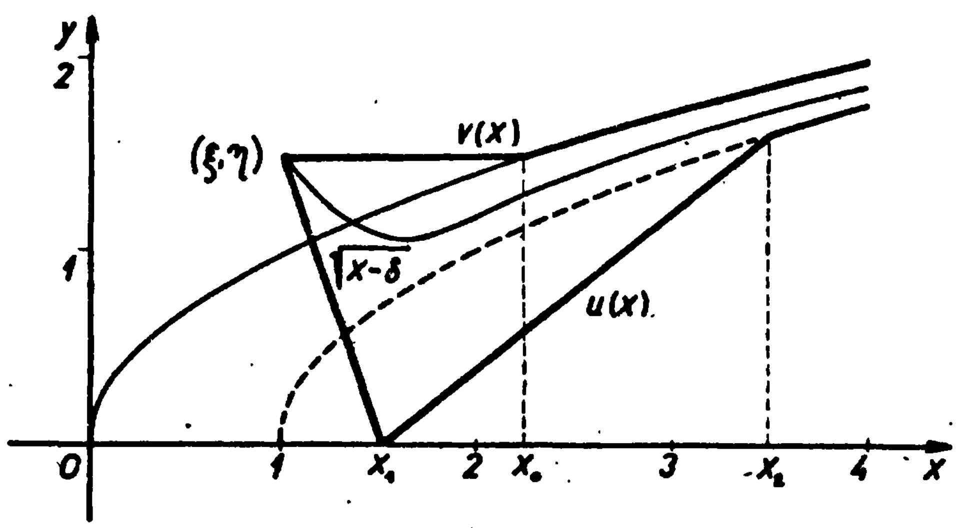
$$y' = x - y^2 \tag{1}$$

Funkcia $f(x, y) = x - y^2$ je spojitá vo všetkých bodoch (x, y) a teda podľa existenčnej teorémy Peanovej alebo Perronovej prechádza každým bodom (ξ, η) aspoň jedno riešenie tejto diferenciálnej rovnice.

Funkcia $f(x, y)$ má ďalej v každom bode (x, y) parciálnu deriváciu podľa y, $-2y$, ktorá je tiež všade spojitá a teda v každom konečnom dvojrozmernom intervale ohraničená.

Z toho vyplýva, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa v každom konečnom dvojrozmernom intervale L. podmienku. Podľa už uvedenej vety prechádza teda každým bodom (ξ, η) práve jedno riešenie d. rovnice (1).

Zvoľme ľubovoľný bod (ξ, η) a predpokladajme, že $\xi > 0$, $\eta > 0$. Týmto bodom prechádza teda práve jedno riešenie d. rovnice (1) a podľa Peanovej existenčnej teorémy je toto riešenie definované v istom okolí čísla ξ. Našou úlohou je podrobnejšie vyšetriť jeho priebeh. Za tým účelom nakreslíme si predovšetkým Eulerov polygón vychádzajúci z bodu (ξ, η).



Obr. 14

Vidíme, že sa Eulerov polygón s rastúcim x blíži k vetve paraboly $y = \sqrt{x}$. Tým sme vedení k tomu, že riešenie d. rovnice (1) prechádzajúce bodom (ξ, η) sa dá pravdepodobne definovať pre všetky $x \geq \xi$ a že sa asymptoticky blíži k vetve paraboly $y = \sqrt{x}$. Tento fakt nemôžeme bezprostredne zistiť z Peanovej existenčnej teorény, avšak pomocou Perronovej existenčnej teorémy dôjdeme k cieľu.

Ide o to, ukázať, že riešenie d. rovnice (1) prechádzajúce bodom (ξ, η) $(\xi > 0, \eta > 0)$ možno definovať v ľubovoľne veľkom intervale $[\xi, X]$, v ktorom sa asymptoticky blíži k vetve paraboly $y = \sqrt{x}$, pričom symbolom $\sqrt{\ }$ sa myslí nezáporné číslo.

