Úvod do teorie grup

8. O faktoroidech

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 36--41.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401367

4. Vzorem grupoidní podmnožiny v $\mathfrak{G}^*$ v nějaké deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí býti podmnožina grupoidní.

5. Každé meromorfní zobrazení na libovolném konečném grupoidu $\mathfrak{G}$ jest automorfismus na $\mathfrak{G}$.

6. Uveďte sami příklady deformace!

8. O faktoroidech.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Deformace $\boldsymbol{d}$, jakožto zobrazení množiny G na G^*, určuje rozklad $\bar{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$, jehož každý prvek $\bar{a}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v obou grupoidech, dá se očekávati, že rozklad $\bar{G}$ jest k násobení v $\mathfrak{G}$ v nějakém vztahu. Uvažujme o libovolných dvou prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}$. Podle definice rozkladu $\bar{G}$ existují prvky a^*, $b^* \in \mathfrak{G}^*$ takové, že $\bar{a}$ $(\bar{b})$ jest množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ prvku a^* (b^*). Všimněme si součinu $\bar{a}\bar{b}$ množiny $\bar{a}$ s množinou $\bar{b}$! Každý prvek $c \in \bar{a}\bar{b}$ jest součin některého prvku $a \in \bar{a}$ s některým prvkem $b \in \bar{b}$ a z rovnosti $\boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = a^*b^*$ vychází, že jest vzorem v $\boldsymbol{d}$ prvku a^*b^*. Tedy jest prvek c obsažen v onom prvku $\bar{c} \in \bar{G}$, který se skládá ze vzorů prvku a^*b^*. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a vidíme, že rozklad $\bar{G}$ má tuto vlastnost: Ke každým dvěma prvkům $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}$ existuje další prvek $\bar{c} \in \bar{G}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Libovolný rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$, $\bar{A}$, který má vlastnost, že ke každým dvěma prvkům $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ existuje další prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, nazveme *vytvořující*. Došli jsme k výsledku, že *rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$ patřící k libovolné deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na jiný grupoid jest vytvořující.*

Pokud jde o vytvořující rozklady *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, všimněme si, že největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou vytvořující. Na každém grupoidu $\mathfrak{G}$ existují tedy alespoň tyto dva krajní vytvořující rozklady.

Popíšeme nyní některé vlastnosti vytvořujících rozkladů.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. *Podmnožina* $\mathrm{s}\bar{A} \subset \mathfrak{G}$, t. j. tedy podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, *jest grupoidní.* Vskutku, k libovolným prvkům $a, b \in \mathrm{s}\bar{A}$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ takové, že $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a odtud vychází $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathrm{s}\bar{A}$, takže ab jest prvkem v $\mathrm{s}\bar{A}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ označujeme symbolem $\mathrm{s}\bar{\mathfrak{A}}$. Jest zřejmé, že $\bar{A}$ jest vytvořující rozklad na podgrupoidu $\mathrm{s}\bar{\mathfrak{A}}$.

Nechť B značí libovolnou grupoidní podmnožinu v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $B \cap \mathrm{s}\bar{A}$ není prázdný. Pak obal $B \sqsubset \bar{A}$ podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ jest rozklad v $\mathfrak{G}$ a podobně průsek $\bar{A} \sqcap B$ rozkladu $\bar{A}$

