12. O rozkladech grup tvořených podgrupami

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 58--63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401371

ných z bodů a přímek, jako jsou různé konfigurace bodů a přímek, trojúhelníky, kuželosečky, atp. Tato geometrie jest podložena úplnou grupou euklidovských pohybů v rovině v tom smyslu, že se dva útvary považují za shodné, když se dají na sebe zobraziti některým euklidovským pohybem.

2. Grupoid, jehož pole jest množina $2n$ permutací vrcholů pravidelného n-úhelníka v rovině ($n \geqq 3$), které jsme popsali ve cvič. 4. v odst. 4., a násobení jest definováno skládáním permutací (v. cvič. 2. v odst. 5.) jest grupa, která se nazývá *diedrická grupa řádu* $2n$. Tato grupa obsahuje kromě nejmenší podgrupy další vlastní podgrupy: podgrupu řádu n skládající se ze všech prvků odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu; n podgrup řádu 2 skládajících se vždy z identické permutace a z permutace odpovídající přiřazení k vrcholům pravidelného n-úhelníka vrcholů souměrně položených vzhledem k některé ose souměrnosti.

3. Počet prvků, které jsou samy k sobě inversní, jest v každé konečné grupě sudého (lichého) řádu sudý (lichý).

4. Když ke každému prvku a libovolné grupy $\mathfrak{G}$ přiřadíme inversní prvek a^{-1}, obdržíme prosté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na sebe; když grupa $\mathfrak{G}$ jest abelovská, pak toto zobrazení jest automorfismus.

5. V každé abelovské grupě tvoří všechny prvky, které jsou samy k sobě inversní, podgrupu.

6. Když $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ jsou podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Když také $\mathfrak{C}$ jest podgrupa v $\mathfrak{G}$ a jest zaměnitelná s $\mathfrak{A}$, pak i podgrupa $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jest zaměnitelná s $\mathfrak{A}$.

7. Každá grupa má centrum.

12. O rozkladech grup vytvořených podgrupami.

Velmi důležitá vlastnost grup záleží v tom, že každá podgrupa v libovolné grupě určuje na ní jisté rozklady. Uvažujme opět o libovolné grupě $\mathfrak{G}$ a o nějaké podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$! Nechť a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Podmnožina $a\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$, t. j. tedy množina součinů prvku a s každým prvkem v $\mathfrak{A}$, nazývá se *levá třída prvku a vzhledem k podgrupě* $\mathfrak{A}$, anebo stručněji, víme-li, že jde o podgrupu $\mathfrak{A}$, *levá třída prvku a* a podobně nazývá se podmnožina $\mathfrak{A}a$, t. j. množina součinů každého prvku v $\mathfrak{A}$ s prvkem *a pravá třída prvku a vzhledem k podgrupě* $\mathfrak{A}$, stručněji: *pravá třída prvku a.* Všimněme si, že pole A podgrupy $\mathfrak{A}$ jest současně levá i pravá třída prvku $\underline{1}$ vzhledem k $\mathfrak{A}$. V několika jednoduchých větách popíšeme nejprve vlastnosti levých tříd; vlastnosti pravých tříd jsou analogické, a třebaže je kvůli úspoře místa výslovně neuvádíme, doporučujeme čtenáři, aby si je rovněž promyslil.

Nechť a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$.

1. *Levá třída $a\mathfrak{A}$ obsahuje prvek a.* Skutečně, protože $\mathfrak{A}$ jest podgrupa, máme $\underline{1} \in \mathfrak{A}$ a odtud plyne $a = a\underline{1} \in a\mathfrak{A}$.

