9. Věty o isomorfismu grupoidů.

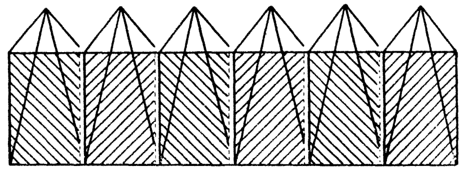
Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$! V odst. 8. jsme ukázali, že rozklad $\bar{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ jest vytvořující. Nechť $\overline{\mathfrak{G}}$ značí faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $\bar{G}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ přiřadíme onen prvek $a^* \in \mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se $\bar{a}$ skládá, obdržíme jisté prosté zobrazení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$; označme je $\boldsymbol{i}$. Podle definice zobrazení $\boldsymbol{i}$ platí tedy rovnost $\boldsymbol{i}\bar{a} = \boldsymbol{d}a$ a sice pro každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ a každý prvek $a \in \bar{a}$. Nechť $\bar{a}, \bar{b}$ značí libovolné prvky v $\overline{\mathfrak{G}}$ a nechť a jest libovolný prvek v $\bar{a}$ a b libovolný prvek v $\bar{b}$. Pak platí vztahy $ab \in \overline{ab} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \overline{\mathfrak{G}}$ a odtud plyne $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{i}\bar{a} \,.\, \boldsymbol{i}\bar{b}$. Máme tedy rovnost $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \boldsymbol{i}\bar{a} . \boldsymbol{i}\bar{b}$, která vyjadřuje, že $\boldsymbol{i}$ jest deformace a tedy (protože jest prostá) isomorfismus faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}^*$. Tím jsme došli k poznatku, že když existuje nějaká deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak na $\mathfrak{G}$ existuje faktoroid isomorfní s $\mathfrak{G}^*$ a to faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ příslušný k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$, při čemž isomorfismus jest výše definované zobrazení $\boldsymbol{i}$.

Nechť nyní naopak $\overline{\mathfrak{G}}$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ a nechť $\boldsymbol{d}$ značí zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\overline{\mathfrak{G}}$ definované takto: Obraz v $\boldsymbol{d}$ libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest onen prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$, v němž a leží, t. j. pro nějž platí $a \in \bar{a}$. Snadno ukážeme, že $\boldsymbol{d}$ jest deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\overline{\mathfrak{G}}$. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $a, b \in \mathfrak{G}$ a o oněch prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathfrak{G}}$, které obsahují a, b, takže $\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, $\bar{b} = \boldsymbol{d}b$. Ze vztahů $ab \in \overline{ab} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \overline{\mathfrak{G}}$ plyne $ab \in \bar{a} \cdot \bar{b}$ a dále $\boldsymbol{d}ab = \bar{a} \cdot \bar{b} = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b$, takže skutečně zobrazení $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$. Vychází tedy, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovati na každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ ležící na $\mathfrak{G}$ a to tím způsobem, že se každý prvek v $\mathfrak{G}$ zobrazí na onen prvek v $\overline{\mathfrak{G}}$, v němž leží. Odtud plyne dále, že se grupoid $\mathfrak{G}$ dá deformovati na každý grupoid $\mathfrak{G}^*$, který jest isomorfní s některým faktoroidem na $\mathfrak{G}$.

Hořejší výsledky stručně shrnuje t. zv. *první věta o isomorfismu grupoidů*:

Když grupoid $\mathfrak{G}^*$ *jest homomorfní s grupoidem* $\mathfrak{G}$, *pak jest isomorfní s jistým faktoroidem na* $\mathfrak{G}$; *když grupoid* $\mathfrak{G}^*$ *jest isomorfní s některým faktoroidem na grupoidu* $\mathfrak{G}$, *pak jest homomorfní s* $\mathfrak{G}$.

Obsah první věty o isomorfismu grupoidů jest znázorněn na příkladě v obr. 7. V něm jsou vyznačena pole dvou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ a jistá deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ jest množina bodů uvnitř a na obvodu velkého obdélníka, pole grupoidu $\mathfrak{G}^*$ se skládá z vyznačených bodů nad obdélníkem; deformace $\boldsymbol{d}$ zobrazuje všechny prvky grupoidu $\mathfrak{G}$ ležící vždy v některém menším obdélníku na onen prvek grupoidu $\mathfrak{G}^*$, který jest nad ním, jak jest naznačeno čarami jdoucími od vrcholů menších obdélníků k prvkům grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Množiny bodů uvnitř a na obvodech menších obdélníků jsou prvky faktoroidu na $\mathfrak{G}$, který jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$.



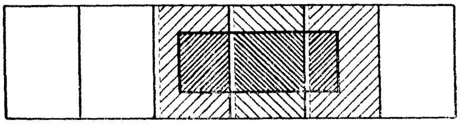
Obr. 7.