s podmnožinou B jest rozklad v $\mathfrak{G}$ a dokonce v $s\bar{A}$. Ukážeme, že $B \sqsubset \bar{A}$ *a* $\bar{A} \sqcap B$ *jsou vytvořující rozklady v* $\mathfrak{G}$. Abychom ukázali, že rozklad $B \sqsubset \bar{A}$ jest vytvořující, uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in B \sqsubset \bar{A}$. Podle definice rozkladu $B \sqsubset \bar{A}$, jsou $\bar{a}, \bar{b}$ prvky v $\bar{A}$ a jsou incidentní s podmnožinou B, takže existují prvky $a \in B \cap \bar{a}$, $b \in B \cap \bar{b}$. Prvek ab jest tedy jednak v množině BB a jednak v množině $\bar{a}\bar{b}$. Protože podmnožina B jest grupoidní, jest $BB \subset B$ a protože rozklad $\bar{A}$ jest vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Odtud plyne, že prvek ab jest jednak v B a jednak v $\bar{c}$ a tedy, že prvek $\bar{c}$ jest incidentní s podmnožinou B. Vychází tedy $\bar{c} \in B \sqsubset \bar{A}$ a tím jest dokázáno, že rozklad $B \sqsubset \bar{A}$ jest vytvořující. Nyní ukážeme, že také rozklad $\bar{A} \sqcap B$ jest vytvořující. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap B$. Podle definice rozkladu $\bar{A} \sqcap B$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ takové, že $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$. Množina $\bar{x}\bar{y}$ jest tedy jednak částí množiny $\bar{a}\bar{b}$ a jednak částí množiny BB. Protože rozklad $\bar{A}$ jest vytvořující, existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a protože podmnožina B jest grupoidní, jest $BB \subset B$. Odtud plyne, že $\bar{x}\bar{y}$ jest jednak částí množiny $\bar{c}$ a jednak částí podmnožiny B a tedy $\bar{x}\bar{y} \subset \subset \bar{c} \cap B$. Avšak $\bar{z} = \bar{c} \cap B$ jest prvek v $\bar{A} \sqcap B$ a tedy vychází, že ke každým dvěma prvkům $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A} \sqcap B$ existuje další prvek $\bar{z} \in \bar{A} \sqcap B$ takový, že $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$. Tím jest dokázáno, že rozklad $\bar{A} \sqcap B$ jest vytvořující.

Když zejména $\bar{A}$ jest *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$ jest splněn, neboť pak $s\bar{A} = G \supset B$ a máme $B \cap s\bar{A} = B \neq \emptyset$; $\bar{A} \sqcap B$ jest pak rozklad na B. Každá dvojice skládající se z nějakého vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějaké grupoidní podmnožiny B v $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně dva vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$: $B \sqsubset \bar{A}$, $\bar{A} \sqcap B$; první jest podmnožinou v $\bar{A}$, druhý jest rozkladem na B.

Přistoupíme nyní k definici pojmu faktoroidu, který má v celé další teorii vynikající úlohu. Nechť i nadále $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. K rozkladu $\bar{A}$ můžeme jednoznačně přiřaditi grupoid, který označíme $\bar{\mathfrak{A}}$, definovaný takto: Pole grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ jest vytvořující rozklad $\bar{A}$ a násobení jest dáno pravidlem, že součin libovolného prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ s libovolným prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$ jest onen prvek $\bar{c} \in \bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Píšeme pak zpravidla $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}$, takže znaménka $\cdot$ (tečka nahoře) používáme k označení součinů v grupoidu $\bar{\mathfrak{A}}$ podobně jako používáme znaménka . (tečka dole) k označení součinů v grupoidu $\mathfrak{G}$ a máme $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \cdot \bar{b} \in \bar{\mathfrak{A}}$. Grupoid $\bar{\mathfrak{A}}$ nazýváme *faktoroid* v grupoidu $\mathfrak{G}$ a v případě, že $\bar{A}$ jest *na* grupoidu $\mathfrak{G}$: faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$, anebo faktoroid grupoidu $\mathfrak{G}$. Každý vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$ určuje tedy jednoznačně jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$ a sice onen, jehož polem jest; pravíme, že ke každému vytvořujícímu rozkladu v $\mathfrak{G}$ *přísluší* anebo *patří* jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$. Všimněme si, že na grupoidu $\mathfrak{G}$ existují alespoň dva faktoroidy: T. zv. *největší* faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$, který přísluší k největšímu vytvořujícímu rozkladu $\overline{G}_{\max}$ a *nejmenší* faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$, příslušný k nejmenšímu vytvořujícímu rozkladu $\overline{G}_{\min}$ grupoidu $\mathfrak{G}$.