2. *Když a jen když $a \in \mathfrak{A}$, jest $a\mathfrak{A} = A$.* Za účelem důkazu předpokládejme nejprve $a \in \mathfrak{A}$. Protože $\mathfrak{A}$ jest podgrupa, jest součin prvku a s každým prvkem v $\mathfrak{A}$ obsažen opět v $\mathfrak{A}$, takže máme vztah $a\mathfrak{A} \subset A$. Mimoto $a^{-1} \in \mathfrak{A}$ a pro libovolný prvek $x \in \mathfrak{A}$ platí $a^{-1}x \in \mathfrak{A}$, takže $a(a^{-1}x) \in a\mathfrak{A}$; avšak $a(a^{-1}x) = (aa^{-1})x = \underline{1}x = x$ a tedy vychází $x \in a\mathfrak{A}$ a máme další vztah $A \subset a\mathfrak{A}$. Tedy jest skutečně $a\mathfrak{A} = A$. Nechť nyní pro některý prvek $a \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a\mathfrak{A} = A$. Pak každý součin ax, kde $x \in \mathfrak{A}$, jest obsažen v $\mathfrak{A}$ a tedy zejména (pro $x = \underline{1}$) jest prvek a obsažen v $\mathfrak{A}$.

Zobecněním věty 2. jest následující věta

3. *Když a jen když $a^{-1}b \in \mathfrak{A}$, jest $a\mathfrak{A} = b\mathfrak{A}$.* Skutečně, když $a^{-1}b \in \mathfrak{A}$, máme podle věty 2.: $a^{-1}b\mathfrak{A} = A$ a tedy platí tyto rovnosti: $b\mathfrak{A} = (aa^{-1})b\mathfrak{A} = a(a^{-1}b)\mathfrak{A} = a(a^{-1}b\mathfrak{A}) = a\mathfrak{A}$. Naopak plyne z rovnosti $b\mathfrak{A} = a\mathfrak{A}$ vztah $(a^{-1}b)\mathfrak{A} = A$ a tedy $a^{-1}b \in \mathfrak{A}$, podle věty 2.

4. *Levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ buď jsou disjunktní anebo jsou identické.* Tato důležitá vlastnost levých tříd plyne z této úvahy: Mají-li obě levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ některý prvek x společný, takže $x \in a\mathfrak{A}$, $x \in b\mathfrak{A}$, pak jest $a^{-1}x \in \mathfrak{A}$ $b^{-1}x \in \mathfrak{A}$ a odtud podle věty 3. vychází $a\mathfrak{A} = x\mathfrak{A} = b\mathfrak{A}$, takže obě levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ jsou identické.

5. *Levé třídy $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ jsou ekvivalentní množiny.* Máme ukázati, že existuje prosté zobrazení množiny $a\mathfrak{A}$ na $b\mathfrak{A}$. Každý prvek v $a\mathfrak{A}(b\mathfrak{A})$ jest součin $ax\,(bx)$ prvku $a\,(b)$ s vhodným prvkem $x \in \mathfrak{A}$ a takový prvek x jest jenom jeden, neboť z rovnosti $ax = ay$ $(bx = by)$ plyne $x = y$. Naopak, když $x \in \mathfrak{A}$, máme $ax \in a\mathfrak{A}$ $(bx \in b\mathfrak{A})$. Vidíme tedy, že zobrazení $\begin{pmatrix} ax \\ x \end{pmatrix}$ jest prosté zobrazení množiny $a\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}$ a podobně $\begin{pmatrix} x \\ bx \end{pmatrix}$ jest prosté zobrazení podgrupy $\mathfrak{A}$ na $b\mathfrak{A}$. Tedy jest $\begin{pmatrix} x \\ bx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax \\ x \end{pmatrix}$ prosté zobrazení množiny $a\mathfrak{A}$ na $b\mathfrak{A}$ a tím jest naše tvrzení dokázáno.

Jak jsme se již zmínili, mají pravé třídy vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ vlastnosti analogické. Mezi levými a pravými třídami vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ jest tento vztah:

6. *Levá třída $a\mathfrak{A}$ a pravá třída $\mathfrak{A}b$ jsou ekvivalentní množiny.* Máme ukázati, že existuje prosté zobrazení množiny $a\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}b$. Podle věty 5. existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{a}$ množiny $a\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}$ a podobně (protože vlastnosti pravých tříd jsou analogické) existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{b}$ množiny $\mathfrak{A}b$ na $\mathfrak{A}$. Zobrazení složené $\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a}$ jest tedy prosté zobrazení množiny $a\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}b$.