Vzhľadom na Perronovu existenčnú teorému redukuje sa na náš problém zrejme na to, definovať funkcie $u(x)$, $v(x)$ majúce vlastnosti popísané v tejto teoréme, ktoré sa vyznačujú tým, že sa pre veľké x líšia od spomenutej vetvy paraboly o menej než ľubovoľné kladné číslo. Také funkcie $u(x)$, $v(x)$ budeme definovať rôzne podľa toho, či bod (ξ, η) je nad spomenutou vetvou paraboly, na nej alebo pod ňou.

Predpokladajme najprv, že bod (ξ, η) je nad vetvou paraboly $y = \sqrt{x}$, teda že platí nerovnosť $\xi < \eta^2$.

Aby sme definovali funkciu $u(x)$, zvolíme ľubovoľné číslo $\delta > 0$ a funkciu $u(x)$ definujeme týmito vzorcami:

$$u(x) = \begin{cases} \eta - A(x - \xi) & \text{pre } \eta - A(x - \xi) \geq 0 \\ a(x - \xi - \frac{\eta}{A}) & \text{pre } 0 \leq a(x - \xi - \frac{\eta}{A}) \leq \sqrt{x - \delta} \\ \sqrt{x - \delta} & \text{pre } \sqrt{x - \delta} \leq a(x - \xi - \frac{\eta}{A}) \end{cases}$$

pričom A, a sú kladné čísla, ktoré v ďalšom ešte obmedzíme určitými nerovnosťami preto, aby funkcia $u(x)$ skutočne spĺňala podmienky popísané v Perronovej existenčnej teoréme.

Zatiaľ len predpokladajme, že číslo a vyhovuje nerovnosti

$$\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - \delta \geq 0 \tag{2}$$

takže predtým uvedená definícia funkcie $u(x)$ má zmysel. Funkcia $u(x)$ je definovaná pre všetky $x \geq \xi$; neskoršie sa obmedzíme na interval $[\xi, X]$, $X > \xi$, pričom však X môže byť ľubovoľne veľké. Funkcia $u(x)$ sa teda skladá z dvoch úsečiek a z časti paraboly, a to z úsečky $\eta - A(x - \xi)$, kde $x \in [\xi, x_1]$, $x_1 = \xi + \frac{\eta}{A}$, z úsečky $a(x - \xi - \frac{\eta}{A})$, kde

$$x \in [x_1, x_2], \quad x_2 = \xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a}\sqrt{\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - \delta}$$

a z časti paraboly $\sqrt{x - \delta}$, kde $x \geq x_2$.

Funkciu $v(x)$ definujeme vzorcom

$$v(x) = \begin{cases} \eta & \text{pre } \eta \geq \sqrt{x} \\ \sqrt{x} & \text{pre } \eta \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Táto funkcia sa skladá teda z úsečky rovnobežnej s osou x a z časti vetvy paraboly, o ktorej sme už hovorili, teda z úsečky η pre $x \in [\xi, x_0]$, $x_0 = \eta^2$, a z vetvy paraboly $\sqrt{x}$ pre $x \geq x_0$.

Funkcie $u(x)$, $v(x)$ sú tiež znázornené na predchádzajúcom obrázku.

Teraz treba ukázať, že funkcie $u(x)$, a $v(x)$ majú vlastnosti popísané v Perronovej existenčnej teoréme, t.j. že prechádzajú bodom (ξ, η) ďalej, že v každom čísle x, v ktorom sú definované, sú spojité a vyhovujú nerovnostiam

$$D_\pm u(x) \leqq f(x, u(x)), \quad D_\pm v(x) \geqq f(x, v(x)) \tag{3}$$

a okrem toho, že je $u(x) < v(x)$ pre $x > \xi$.

Pre všetky tieto vlastnosti, až na platnosť nerovností (3), sú zrejmé. Treba len ukázať, že sú splnené nerovnosti (3).

Ukážme najprv, že funkcia $u(x)$ spĺňa nerovnosť (3), ak A je dosť veľké a a dosť malé.

