Diferenciálne rovnice

Vlastnosti systémov riešení d. rovnice

In: Otakar Borůvka (author): Diferenciálne rovnice. [Vysokoškolské učebné texty. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta]. (Slovak). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1961. pp. 46--52.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401389

Terms of use:

© Univerzita Komenského v Bratislave

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

$$\sup_{x \in j} | u(x) - v(x) | = \sup \{ | \max [u(x), v(x)] - \min [u(x), v(x)| \}$$

alebo

$$\rho (u, v) = \rho (u \smile v, u \frown v)$$

Vidíme, že v každom systéme funkcií, ktorý je zväzom vzhľadom na prirodzené čiastočné usporiadanie a má uvedenú vlastnosť a je súčasne metrickým priestorom s prirodzenou metrikou, je vzdialenosť každých dvoch prvkov tá istá ako vzdialenosť ich hornej a dolnej hranice.

3. Vlastnosti systémov riešení d. rovnice

$$y' = f(x, y)$$

20. V l a s t n o s t i m e t r i c k é

Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

v nejakom obore σ a predpokladajme, že má riešenie definované v určitom intervale j.

Platia tieto vety:

1. Nech Y je ľubovoľný systém riešení d. rovnice (a) definovaných v intervale j. Ak funkcia f je v obore σ ohraničená a ak interval j je ohraničený a funkcie systému Y sú spola rovnomerne ohraničené, potom systém Y je normálny.

Vskutku, funkcie systému Y majú v intervale j derivácie, ktoré sú vzhľadom na predpoklad o funkcii f rovnomerne ohraničené. Správnosť tvrdenia teda vyplýva z výsledkov v ods. 14.

Táto veta obsahuje, že za predpokladov v nej uvedených existuje v každej postupnosti funkcií systému Y aspoň jedna čiastočná postupnosť, ktorá je v intervale j rovnomerne cauchyovská; jej limita je v intervale j rovnomerne spojitá.

Z hľadiska prirodzenej metriky je systém Y relatívne kompaktný.

2. Nech

$$y_1, y_2, \dots$$

je ľubovoľná postupnosť riešení d. rovnice (a) definovaných v intervale j, ktorá je v tomto intervale rovnomerne cauchyovská a teda tam má určitú limitu y;

nech krivka y leží v obore σ. Ak funkcia f je v obore σ rovnomerne spojitá, potom funkcia y je riešením d. rovnice.

Vskutku, nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Z predpokladu o funkcii f usudzujeme, že existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každé dva body (x, y), $(x, y') \in \sigma$, ktorých súradnice spĺňajú nerovnosť $|y - y'| < \delta$, platí vzorec

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon$$

O každom čísle $x \in j$, platí, že body $(x, y_\alpha(x))$, $(x, y(x))$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ ležia v obore σ a pre celkom všetky α platí nerovnosť

$$|y_\alpha(x) - y(x)| < \delta$$

a teda aj vzorec

$$|f(x, y_\alpha(x)) - f(x, y(x))| < \varepsilon$$

Vidíme, že postupnosť

$$f(x, y_1(x)), \quad f(x, y_2(x)), \ldots$$

má v intervale j rovnomernú limitu $f(x, y,(x))$. Pretože funkcie y_α sú riešeniami d. rovnice (a), usudzujeme, že postupnosť

$$y_1'(x), \quad y_2'(x), \ldots$$

má v intervale j rovnomernú limitu $f(x, y(x))$. Odtiaľ vyplýva, že existuje $y'(x)$ a je $y'(x) = f(x, y(x))$.

Poznamenajme, že požiadavka, aby krivka y ležala v obore σ, je splnená, ak obor σ je uzavretý. Vidíme teda, že ak definičný obor d. rovnice (a) je uzavretý a funkcia f je v ňom rovnomerne spojitá, potom limita v každej v istom intervale cauchyovskej postupnosti riešení d. rovnice (a) je v tomto intervale riešením d. rovnice (a). V tomto prípade je vtedy systém všetkých riešení d. rovnice (a) definovaných v nejakom intervale, z hľadiska prirodzenej metriky úplný.