Uvažujme na př. o grupoidu $\mathfrak{Z}$! Nechť n značí libovolné přirozené číslo a nechť $\bar{a}_i$, kde i jest libovolné číslo $0, \ldots, n-1$, značí množinu všech prvků v $\mathfrak{Z}$, které při dělení číslem n dají zbytek i. Množiny $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ jsou tedy tyto:

$$\begin{array}{llllll}
\bar{a}_0 = \{\ldots, -2n, & -n, & 0, & n, & 2n, & \ldots\}, \\
\bar{a}_1 = \{\ldots, -2n+1, & -n+1, & 1, & n+1, & 2n+1, & \ldots\}, \\
\bar{a}_2 = \{\ldots, -2n+2, & -n+2, & 2, & n+2, & 2n+2, & \ldots\}, \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
\bar{a}_{n-1} = \{\ldots, -2n+\overline{n-1}, & -n+\overline{n-1}, & n-1, & n+\overline{n-1}, & 2n+\overline{n-1}, & \ldots\}.
\end{array}$$

Vidíme, že systém $\{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}\}$ jest rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$; označíme jej $\overline{Z}_n$. Snadno ukážeme, že $\overline{Z}_n$ jest vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{Z}$. Za tím účelem zjistíme, že součin libovolného prvku $\bar{a}_i \in \overline{Z}_n$ s libovolným prvkem $\bar{a}_j \in \overline{Z}_n$ jest částí některého dalšího prvku $\bar{a}_k \in \overline{Z}_n$. Podle své definice skládá se množina $\bar{a}_i\bar{a}_j$ ze součinů $a.b$ každého prvku $a \in \bar{a}_i$ s každým prvkem $b \in \bar{a}_j$. Nechť tedy $a\,(b)$ značí libovolný prvek v $\bar{a}_i\,(\bar{a}_j)$, takže zbytek dělení čísla $a\,(b)$ číslem n jest $i\,(j)$. Podle definice násobení grupoidu $\mathfrak{Z}$ jest $a.b$ číslo $a+b$ a toto jest v množině $\bar{a}_k$, kde k značí zbytek dělení čísla $i+j$ číslem n, neboť čísla $a+b$ a $i+j$ mají při dělení číslem n stejné zbytky. Vychází tedy $\bar{a}_i\bar{a}_j \subset \bar{a}_k$ a tím jest dokázáno, že rozklad $\overline{Z}_n$ jest vytvořující. Příslušný faktoroid $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ se tedy skládá z n prvků $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ a jeho násobení jest definováno pravidlem, že součin $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j$ jest prvek $\bar{a}_k$, při čemž k jest zbytek dělení čísla $i+j$ číslem n. Jest zřejmé, že $\overline{\mathfrak{Z}}_1$ jest největší faktoroid na $\mathfrak{Z}$.

Nechť $\overline{\mathfrak{A}}$ značí libovolný faktoroid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{B}$ libovolný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $B \cap \mathsf{s}\overline{A} \neq \emptyset$. Výše jsme viděli, že $B \sqsubset \overline{A}$, $\overline{A} \sqcap B$ jsou vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$. Faktoroid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k vytvořujícímu rozkladu $B \sqsubset \overline{A}$ nazýváme *obal* podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a značíme $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ anebo $\overline{\mathfrak{A}} \sqsupset \mathfrak{B}$; faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $\overline{A} \sqcap B$ nazýváme *průsek* faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$, anebo podgrupoidu $\mathfrak{B}$ s faktoroidem $\overline{\mathfrak{A}}$, a označujeme $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B} \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$. Zřejmě jest $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ podgrupoid ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ jest faktoroid v podgrupoidu $\mathfrak{B}$. Když zejména $\overline{\mathfrak{A}}$ jest *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, pak hořejší předpoklad $B \cap \mathsf{s}\overline{A} \neq \emptyset$ jest splněn a $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ jest faktoroid na podgrupoidu $\mathfrak{B}$. Každá dvojice skládající se z nějakého faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ a z nějakého podgrupoidu $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$, určuje tedy jednoznačně další dvojici, která se skládá z podgrupoidu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ v $\overline{\mathfrak{A}}$ a z faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ na $\mathfrak{B}$.