Uvažujme nyní o systému všech podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou levými třídami vzhledem k $\mathfrak{A}$ vždy některého prvku v $\mathfrak{G}$! Podle hořejší věty 1. jest každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ obsažen v levé třídě $a\mathfrak{A}$ a tato jest ovšem prvkem našeho systému; podle věty 4. jsou každé dva prvky našeho systému disjunktní. Systém, o nějž jde, jest tedy rozklad grupy $\mathfrak{G}$. Tento rozklad grupy $\mathfrak{G}$ se nazývá *rozklad grupy* $\mathfrak{G}$ *v levé třídy vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$, stručněji: *levý rozklad vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$, a označujeme jej $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$. Podobně se ukáže, že systém všech podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou pravými třídami vzhledem k $\mathfrak{A}$ vždy některého prvku v $\mathfrak{G}$ jest rozklad grupy $\mathfrak{G}$ a sice t. zv. *rozklad grupy* $\mathfrak{G}$ *v pravé třídy vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$, stručněji: *pravý rozklad vytvořený podgrupou* $\mathfrak{A}$, a označujeme jej symbolem $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$.

Snadno ukážeme, že *rozklady* $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ *jsou ekvivalentní množiny.* Za tím účelem stačí ovšem zjistiti, že existuje prosté zobrazení rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ na rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$. V každém prvku $\bar{a}$ rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ zvolme libovolný prvek $a \in \mathfrak{G}$, takže $\bar{a} = a\mathfrak{A}$, a přiřaďme k němu prvek $\mathfrak{A}a^{-1}$ rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$! Tím definujeme jisté zobrazení rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ do rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ a (protože každý prvek v $\mathfrak{G}$ jest inversní vzhledem k některému prvku v $\mathfrak{G}$) dokonce *na* rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ a stačí zjistiti, že toto zobrazení jest prosté. Jsou-li některé prvky $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ zobrazeny na týž prvek $\mathfrak{A}a^{-1} = \mathfrak{A}b^{-1}$, pak (podle věty analogické k hořejší větě 3.) platí vztah $a^{-1}b \in \mathfrak{A}$ a odtud podle věty 3. plyne, že prvky $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A}$ jsou identické a tím jest dokázáno, že naše zobrazení jest prosté.

Všimněme si důsledků těchto vět v případě, že grupa $\mathfrak{G}$ jest konečná. Označme písmenem N řád grupy $\mathfrak{G}$, takže N jest počet prvků v $\mathfrak{G}$ a písmenem n řád podgrupy $\mathfrak{A}$, takže n jest počet prvků v $\mathfrak{A}$. Jedním prvkem levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$ jest pole A podgrupy $\mathfrak{A}$. Tento prvek levého rozkladu skládá se tedy z n prvků grupy $\mathfrak{G}$ a tedy (podle věty 5.) každý prvek levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$ se skládá z n prvků grupy $\mathfrak{G}$. Odtud plyne rovnost $N = qn$, kde q značí počet prvků levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$. Tímto způsobem jsme došli k důležitému výsledku, že *řád každé podgrupy* $\mathfrak{A}$ *v libovolné konečné grupě* $\mathfrak{G}$ *jest dělitelem řádu grupy* $\mathfrak{G}$. Tento výsledek bývá v literatuře označován jako *Lagrangeova věta* a v teorii konečných grup jest považován za jeden z nejdůležitějších. Číslo q, t. j. tedy počet prvků rozkladu $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a současně i podíl řádu grupy $\mathfrak{G}$ a řádu podgrupy $\mathfrak{A}$ se nazývá *index* podgrupy $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$. Protože rozklady $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ jsou ekvivalentní množiny, udává index podgrupy $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ současně počet prvků rozkladu $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$. Důsledkem Lagrangeovy věty jest na př., že *libovolná grupa, jejíž řád jest nějaké prvočíslo, neobsahuje žádnou vlastní podgrupu, která by byla různá od nejmenší podgrupy.* Všimněme si, že tvrzení Lagrangeovy věty platí i když grupa $\mathfrak{G}$ jest nekonečná ($N = 0$).