21. Vlastnosti zväzové

1. Uvažujme opäť o d. rovnici (a) v nejakom obore σ a predpokladajme, že táto d. rovnica má riešenie definované v určitom intervale j.

Predovšetkým dokážeme, že platí veta:

Nech y_1, y_2 sú riešenia d. rovnice (a) definované v intervale j. Potom obidve funkcie $\bar{Y}$, $\bar{y}$ definované v intervale j vzorcami

$$\bar{Y}(x) = \max\ [y_1(x),\ y_2(x)]$$

$$\bar{y}(x) = \min\ [y_1(x),\ y_2(x)]$$

sú tiež riešeniami d. rovnice (a).

Dokážeme tvrdenie napr. o funkcii $\bar{Y}$. Nech $x \in j$ je ľubovoľné číslo. Máme ukázať, že platí

$$\bar{Y}'(x) = f(x,\ Y(x))$$

Teda, buď je $y_1(x) \neq y_2(x)$, alebo $y_1(x) = y_2(x)$.

V prvom prípade nech platí napr. $y_1(x) > y_2(x)$. Potom v istom okolí čísla x platí nerovnosť $y_1(t) > y_2(t)$, takže v ňom je $\bar{Y}(t) = y_1(t)$. Odtiaľ vyplýva, že $\bar{Y}'(x) = y_1'(x) = f(x,\ y_1(x))$.

V druhom prípade existuje ku každému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ také, že v každom čísle $t \in j$, pre ktoré platí $0 < |t - x| < \delta$, máme

$$\left| \frac{y_1(t) - y_1(x)}{t - x} - f(x,\ y_1(x)) \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{y_2(t) - y_2(x)}{t - x} - f(x,\ y_2(x)) \right| < \varepsilon$$

V týchto vzorcoch môžeme písať $\bar{Y}(x)$ miesto $y_1(x)$ a $y_2(x)$, lebo podľa predpokladu je $y_1(x) = y_2(x) = \bar{Y}(x)$. Z nich vyplýva, že v každom čísle $t (\neq x)$, ktoré vyhovuje nerovnosti $|t - x| < \delta$, je

$$\left| \frac{\bar{Y}(t) - \bar{Y}(x)}{t - x} - f(x,\ \bar{Y}(x)) \right| < \varepsilon$$

× lebo $\bar{Y}(t)$ je jedným z čísel $y_1(t)$, $y_2(t)$. Vychádza teda $\bar{Y}'(x) = f(x,\ \bar{Y}(x))$ a dôkaz je uskutočnený.

Obsah tejto vety môžeme vyjadriť tiež tým, že horná a dolná hranica každých dvoch riešení d. rovnice (a), definovaných v tomže intervale, je opäť riešením d. rovnice (a); pritom máme na mysli zväzové pojmy hornej a dolnej hranice vzhľadom na prirodzené čiastočné usporiadanie funkcií. Z tohto výsledku vyplýva, že systém všetkých riešení d. rovnice (a) definovaných v tom istom intervale, je zväzom (vzhľadom na prirodzené čiastočné usporiadanie funkcií).

Teraz pôjde o to, aby sme predchádzajúci výsledok rozšírili na ľubovoľný systém riešení definovaných v tomže intervale. Rozšírenie (úplnou indukciou) na konečný systém je ľahké a nebudeme ho zvlášť dokazovať:

Nech $y_1, \dots y_m$ sú riešeniami d. rovnice (a) definované v určitom intervale j. Potom obidve funkcie $\bar{Y}$, $\bar{y}$ definované v intervale j vzorcami

$$\bar{Y}(x) = \max\ [y_1(x),\ \dots,\ y_m(x)]$$

$$\bar{y}(x) = \min\ [y_1(x),\ \dots,\ y_m(x)]$$

sú tiež riešeniami d. rovnice (a).