V intervale $[\xi, x_1]$ má funkciu $u(x)$ deriváciu $u'(x) = -A$. Ďalej je v tomto intervale

$$f(x, u(x)) = x - (\eta - A(x - \xi))^2 = -A^2(x - \xi)^2 + (2A + 1)(x - \xi) -$$

$$- \eta^2 + \xi \geqq - A^2(x_1 - \xi)^2 - \eta^2 + \xi = -2\eta^2 + \xi$$

Zvoľme $A > 0$ tak veľké, aby bolo $-A \leqq -2\eta^2 + \xi$. Potom je v intervale $[\xi, x_1]$

$$D_\pm u(x) = -A \leqq -2\eta^2 + \xi \leqq f(x, u(x))$$

a teda nerovnosť (3) je splnená.

V intervale $[x_1, x_2]$ má funkcia $u(x)$ deriváciu $u'(x) = a$. Ďalej je v tomto intervale

$$f(x, u(x)) = x - \left(a(x - \xi - \frac{\eta}{A})\right)^2 = -a^2(x - \xi)^2 +$$

$$+ (2\frac{a^2\eta}{A} + 1)(x - \xi) + \frac{a^2\eta^2}{A^2} + \xi$$

takže máme ukázať, že v tomto intervale je

$$(F(x) \equiv) f(x, u(x)) - a = -a^2(x - \xi)^2 + (2\frac{a^2\eta}{A} + 1)(x - \xi) +$$

$$+ \xi - \frac{a^2\eta^2}{A^2} - a \geqq 0$$

Vskutku $y = F(x)$ je rovnica paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou y a jej vrchol je bod $\left(\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{2a^2},\ \xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - a\right)$. Zvoľme a tak, aby okrem nerovnosti (2) bolo

$$a \leqq \min \left(\xi + \frac{\eta}{A},\ \delta\right) \tag{4}$$

Predovšetkým vidíme, že vrchol paraboly $y = F(x)$ je nad osou x, lebo poradnica vrcholu $\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - a$ je > 0.

Ďalej ľahko zistíme, že parabola pretína os x v bodoch

$$x' = \xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{2\,a^2} - \frac{1}{a}\sqrt{\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - a}$$

$$x'' = \xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{2\,a^2} + \frac{1}{a}\sqrt{\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - a}$$

takže pre $x \in [x', x'']$ je $F(x) \geqq 0$. Avšak ľahko vidíme, že v dôsledku nerovností (4) je

$$x' \leqq x_1, \quad x_2 \leqq x''$$

a odtiaľ vyplýva, že pre $x \in [x_1, x_2]$ je $F(x) \geqq 0$.

Skutočne pre $x \geqq x_2$ má funkcia $u(x)$ deriváciu $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \delta}}$ a ďalej je

$$f(x, u(x)) = x - (\sqrt{x - \delta})^2 = \delta$$

takže treba ukázať, že pre $x \geqq x_2$ je

$$\frac{1}{2\sqrt{x - \delta}} \leqq \delta$$

t.j., že je

$$x \geqq \delta + \frac{1}{4\,\delta^2} \tag{5}$$

Pritom môžeme ešte a vhodne zmenšiť podľa potreby. Zmenšíme ho teda tak, aby okrem nerovností (2) a (4) platilo

$$\delta + \frac{1}{4\delta^2} \leqq \xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a}\sqrt{\xi + \frac{\eta}{A} + \frac{1}{4a^2} - \delta}$$

t.j. $\delta + \dfrac{1}{4\delta^2} \leqq x_2$. Potom zrejme nerovnosť (5) je splnená pre všetky čísla $x \geqq x_2$ a tým je dokázané, že funkcia $u(x)$ má vlastnosti popísané v Perronovej existenčnej teoréme, a to v intervale $[\xi, X]$, kde X je ľubovoľne veľké číslo.

Teraz ukážme, že funkcia $v(x)$ spĺňa nerovnosť (3). V intervale $[\xi, x_0]$ má funkcia $v(x)$ hodnotu η a ďalej je $f(x, v(x)) = x - v(x)^2 = x - \eta^2 = x - x_0 \leqq 0 = v'(x)$, takže skutočne v tomto intervale je nerovnosť (3) splnená.