Příklad. Uvažujme o grupě $\mathfrak{S}_3$ a její prvky označme písmeny $\underline{1}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{f}$, podobně, jako na str. 26. Z multiplikační tabulky grupy $\mathfrak{S}_3$, uvedené na str. 26., vidíme, že prvky $\underline{1}, \boldsymbol{f}$ tvoří podgrupu v $\mathfrak{S}_3$; tuto podgrupu označíme $\mathfrak{A}$.

Levé třídy jednotlivých prvků v $\mathfrak{S}_3$ vzhledem k $\mathfrak{A}$ jsou:

$$\underline{1}\mathfrak{A} = \boldsymbol{f}\mathfrak{A} = \{\underline{1}, \boldsymbol{f}\};\ \boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \boldsymbol{c}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\};\ \boldsymbol{b}\mathfrak{A} = \boldsymbol{d}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\};$$

pravé třídy jsou:

$$\mathfrak{A}\underline{1} = \mathfrak{A}\boldsymbol{f} = \{\underline{1}, \boldsymbol{f}\};\ \mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \mathfrak{A}\boldsymbol{d} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\};\ \mathfrak{A}\boldsymbol{b} = \mathfrak{A}\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}.$$

Levý rozklad grupy $\mathfrak{S}_3$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ skládá se tedy z prvků: $\{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}, \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$, a pravý rozklad se skládá z prvků: $\{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Všimněme si, že tyto dva rozklady jsou různé! Řád grupy $\mathfrak{S}_3$ jest 6, řád podgrupy $\mathfrak{A}$ jest 2, index podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{S}_3$ jest $6 : 2 = 3 =$ počet prvků levého a současně i pravého rozkladu grupy $\mathfrak{S}_3$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$.

Naše úvahy rozšíříme nyní na případ, že vedle podgrupy $\mathfrak{A}$ máme v $\mathfrak{G}$ další podgrupu $\mathfrak{B}$, která jest nadgrupou na $\mathfrak{A}$, takže platí vztahy $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$. Především si uvědomíme, že dvojicí podgrup $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ jsou jednoznačně určeny dva rozklady v grupě $\mathfrak{G}$ a sice levý rozklad $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ a pravý rozklad $\mathfrak{B}/_p\mathfrak{A}$ podgrupy $\mathfrak{B}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. Dále budeme uvažovati o tom, že každý prvek $a \in \mathfrak{G}$ určuje jednak levou (pravou) třídu $a\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}a$) vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ a jednak levou (pravou) třídu $a\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}a$) vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$. Jest nějaký vztah mezi levými třídami vzhledem k podgrupám $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ a podobně mezi pravými třídami vzhledem k $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$? Následující věta popisuje vztah mezi levými třídami a podobná věta i s důsledky platí o pravých třídách.

7. *Když některé dvě třídy $a\mathfrak{A}, b\mathfrak{B}$ jsou incidentní, pak $a\mathfrak{A} \subset b\mathfrak{B}$.* Skutečně, když některé dvě levé třídy $a\mathfrak{A}, b\mathfrak{B}$ mají společný prvek $c \in \mathfrak{G}$, pak především podle vět 1. a 4. platí rovnosti $a\mathfrak{A} = c\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{B} = c\mathfrak{B}$. Z předpokladu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ pak plyne vztah $c\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{B}$ a tedy vychází $a\mathfrak{A} \subset b\mathfrak{B}$.