Abychom tyto pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$ ($n \geq 1$). Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla m a abychom náš příklad zjednodušili, předpokládejme, že největší společná míra čísel m, n jest 1, t. j., jak říkáme, že čísla m, n jsou nesoudělná. Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$? Uvažme, které z prvků $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jsou incidentní s podgrupoidem $\mathfrak{A}_m$. Libovolný prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jest incidentní s $\mathfrak{A}_m$, když a jen když v něm existuje nějaký celý násobek xm čísla m (x celé číslo). Protože každý prvek v $\bar{a}_i$ má tvar $yn + i$, kde také y značí celé číslo, vidíme, že prvek $\bar{a}_i$ jest incidentní s $\mathfrak{A}_m$ když a jen když rovnice $xm = yn + i$ a tedy také rovnice $xm - yn = i$, má řešení v celých číslech x, y. Protože největší společná míra čísel m, n jest 1, existují celá čísla a, b hovící rovnici $am - bn = 1$.*) Odtud plyne, že pro každé číslo $i = 0, \ldots, n - 1$ má rovnice $xm - yn = i$ řešení v celých číslech a sice $x = ai$, $y = bi$ a tím jest ukázáno, že každý prvek $\bar{a}_i \in \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jest incidentní s $\mathfrak{A}_m$. Vychází tedy, že faktoroid $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n$ jest identický s $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ a prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ jsou množiny skládající se ze všech celých násobků čísla m obsažených v jednotlivých prvcích $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{Z}}_n$.

Nechť nyní $\bar{\mathfrak{G}}_1$ značí nějaký faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}$ a uvažujme o nějakém rozkladu $\bar{\bar{G}}_1$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}_1$. Každý prvek v $\bar{\bar{G}}_1$ jest tedy systém podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou prvky faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}_1$. Když utvoříme součet všech prvků faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}_1$, které jsou vždy v témže prvku rozkladu $\bar{\bar{G}}_1$, obdržíme jistý rozklad $\bar{G}_2$ grupoidu $\mathfrak{G}$. Podle názvů vyložených v odst. 2., jest $\bar{G}_2$ zákryt vytvořujícího rozkladu $\bar{G}_1$ (pole faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}_1$) vynucený rozkladem $\bar{\bar{G}}_1$. Otázka, kterou nyní rozhodneme jest tato: Když $\bar{\bar{G}}_1$ jest vytvořující rozklad faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}_1$, jest pak $\bar{G}_2$ vytvořující rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$? Snadno ukážeme, že ano. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{a}_2, \bar{b}_2 \in \bar{G}_2$. Podle definice rozkladu $\bar{G}_2$ jest prvek $\bar{a}_2$ ($\bar{b}_2$) součtem všech prvků $\bar{a}_1 \in \bar{\mathfrak{G}}_1$ ($\bar{b}_1 \in \bar{\mathfrak{G}}_1$) obsažených v jistém prvku $\bar{\bar{a}}_1$ ($\bar{\bar{b}}_1$) rozkladu $\bar{\bar{G}}_1$; odtud plyne, že $\bar{a}_2\bar{b}_2$ jest součet součinů $\bar{a}_1\bar{b}_1$ každé množiny $\bar{a}_1$, která jest prvkem v $\bar{\bar{a}}_1$ s každou množinou $\bar{b}_1$, která jest prvkem v $\bar{\bar{b}}_1$. Tyto skutečnosti můžeme symbolicky vyjádřiti takto:

*) Nechť m, n značí libovolná přirozená čísla a d jejich největší společnou míru. Ze střední školy víme, že po jistém počtu k dělení, která provádíme podle tohoto schematu:

$$m = q_1 n + r_1,\ n = q_2 r_1 + r_2,\ r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ \ldots,\ r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k,$$

při čemž $q_1, \ldots, q_k$ značí podíly a $r_1, \ldots, r_k$ zbytky dělení, přijdeme ku zbytku $r_k = 0$ a pak číslo r_{k-1} ($r_0 = n$) jest největší společná míra d. Z těchto rovnic vidíme, že každé číslo r_j, $0 \leq j \leq k - 1$, se dá psáti ve tvaru $a_j m - b_j n$, kde a_j, b_j značí jistá celá čísla (na př. $r_0 = 0 \cdot m - (-1)n$, $r_1 = 1 \cdot m - q_1 n$, $r_2 = (-q_2) m - (-1 - q_1 q_2) n$, atd.); odtud plyne, že existují celá čísla a, b hovící rovnici $am - bn = d$ a sice $a = a_{k-1}$, $b = b_{k-1}$. Všimněme si, že také rovnice $am + bn = d$ má řešení v celých číslech a, b a sice $a = a_{k-1}$, $b = -b_{k-1}$.

$\bar{a}_2 = \Sigma \bar{a}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1)$, $\bar{b}_2 = \Sigma \bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, $\bar{a}_2 \bar{b}_2 = \Sigma \bar{a}_1 \bar{b}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$. Podle definice násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ máme pro každý takový součin $\bar{a}_1 \bar{b}_1$ vztah $\bar{a}_1 \bar{b}_1 \subset \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ a odtud plyne $\bar{a}_2 \bar{b}_2 \subset \Sigma \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$. Když rozklad $\overline{\overline{G}}_1$ jest vytvořující, existuje prvek $\bar{\bar{c}}_1 \in \overline{\overline{G}}_1$ takový, že $\bar{\bar{a}}_1 \cdot \bar{\bar{b}}_1 \subset \bar{\bar{c}}_1$, t. j. takový, že součin $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1$ každého prvku $\bar{a}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$, který jest v $\bar{\bar{a}}_1$, s každým prvkem $\bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$, který jest v $\bar{\bar{b}}_1$, jest prvkem množiny $\bar{\bar{c}}_1$. Označíme-li tedy písmenem $\bar{c}_2$ onen prvek v $\overline{G}_2$, který jest součtem všech prvků v $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ležících v $\bar{\bar{c}}_1$, máme $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \subset \bar{c}_2$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$ a tedy také $\bar{a}_2 \bar{b}_2 \subset \Sigma \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \subset \bar{c}_2$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$. Vychází tedy $\bar{a}_2 \bar{b}_2 \subset \bar{c}_2$ a tím jest dokázáno, že rozklad $\overline{G}_2$ jest vytvořující.