V intervale $x \geqq x_0$ má funkcia $v(x)$ hodnotu $\sqrt{x}$ a je $f(x, v(x)) = x - v(x)^2 = x - x = 0 < \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = v'(x)$ takže nerovnosť (3) je opäť splnená.

Tým sme zistili, že tiež funkcia $v(x)$ má všetky vlastnosti popísané v Perronovej existenčnej teoréme, a to opäť v intervale $[\xi ; X]$, kde X je ľubovoľne veľké číslo.

Podľa tejto teorémy existuje riešenie $y(x)$ diferenciálnej rovnice (1) prechádzajúce bodom (ξ, η) definované v intervale $[\xi, X]$, pre ktoré platí

$$u(x) \leqq y(x) \leqq v(x)$$

takže pre všetky dosť veľké x je

$$\sqrt{x - \delta} \leqq y(x) \leqq \sqrt{x}$$

Tým je dokázané, že riešenie d. rovnice (1) prechádzajúce bodom (ξ, η) $(\xi > 0, \eta > 0)$ možno definovať v ľubovoľne veľkom intervale $[\xi, X]$ a toto riešenie sa asymptoticky blíži k vetve paraboly $y = \sqrt{x}$, lebo číslo $\delta > 0$ je ľubovoľné.

Doteraz sme predpokladali, že bod (ξ, η) leží nad vetvou paraboly $y = \sqrt{x}$, teda že platí nerovnosť $\xi < \eta^2$. V prípade, že bod (ξ, η) leží na parabole alebo pod touto vetvou, t.j. ak platí $\xi \geqq \eta^2$, môžeme za $u(x)$ zvoliť tú istú funkciu ako v prvom prípade a funkciu $v(x)$ definovať takto:

$$v(x) = \begin{cases} \eta + B(x - \xi) & \text{pre } \eta + B(x - \xi) \leqq \sqrt{x} \\ \sqrt{x} & \text{pre } \eta + B(x - \xi) \geqq \sqrt{x} \end{cases}$$

pričom $B > 0$ značí vhodnú konštantu. Potom dostaneme rovnaký výsledok.

10. Picardova metóda postupných aproximácií na riešenie d. rovnice

$$y' = f(x, y)$$

56. Princíp metódy

E. Picard vynašiel k štúdiu d. rovníc obyčajných a parciálnych tzv. metódu postupných aproximácií [Journal de mathématiques pures et appliqées, VI, (1890)] , ktorú neskoršie zdokonalil E. Lindelöf [ten istý časopis, X. (1894)] . Táto metóda nielenže vedie k dôkazu existencie riešenia, ale je užitočná tiež i pre prax, lebo v konkrétnych prípadoch umožňuje nájsť aspoň približné riešenie danej d. rovnice. Tiež treba pripomenúť, že použitie tejto metódy nie je obmedzené len na d. rovnice prvého rádu, ale dá sa s vhodnou obmenou aplikovať i na d. rovnice vyšších rádov.

Uvažujme opäť d. rovnicu

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

pritom o funkcii $f(x, y)$ predpokladajme, že je spojitá v dv. intervale

$$D : |x - \xi| \leqq a, \quad |y - \eta| \leqq b$$

pričom (ξ, η) je nejaký bod a a, b sú kladné čísla.

Okrem toho predpokladajme navyše, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa v D L. podmienku, ktorej konštantu označme L (> 0), takže pre každé dva body (x, y_1), $(x, y_2) \in D$ platí:

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq L |y_1 - y_2| \tag{1}$$

Potom princíp Picardovej metódy postupných aproximácií je tento:

Zvolíme ľubovoľnú funkciu $y_0(x)$, tzv. počiatočnú funkciu, definovanú v intervale $[\xi, \xi + a]$, ktorá má určité vlastnosti, a vychádzajúc z nej, definujeme postupne ďalšie funkcie podľa vzorcov

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \eta + \int_\xi^x f(t, y_0(t)) \, dt \\ y_2(x) &= \eta + \int_\xi^x f(t, y_1(t)) \, dt \end{aligned} \tag{2}$$