Nech teraz Y je ľubovoľný systém riešení d. rovnice (a) definovaných v intervale j a nech je tento systém vyznačuje tým, že množina hodnôt jednotlivých riešení je v každom čísle $x \in j$ zhora (zdola) ohraničená. Potom existuje supremum (infimum) množiny týchto hodnôt $\bar{Y}(x)$, $\bar{y}(x)$. Všimnime si, že táto definícia funkcií $\bar{Y}$, $\bar{y}$ zahrňuje ako zvláštny prípad (keď systém Y je konečný) už prv uvedenú definíciu funkcií $\bar{Y}$, $\bar{y}$.

Predovšetkým ukážeme, že ak funkcia f je v obore σ ohraničená a vyhovuje tam nerovnosti $|f(x, y)| \leq M$, kde M je vhodné nezáporné číslo, potom obidve funkcie $\bar{Y}$, $\bar{y}$ spĺňajú Lipschitzovu podmienku s konštantou M, t.j. v každých dvoch číslach $x, x' \in j$ platia nerovnosti

$$|\bar{Y}(x) - \bar{Y}(x')| \leq M|x - x'|, \quad |\bar{y}(x) - \bar{y}(x')| \leq M|x - x'| \qquad (1)$$

Dokážme tvrdenie napr. o funkcii $\bar{Y}$.

Nech $x, x' \in j$ sú ľubovoľné čísla. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Podľa definície čísel $\bar{Y}(x)$, $\bar{Y}(x')$ existujú riešenia y, y_1 d. rovnice (a), ktoré sú prvky systému Y a spĺňajú nerovnosti

$$0 \leq \bar{Y}(x) - y(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \bar{Y}(x') - y_1(x') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nech Y je funkcia definovaná v intervale j vzorcom

$$Y(t) = \max\,[y(t), y_1(t)]$$

Podľa uvedenej vety je funkcia Y riešením d. rovnice (a), takže podľa vety v ods. 6 platí

$$|Y(x) - Y(x')| \leq M|x - x'|$$

Ďalej platia nerovnosti

$$0 \leq \bar{Y}(x) - Y(x) \leq \bar{Y}(x) - y(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \bar{Y}(x') - Y(x') \leq \bar{Y}(x') - y_1(x') < \frac{\varepsilon}{2}$$

a tak vidíme, že platia tieto vzťahy:

$$|\bar{Y}(x) - \bar{Y}(x')| \leq |\overline{\bar{Y}(x) - Y(x)} + \overline{Y(x) - Y(x')} + \overline{Y(x') - \bar{Y}(x')}| \leq$$

$$\leq \left[\bar{Y}(x) - Y(x)\right] + |Y(x) - Y(x')| + \left[\bar{Y}(x') - Y(x')\right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + M|x - x'| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + M|x - x'|.$$

Z nich vychádza vzhľadom na to, že číslo $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, prvý vzorec (1).

Ďalej ukážeme, že ak funkcia f spĺňa predpoklad predchádzajúcej vety a ak interval j je kompaktný (t.j. ohraničený a uzavretý), možno každú funkciu $\bar{Y}$, $\bar{y}$ aproximovať s ľubovoľnou presnosťou vhodným riešením d. rovnice (a), t.j. k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existujú riešenia Y, y d. rovnice (a), definované v intervale j také, že v každom čísle $x \in j$ je

$$|\bar{Y}(x) - Y(x)| < \varepsilon \ , \ |y(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon \qquad (2)$$