Naopak, jak nyní ukážeme, platí také tato věta: Když rozklad $\overline{G}_2$ grupoidu $\mathfrak{G}$ jest vytvořující, pak totéž platí o rozkladu $\overline{\overline{G}}_1$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$. Za tím účelem předpokládejme, že rozklad $\overline{G}_2$ grupoidu $\mathfrak{G}$ jest vytvořující a uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{b}}_1 \in \overline{\overline{G}}_1$. Podle definice rozkladu $\overline{G}_2$ jsou $\bar{a}_2 = \Sigma \bar{a}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1)$, $\bar{b}_2 = \Sigma \bar{b}_1$ $(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$ prvky rozkladu $\overline{G}_2$ a protože rozklad $\overline{G}_2$ jest vytvořující, existuje prvek $\bar{c}_2 \in \overline{G}_2$ takový, že $\bar{a}_2 \bar{b}_2 \subset \bar{c}_2$; podle definice rozkladu $\overline{G}_2$, jest prvek $\bar{c}_2$ součtem všech prvků $\bar{c}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ obsažených v jistém prvku $\bar{\bar{c}}_1 \in \overline{\overline{G}}_1$, takže $\bar{c}_2 = \Sigma \bar{c}_1$ $(\bar{c}_1 \in \bar{\bar{c}}_1)$. Ukážeme-li, že pro $\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1$, $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$ jest prvek $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ obsažen v $\bar{\bar{c}}_1$, ukážeme tím, že platí vztah $\bar{\bar{a}}_1 \cdot \bar{\bar{b}}_1 \subset \bar{\bar{c}}_1$ a bude zjištěno, že rozklad $\overline{\overline{G}}_1$ jest vytvořující. Za tím účelem uvažme, že pro $\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1$, $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$ jednak platí vztahy $\bar{a}_1 \bar{b}_1 \subset \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ a jednak $\bar{a}_1 \bar{b}_1 \subset \bar{a}_2 \bar{b}_2 \subset \bar{c}_2 = \Sigma \bar{c}_1$ $(\bar{c}_1 \in \bar{\bar{c}}_1)$, takže množina $\bar{a}_1 \bar{b}_1$ jest jednak částí prvku $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ a jednak částí součtu všech prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ obsažených v $\bar{\bar{c}}_1$. Odtud plyne, že prvek $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ jest incidentní s některými prvky $\bar{c}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ obsaženými v $\bar{\bar{c}}_1$ a tedy jest identický s některým prvkem $\bar{c}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_1$ obsaženým v $\bar{\bar{c}}_1$, neboť dva různé prvky faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ incidentní nejsou. Tím jest zjištěno, že platí vztah $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \in \bar{\bar{c}}_1$ $(\bar{a}_1 \in \bar{\bar{a}}_1, \bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$ a důkaz jest proveden.

Vidíme tedy, že *oba rozklady* $\overline{\overline{G}}_1, \overline{G}_2$ *jsou vytvořující současně*, t. j. když jeden z nich jest vytvořující, pak jest také druhý. Když jsou vytvořující, pak k rozkladu $\overline{\overline{G}}_1$ přísluší jistý faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ na faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ a podobně k rozkladu $\overline{G}_2$ přísluší jistý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$ na grupoidu $\mathfrak{G}$. Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_2$ se nazývá *zákryt* faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ *vynucený* faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_1$ a faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_1$ se nazývá *zjemnění* faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_2$; označení $\overline{\mathfrak{G}}_2 \geqq \overline{\mathfrak{G}}_1$ anebo $\overline{\mathfrak{G}}_1 \leqq \overline{\mathfrak{G}}_2$. Každý faktoroid na libovolném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ grupoidu $\mathfrak{G}$ vynucuje tedy jistý zákryt faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ a naopak, každý zákryt faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ jest vynucen jistým faktoroidem na $\overline{\mathfrak{G}}_1$. Zřejmě platí vztahy $\overline{\mathfrak{G}}_{\max} \geqq \overline{\mathfrak{G}}_1 \geqq \overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ pro každý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_1$ na grupoidu $\mathfrak{G}$.

Abychom tyto pojmy objasnili na příkladě, uvažujme opět o faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ na grupoidu $\mathfrak{Z}$! Předpokládejme, že číslo n jest větší než 1 a že není prvočíslo. Pak existuje nějaký dělitel $(1 <) \, d \, (< n)$ čísla n a máme