Zřejmým důsledkem věty 7. jest, že každá levá třída vzhledem k podgrupě $\mathfrak{B}$ jest součtem všech levých tříd vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$, které jsou s ní incidentní. Odtud plyne dále, že levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) jest zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), t. j. $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$. Když naopak levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený nějakou podgrupou $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{G}$ jest zákrytem levého rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného nějakou podgrupou $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{G}$, pak zejména pole B' podgrupy $\mathfrak{B}'$ jest součtem některých levých tříd vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}'$ a mezi těmito levými třídami jest pole A' podgrupy $\mathfrak{A}'$, neboť obě množiny B', A' mají společný prvek $\underline{1} \in \mathfrak{G}$. Došli jsme k tomuto výsledku: *Když a jen když pro nějaké dvě podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v grupě $\mathfrak{G}$ platí vztah*

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, *jest levý rozklad grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořený podgrupou* $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) *zákrytem (zjemněním) levého rozkladu grupy* $\mathfrak{G}$ *vytvořeného podgrupou* $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$).

Nechť nyní $\mathfrak{C}$ značí libovolnou další podgrupu v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ jsou zaměnitelné. Za tohoto předpokladu jsou (podle cvič. 6. v odst. 11.) zaměnitelné i obě podgrupy $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ a tedy existuje podgrupa $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$. Uvažujme nyní o obalu $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ podgrupy $\mathfrak{C}$ v rozkladu $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ a o průseku $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ rozkladu $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ s podgrupou $\mathfrak{C}$! Ukážeme, že platí tyto rovnosti:

1. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$; 2. $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$.

Abychom ukázali, že platí rovnost 1., ukážeme, že každý prvek rozkladu na pravé straně jest prvkem rozkladu na levé straně a naopak, každý prvek rozkladu na lèvé straně jest prvkem rozkladu na pravé straně. Na pravé straně rovnosti 1. máme levý rozklad podgrupy $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. Každý prvek $\bar{a}$ tohoto rozkladu jest tedy $x\mathfrak{A}$, kde $x \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$, takže x jest součin ba jistého prvku $b \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ s jistým prvkem $a \in \mathfrak{A}$. Odtud plyne $\bar{a} = (ba)\mathfrak{A} = b(a\mathfrak{A}) = b\mathfrak{A}$, neboť podle věty 2. máme $a\mathfrak{A} = A$. Protože $b \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, jest $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ a protože $b \in \mathfrak{C}$, jest $b\mathfrak{A}$ incidentní s $\mathfrak{C}$. Vychází tedy vztah $\bar{a} \in \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$ a tím jest provedena první část našeho důkazu. Nechť nyní $\bar{a}$ značí libovolný prvek v $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$, takže $\bar{a} = b\mathfrak{A}$, kde b značí jistý prvek v $\mathfrak{B}$ a dále $b\mathfrak{A}$ jest incidentní s $\mathfrak{C}$, t. j. existuje prvek $c \in \mathfrak{C}$ takový, že $c \in b\mathfrak{A}$. Ze vztahu $c \in b\mathfrak{A}$ plyne podle vět 1. a 4. rovnost $\bar{a} = c\mathfrak{A}$ a odtud plyne dále $c \in \mathfrak{B}$, neboť $\bar{a} \subset \mathfrak{B}$. Máme tedy vztah $c \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a tedy také $c = c\underline{1} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$. Odtud a ze vztahu $\mathfrak{A} \subset (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ vychází $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$ a tím jest náš důkaz ukončen.

Při důkazu rovnosti 2. budeme postupovati podobně. Každý prvek $\bar{a}$ na pravé straně rovnosti 2. jest $a(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}) = a\mathfrak{C} \cap a\mathfrak{A}$, kde $a \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$. Ze vztahu $a \in \mathfrak{C}$ plyne rovnost $a\mathfrak{C} = C$, kde C jest pole podgrupy $\mathfrak{C}$, a protože $a \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, máme $a\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A}$. Odtud vychází $\bar{a} = \mathfrak{C} \cap a\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ a tím jest provedena první část důkazu. Nechť nyní $\bar{a}$ značí libovolný prvek rozkladu $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$, takže $\bar{a} = \mathfrak{C} \cap b\mathfrak{A}$, kde b jest jistý prvek v $\mathfrak{B}$. Podle definice průseku rozkladu s množinou, není $\bar{a}$ prázdná množina a tedy existuje prvek $a \in \mathfrak{C} \cap b\mathfrak{A}$. Protože $a \in \mathfrak{C}$, platí rovnost $C = a\mathfrak{C}$ a protože $a \in b\mathfrak{A}$, jest $b\mathfrak{A} = a\mathfrak{A}$ a tedy máme $\bar{a} = a\mathfrak{C} \cap a\mathfrak{A} = a(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$. Uvážíme-li, že ze vztahů $b \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ plyne $b\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, vidíme, že $a \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a vychází $\bar{a} \in (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ a tím jest důkaz ukončen.