Nechť nyní $\overline{\mathfrak{A}}$ značí libovolný faktoroid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}$ libovolný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$. V odst. 8. jsme vyložili, že tato dvojice jednoznačně určuje jednak obal $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a jednak průsek $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ jest podgrupoid v $\overline{\mathfrak{A}}$ a $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ jest faktoroid v $\mathfrak{B}$. Podle definice grupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ má každý prvek $\bar{a} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ a podmnožina B neprázdný průnik $\bar{x} = \bar{a} \cap B$; tento průnik jest prvkem v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Podle definice grupoidu $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ jest každý prvek $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ neprázdným průnikem $\bar{a} \cap B$ jistého prvku $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ a podmnožiny B; prvek $\bar{a}$ jest tedy incidentní s B a jest tedy prvkem v $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ přiřadíme prvek $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, obdržíme jisté zobrazení, označme je $\boldsymbol{i}$, podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ jest isomorfismus. Především snadno zjistíme, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ jest prosté. Je-li totiž některý prvek $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ obrazem v $\boldsymbol{i}$ některých prvků $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$, takže $\bar{x} = \bar{a} \cap B = \bar{b} \cap B$, máme vztahy $\emptyset \neq \bar{x} \subset \bar{a} \cap \bar{b}$ a odtud plyne $\bar{a} = \bar{b}$, neboť dva různé prvky grupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ incidentní nejsou. Dále snadno ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ jest deformace. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$. Nechť $\bar{x} = \boldsymbol{i}\bar{a}$, $\bar{y} = \boldsymbol{i}\bar{b} \in \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, takže $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$. Máme ukázati, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ zachovává násobení v grupoidech $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, t. j. že $\bar{x} \cdot \bar{y} = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b})$. Z rovností $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$ plynou vztahy $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \overline{\mathfrak{A}}$; podle definice násobení v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, $\bar{x} \cdot \bar{y}$ jest prvek v $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ obsahující množinu $\bar{x}\bar{y}$ a podle definice faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ existuje prvek $\bar{c} \in \overline{\mathfrak{A}}$ takový, že $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{c} \cap B$. Vychází tedy $\emptyset \neq \bar{x}\bar{y} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \cap \bar{c}$ a odtud plyne $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, protože dva různé prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ nejsou incidentní. Máme tedy rovnost $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cap B$ a tedy také $\bar{x} \cdot \bar{y} = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b})$. Došli jsme k výsledku, který stručně vyjadřuje t. zv. *druhá věta o isomorfismu grupoidů*:

Obal libovolného podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ v libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ v $\mathfrak{G}$ ($B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$) a průsek faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ jsou isomorfní, t. j. $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \simeq \overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$.

Když zejména faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ jest *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$ jest splněn a z naší věty vyplývá, že *obal libovolného podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ v libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ a průsek faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ jsou isomorfní.*

Obsah druhé věty o isomorfismu grupoidů jest znázorněn na příkladě v obr. 8. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ jest množina všech bodů v nákresné rovině, pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech stejných obdélníků a pole podgrupoidu $\mathfrak{B}$ z bodů uvnitř a na obvodu vnitřního obdélníka. Řídkým a hustým čárkováním jsou vyznačeny prvky obalu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ a průseku $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$. Podle hořejšího výsledku jest zobrazení každého prvku obalu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ na onen prvek průseku $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$, který obsahuje, isomorfismus podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$.



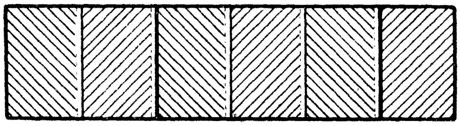
Obr. 8.

Jest ještě jedna důležitá věta o isomorfismu grupoidů a ta se týká zákrytu faktoroidu. Nechť $\overline{\mathfrak{G}}_1$ značí libovolný faktoroid na $\mathfrak{G}$ a $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ libovolný faktoroid na $\overline{\mathfrak{G}}_1$. Jak víme, vynucuje faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ jistý zákryt $\overline{\mathfrak{G}}_2$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$. Připomeňme si, že $\overline{\mathfrak{G}}_2$ jest faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$ a každý jeho prvek jest součtem všech prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$, které jsou obsaženy vždy v témže prvku faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$. Když ke každému prvku $\bar{\bar{a}}_1 \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ přiřadíme onen prvek $\bar{a}_2 \in \overline{\mathfrak{G}}_2$, který jest součtem všech prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ležících v prvku $\bar{\bar{a}}_1$, obdržíme jisté zobrazení, označme je $\boldsymbol{i}$, faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$. Ukážeme, že $\boldsymbol{i}$ jest isomorfismus. Především jest zřejmé, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ jest prosté. Abychom ukázali, že jest deformací, uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{b}}_1 \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ a o součinu $\bar{\bar{c}}_1 \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ prvku $\bar{\bar{a}}_1$ s prvkem $\bar{\bar{b}}_1$! Podle definice násobení faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$, platí pro každý prvek $\bar{a}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$, obsažený v $\bar{\bar{a}}_1$ a každý prvek $\bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$, obsažený v $\bar{\bar{b}}_1$, vztah $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \bar{\bar{c}}_1$. Nechť $\bar{a}_2$ značí onen prvek zákrytu $\overline{\mathfrak{G}}_2$, který jest součtem všech prvků $\bar{a}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ obsažených v $\bar{\bar{a}}_1$, tedy $\bar{a}_2 = \Sigma \bar{a}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1)$ a podobně, nechť $\bar{b}_2 = \Sigma \bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, $\bar{c}_2 = \Sigma \bar{c}_1$ $(\bar{c}_1 \in \bar{\bar{c}}_1)$, takže $\bar{a}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{a}}_1$, $\bar{b}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1$, $\bar{c}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{c}}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_2$. Pak ze vztahu $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \bar{\bar{c}}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$ plyne především $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \subset \bar{c}_2$ a dále $\bar{a}_2 \bar{b}_2 = \Sigma \bar{a}_1 \bar{b}_1 \subset \Sigma \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \subset \bar{c}_2$ a odtud vychází, že $\bar{c}_2$ jest onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_2$, který obsahuje $\bar{a}_2 \bar{b}_2$, takže $\bar{c}_2 = \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2$. Tato rovnost se dá psáti ve tvaru $\boldsymbol{i}\bar{\bar{c}}_1 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{a}}_1 \cdot \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1$ a vyjadřuje, že zobrazení $\boldsymbol{i}$ jest deformace a tedy (protože jest prosté) isomorfismus. Došli jsme k výsledku, který stručně vyjadřuje t. zv. *třetí věta o isomorfismu grupoidů*:

Libovolný faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na nějakém faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ grupoidu $\mathfrak{G}$ a zákryt $\overline{\mathfrak{G}}_2$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ vynucený faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ jsou isomorfní, t. j. $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1 \simeq \overline{\mathfrak{G}}_2$.

Obsah třetí věty o isomorfismu grupoidů jest znázorněn na příkladě v obr. 9. Pole grupoidu $\mathfrak{G}$ jest množina bodů uvnitř a na obvodu velkého obdélníka, pole faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech menších obdélníků a prvky faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ jsou množiny prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ patřící vždy do jednoho obdélníka vyznačeného silnější čarou;

pole zákrytu $\overline{\mathfrak{G}}_2$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ vynuceného faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ se skládá z množin bodů uvnitř a na obvodech těchto obdélníků. Podle hořejšího výsledku jest zobrazení každého prvku $\overline{\overline{a}}_1$ faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_2$, který jest součtem prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ležících v $\overline{\overline{a}}_1$, isomorfismus faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$.



Obr. 9.

Cvičení. 1. Ujasněte si věty o isomorfismu grupoidů na příkladě grupoidů $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_m$, $\overline{\mathfrak{Z}}_n$, $\overline{\overline{\mathfrak{Z}}}_d$, o nichž byla řeč v odst. 8.!

2. Každé dva faktoroidy v libovolném grupoidu $\mathfrak{G}$, takové, že každý prvek jednoho jest incidentní právě jenom s jedním prvkem druhého, jsou isomorfní, při čemž isomorfismus jest dán incidencí prvků.

10. O význačných druzích grupoidů.

Ačkoli některé význačné druhy grupoidů, o kterých pojednáme, jsou charakterisovány zvláštními vlastnostmi násobení a výklad o nich se přimyká k odst. 5., přistoupíme k němu teprve nyní, abychom zdůraznili, že předcházející úvahy platí pro všechny grupoidy bez ohledu na nějaké jejich zvláštní vlastnosti. Pro naše další úvahy jsou důležité zejména grupoidy asociativní a dále t. zv. grupoidy s jednoznačným dělením a grupoidy s jednotkou.

Asociativní grupoidy. Pojem asociativního grupoidu $\mathfrak{G}$ jsme již vymezili v odst. 6., a sice vlastností, že každá uspořádaná trojice prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součin, t. j. že pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$. Asociativní grupoidy se nazývají také *pologrupy*. Nyní ukážeme, že *každý asociativní grupoid* $\mathfrak{G}$ *se vyznačuje tím, že každá uspořádaná skupina několika prvků v* $\mathfrak{G}$ *má jenom jeden součin*, t. j. pro $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ $(n \geq 2)$ značí symbol $a_1 \ldots a_n$ právě jeden prvek v $\mathfrak{G}$. Za tím účelem uvažujme o libovolném asociativním grupoidu $\mathfrak{G}$. K důkazu použijeme metody úplné indukce. Naše tvrzení jest správné když $n = 2$, neboť v tom případě plyne bezprostředně z definice násobení v $\mathfrak{G}$. Zbývá tedy ukázati, že platí-li naše tvrzení o každé uspořádané skupině nejvýše $n - 1$ prvků v $\mathfrak{G}$, kde n značí některé přirozené číslo > 2, pak platí také o každé uspořádané skupině n prvků v $\mathfrak{G}$. Nechť tedy $a_1, \ldots, a_n$ značí libovolné prvky grupoidu $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že každá uspořádaná skupina nejvýše $n - 1$ prvků v $\mathfrak{G}$ má jenom jeden součin. Pak každý symbol

$$a_1,\ a_2 \ldots a_n,\ a_1a_2,\ a_3 \ldots a_n,\ \ldots,\ a_1 \ldots a_{n-1},\ a_n$$

značí zcela určitý prvek grupoidu $\mathfrak{G}$, neboť podle našeho předpokladu