$n = qd$, kde q značí další přirozené číslo a sice $1 < q < n$. Uvažujme nyní o rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$, jehož prvky jsou tyto:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{a}}_0 &= \{\bar{a}_0, \quad \bar{a}_d, \quad \bar{a}_{2d} \quad \ldots, \bar{a}_{(q-1)d}\},\\
\bar{\bar{a}}_1 &= \{\bar{a}_1, \quad \bar{a}_{d+1}, \quad \bar{a}_{2d+1} \quad \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+1}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\bar{a}}_{d-1} &= \{\bar{a}_{d-1}, \bar{a}_{d+d-1}, \bar{a}_{2d+d-1}, \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+d-1}\},
\end{aligned}$$

takže libovolný prvek $\bar{\bar{a}}_i$ $(i = 0, \ldots, d-1)$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ se skládá z těch prvků faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$, jejichž indexy dají dělením číslem d zbytek i. Ukažme, že rozklad $\bar{\bar{Z}}_d$ jest vytvořující. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}_i$, $\bar{\bar{a}}_j$ rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$ a ukažme, že platí vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$, kde k jest zbytek dělení čísla $i + j$ číslem d. Nechť $\bar{a}_\alpha$ značí libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_i$, $\bar{a}_\beta$ libovolný prvek v $\bar{\bar{a}}_j$, takže α dá dělením číslem d zbytek i a β zbytek j; čísla $\alpha + \beta$, $i + j$ liší se tedy jenom o celý násobek čísla d. Podle definice násobení faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ jest $\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma$, kde γ jest zbytek dělení čísla $\alpha + \beta$ číslem n. Protože d jest dělitelem čísla n, liší se čísla $\alpha + \beta$, γ a tedy i čísla $i + j$, γ jenom o celý násobek čísla d; číslo γ má tedy při dělení číslem d zbytek k. Odtud vychází $\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma \in \bar{\bar{a}}_k$ a tím jest zjištěn zmíněný vztah $\bar{\bar{a}}_i \,.\, \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$. Zákryt faktoroidu $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$, příslušným k vytvořujícímu rozkladu $\bar{\bar{Z}}_d$, skládá se z d prvků

$$\{\ldots, -n + i, -n + d + i, \ldots, -n + (q-1)\, d + i, i, d + i, \ldots, \\ (q-1)\, d + i, n + i, n + d + i, \ldots, n + (q-1)\, d + i, \ldots\},$$

při čemž i značí vždy jedno číslo $0, \ldots, d-1$.

Cvičení. 1. Ukažte, že grupoidy $\mathfrak{Z}_n$, $\overline{\mathfrak{Z}}_n$ $(n \geq 1)$ jsou isomorfní.

2. Nechť $\mathfrak{A}_m$ značí podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, jehož pole se skládá ze všech celých násobků nějakého přirozeného čísla $m > 1$. Z kterých prvků se skládají faktoroidy $\mathfrak{A}_m \sqsubset \overline{\mathfrak{Z}}_n$ a $\overline{\mathfrak{Z}}_n \sqcap \mathfrak{A}_m$ $(n > 1)$, když m, n nejsou nesoudělná?

3. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel s výjimkou těch, jejichž číslice v desítkové soustavě obsahují 0 a jehož násobení jest definováno takto: Pro $a, b \in \mathfrak{G}$ jest součin ab číslo dané v desítkové soustavě číslicí $a_1 \ldots a_\alpha b_1 \ldots b_\beta$, při čemž $a_1 \ldots a_\alpha$ $(b_1 \ldots b_\beta)$ jest číslice v desítkové soustavě čísla $a\,(b)$. Tedy na př. $14.23 = 1423$. Ukažte, že 1. grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní, 2. rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$, jehož prvky jsou množiny všech čísel v $\mathfrak{G}$, která jsou v desítkové soustavě dána číslicemi vždy o stejném počtu cifer, jest vytvořující.

4. Každý faktoroid na nějakém abelovském (asociativním) grupoidu jest abelovský (asociativní).

5. Když nějaký grupoid $\mathfrak{G}$ obsahuje prvek a takový, že $aa = a$, t. zv. *rovnomocný* anebo *idempotentní* prvek, pak onen prvek libovolného faktoroidu v $\mathfrak{G}$, který obsahuje prvek a, jest rovněž rovnomocný.