Dokážeme tvrdenie napr. o funkcii $\bar{Y}$.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Z toho, že interval j je kompaktný, usudzujeme, že existuje jeho delenie $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$, ktoré má normu menšiu než $\frac{\varepsilon}{3M}$ v prípade $M > 0$ a ľubovoľnú v prípade $M = 0$; x_0 je ľavý a x_m pravý koncový bod intervalu j. Zrejme existujú riešenia d. rovnice (a), $y_0, \ldots, y_m$, ktoré sú prvkami systému Y a spĺňajú nerovnosti:

$$0 \leq \bar{Y}(x_\alpha) - y_\alpha(x_\alpha) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\alpha = 0, \ldots, m)$$

Nech Y je funkcia definovaná v intervale j vzorcom:

$$Y(t) = \max\left[y_0(t), \ldots, y_m(t)\right]$$

Z predchádzajúcich úvah vieme, že funkcia Y je riešením d. rovnice (a). Ukážeme, že toto riešenie aproximuje funkciu $\bar{Y}$ podľa vzorca (2).

Nech $x \in j$ je ľubovoľné číslo. Číslo x leží v určitom intervale $[x_\beta, x_{\beta+1}]$ nášho delenia. Predovšetkým usudzujeme, prihliadajúc ku vzorcu (1), že platí nerovnosť

$$|\bar{Y}(x) - \bar{Y}(x_\beta)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ďalej vidíme, že platia vzťahy

$$0 \leq \bar{Y}(x_\beta) - Y(x_\beta) \leq \bar{Y}(x_\beta) - y_\beta(x_\beta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

a nakoniec podľa vety o prírastku máme

$$| Y(x_\beta) - Y(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Z týchto vzorcov vychádzajú nerovnosti:

$$| \bar{Y}(x) - Y(x) | = | \overline{\bar{Y}(x) - \bar{Y}(x_\beta)} + \overline{\bar{Y}(x_\beta) - Y(x_\beta)} + \overline{Y(x_\beta) - Y(x)} |$$

$$\leq | \bar{Y}(x) - \bar{Y}(x_\beta) | + | \bar{Y}(x_\beta) - Y(x_\beta) | + | Y(x_\beta) - Y(x) |$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ktoré ukazujú, že tvrdenie je správne.

Na základe tohto výsledku ľahko zistíme správnosť nasledujúcej vety, ktorá predstavuje rozšírenie predchádzajúcich výsledkov o zväzových vlastnostiach konečných systémov riešení na ľubovoľný systém.

Ak funkcia f je v obore σ rovnomerne spojitá a ohraničená a ak okrem toho je interval j kompaktný a krivky $\bar{Y}$, $\bar{y}$ ležia v obore σ, sú funkcie Y, y riešeniami d. rovnice (a).

Dokážeme tvrdenie napr. o funkcii $\bar{Y}$.

Za uvedených predpokladov existuje, ako je známe, ku každému prirodzenému číslu ν (= 1, 2, ...) riešenie Y_ν d. rovnice (a), definované v intervale j také, že v každom čísle $x \in j$ je $| \bar{Y}(x) - Y_\nu(x) | < \frac{1}{\nu}$. Postupnosť riešení $Y_1, Y_2, \ldots$ je teda v intervale j rovnomerne cauchyovská a má tam limitu $\bar{Y}$; podľa predpokladu leží krivka $\bar{Y}$ v obore σ. Na dokončenie dôkazu stačí aplikovať vetu 21., 2.

Obsah tejto vety môžeme vyjadriť tým, že za predpokladov v nej popísaných je horná a dolná hranica, pokiaľ eixstujú, každého systému riešení d. rovnice (a) definovaných v tomže intervale, opäť jej riešením. Poznamenajme, že horná (dolná) hranica existuje vtedy a len vtedy, ak množina hodnôt jednotlivých riešení systému v každom čísle intervalu je zhora (zdola) ohraničená;: existujú najmä vtedy, keď systém riešení je normálny.

22. Systémy riešení prechádzajúcich daným bodom

Dôležitý význam v teórii d. rovnice (a) majú systémy skladajúce sa zo všetkých riešení d. rovnice (a), ktoré prechádzajú daným bodom.

Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ je ľubovoľný bod a predpokladajme, že ním prechádzajú riešenia d. rovnice (a). Označme Y systém všetkých riešení d. rovnice (a), ktoré prechádzajú bodom (ξ, η), takže $Y \neq \emptyset$. Pripomeňme, že jednotlivé riešenia $y \in Y$ existujú v rozmanitých intervaloch, ktoré zrejme všetky obsahujú číslo ξ a že spolu s každým riešením $y \in Y$ patrí do systému Y každá časť riešenia prechádzajúca bodom (ξ, η).

Medzi riešeniami systému Y môže byť integrál g, definovaný v istom intervale, ktorý integrál je význačný tým, že jeho hodnoty v porovnaní s hodnotami ľubovoľného riešenia $y \in Y$ v číslach, v ktorých obidve riešenia g, y existujú, sú vždy menšie, lebo sa rovnajú hodnotám riešenia y. Integrál g sa potom nazýva <u>najmenší integrál prechádzajúci bodom</u> (ξ, η), stručne: <u>najmenší integrál v bode</u> (ξ, η).

Obdobne definujeme <u>najväčší integrál</u> G <u>prechádzajúci bodom</u> (ξ, η), stručne: <u>najväčší integrál</u> v bode (ξ, η), tým že jeho hodnoty v porovnaní s hodnotami ľubovoľného riešenia $y \in Y$ v číslach, v ktorých obidve riešenia G, y existujú, sú vždy väčšie, alebo sa rovnajú.

Integrály g, G nazývame súhrnne <u>krajné</u>, alebo <u>extrémne integrály prechádzajúce bodom</u> (ξ, η), stručne: <u>krajné</u> alebo <u>extrémne integrály v bode</u> (ξ, η).

Ľahko vidíme, že ak d. rovnica (a) má len jedno riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η), definované v nejakom intervale j, potom toto riešenie je súčasne najmenším a najväčším integrálom v bode (ξ, η); naopak, ak d. rovnica (a) má riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η), definované v nejakom intervale j, ktoré je súčasne najmenším a najväčším integrálom v bode (ξ, η) potom toto riešenie je jediné, ktoré prechádza bodom (ξ, η) a je definované v intervale j.

Podobne, ako sme definovali krajné integrály v bode (ξ, η), definujeme tzv. <u>krajné zložené integrály v bode</u> (ξ, η).

Medzi riešeniami systému Y môže byť integrál h (H), definovaný v tom istom intervale, ktorý integrál je významný tým, že jeho časť v číslach $x \leq \xi$, pokiaľ existuje, je najmenším (najväčším) a v číslach $x \geq \xi$ pokiaľ existuje, najväčším (najmenším) integrálom systému Y. Integrál h (H) sa potom nazýva <u>dolný (horný) zložený integrál prechádzajúci bodom</u> (ξ, η) stručne: <u>dolný (horný) zložený integrál v bode</u> (ξ, η); súhrnne potom tieto integrály nazývame <u>krajné</u> alebo <u>extrémne zložené integrály prechádzajúce bodom</u> (ξ, η), stručne: <u>krajné</u> alebo <u>extrémne zložené integrály v bode</u> (ξ, η).

Vlastnosti krajných zložených integrálov v bode (ξ, η) sú samozrejme dané vlastnosťami najmenších a najväčších integrálov v bode (ξ, η).

4. Porovnávacie teorémy

23. Metóda indukcie v kontinuu

V dôkazoch porovnávacích teorém, ktoré sú hlavným obsahom tejto kapitoly, použijeme tzv. <u>metódy indukcie v kontinuu</u>. Túto metódu vynašiel <u>O.Perron</u> a v mnohých prípadoch preukázal jej užitočnosť.

Metóda indukcie v kontinuu je prevedením klasickej metódy úplnej indukcie z množiny prirodzených čísel na uzavretý interval.