Všimněme si zvláštního případu, že podgrupa $\mathfrak{B}$ splývá s grupou $\mathfrak{G}$! Pak $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ a z hořejších vzorců plynou tyto rovnosti:

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Podobnými úsudky se dá ukázati, že pro pravé rozklady platí analogické vzorce

1'. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_p\mathfrak{A}$, 2'. $\mathfrak{B}/_p\dot{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_p(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ a jejich zvláštní případy

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}/_p\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_p(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Zopakujme si, že $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a že podgrupa $\mathfrak{A}$ leží v $\mathfrak{B}$ a jest zaměnitelná s $\mathfrak{C}$.

Cvičení. 1. Když grupa $\mathfrak{G}$ jest abelovská, pak levá třída libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k nějaké podgrupě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ jest současně pravou třídou prvku a vzhledem k $\mathfrak{A}$; odtud plyne rovnost levého a pravého rozkladu grupy $\mathfrak{G}$ vytvořeného podgrupou $\mathfrak{A}$.

2. Levý (a současně pravý) rozklad grupy $\mathfrak{Z}$ vytvořený podgrupou skládající se ze všech násobků libovolného přirozeného čísla n jest rozklad $\bar{Z}_n$, o němž jsme uvažovali na str. 38.

3. Řád každé grupy, jejíž prvky jsou permutace nějaké konečné množiny řádu n, jest dělitelem čísla $n!$

4. Počet prvků v libovolné konečné abelovské grupě řádu N, které jsou samy k sobě inversní, jest dělitelem čísla N.

5. Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu a B libovolnou podmnožinu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Ukažte, že 1. součet všech levých (pravých) tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s B, jest $B\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}B$), 2. součet všech levých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$, které jsou incidentní s některou pravou třídou $\mathfrak{A}a$, jest týž, jako součet všech pravých tříd vzhledem k $\mathfrak{A}$ incidentních s levou třídou $a\mathfrak{A}$.

13. O grupách tříd.

Nechť $\mathfrak{A}$ značí libovolnou podgrupu v nějaké grupě $\mathfrak{G}$. Jak jsme viděli v odst. 12., vytvořuje podgrupa $\mathfrak{A}$ levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ a pravý rozklad $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$. Položme si otázku, zda na př. levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ může býti vytvořující.

Předpokládejme nejprve, že rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ vytvořující jest a uvažujme o dvou libovolných prvcích $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, takže a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}$. Podle definice vytvořujícího rozkladu existuje prvek $c\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ takový, že platí vztah

$$a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}.$$

Z tohoto vztahu plyne zejména $ab\mathfrak{A} = (a\underline{1}) \,.\, b\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, tedy $ab\mathfrak{A} \subset c\mathfrak{A}$, a odtud opět $ab = ab \,.\, \underline{1} \in c\mathfrak{A}$, takže podle vět 1. a 4. na str. 59. máme $c\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy především vztah $a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A} \subset ab\mathfrak{A}$. Každý prvek v levé třídě $ab\mathfrak{A}$ jest součinem $ab.x$ prvku ab s některým prvkem $x \in \mathfrak{A}$ a zřejmě platí vztahy $abx = (a\underline{1})(bx) \in a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A}$; odtud plyne, že současně jest $a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A} \supset ab\mathfrak{A}$. Vychází tedy rovnost

$$a\mathfrak{A} \,.\, b\mathfrak{A} = ab\mathfrak{A}, \tag{1}$$

t. j., součin levé třídy $a\mathfrak{A}$ s levou třídou $b\mathfrak{A}$ jest levá třída $ab\mathfrak{A}$.