Úvod do teorie grup

1. Základní pojmy o množinách

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 3--6.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401360

I. Množiny.

1. Základní pojmy o množinách.

V matematickém názvosloví užíváme slova *množina* náhradou za slovo množství, které má v šesti různých pádech stejnou koncovku a proto jest po jazykové stránce méně vhodné. V naší matematické literatuře slovo množina zdomácnělo a označuje jeden z nejdůležitějších pojmů; z toho důvodu se zdá jeho přijetí do oficiálního slovníku českého jazyka jenom otázkou času.

Množinou rozumíme souhrn nějakých věcí, které nazýváme *prvky* množiny. Každá množina jest svými prvky jednoznačně určena; když dvě množiny A, B mají tytéž prvky, nazýváme je *identické* anebo *rovné* a píšeme $A = B$, kdežto v opačném případě je nazýváme *různé* a píšeme $A \neq B$. Příklady množin jsou: [1] množina skládající se z následujícího znaku: a [2] množina slov otištěných v této knížce [3] množina všech přirozených čísel $1, 2, 3, \ldots$ V našich úvahách budeme často jednati o množinách množin, t. j. o množinách, jejichž prvky jsou opět množiny; z jazykových důvodů říkáme raději *systém množin* místo množina množin. Příkladem jest [4] množina, jejíž prvky jsou množiny přirozených čísel, z nichž jedna se skládá ze všech prvočísel $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, další ze všech součinů vždy dvou prvočísel, další ze všech součinů vždy tří prvočísel, atd.

Nejčastějším obsahem našich úvah bude zkoumání vztahů mezi množinami a jejich prvky. Někdy bude účelné některé množiny a prvky od ostatních odlišiti a pak si je pojmenujeme. K tomu si stanovíme povšechnou směrnici, že množiny budeme zpravidla označovati velkými latinskými písmeny, na př. A, a prvky množin latinskými písmeny malými, na př. a. V případě systémů množin vede toto pravidlo k označování jak systémů množin tak i jejich prvků velkými latinskými písmeny a proto se od něho odchýlíme; systémy množin budeme označovati velkými latinskými písmeny s pruhem, na př. $\bar{A}$, a jejich prvky, tedy opět množiny, malými latinskými písmeny s pruhem, na př. $\bar{a}$.

Pro některé pojmy a výroky, které se v našich úvahách vyskytnou, zavedeme vhodné názvy a symboly. Všeobecně řečeno, mohou se matematické spisy bez takových pomůcek obejíti jenom stěží, ale doporučuje se názvy a symboly zaváděti s rozumem. Ostatně ani v denním životě nemáme na př. pro zetě syna bratrance nevlastní matky zvláštního názvu, kdežto symbolu m k označení metru užíváme napořád.

Když a, b značí tutéž věc, píšeme $a = b$, kdežto opačný případ vyjadřujeme symbolem $a \neq b$. Když nějaká věc a jest prvkem množiny A, píšeme $a \in A$. Když nějaká množina A jest souhrn věcí, které jsme označili $a, b, c, \ldots$, píšeme $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Na př. jest $\{a\}$ symbol hořejší množiny [1] a $\{1, 2, 3, \ldots\}$ jest symbol množiny [3]. Také si jednou provždy stanovíme, že se zavedených názvů nebudeme držeti vždycky doslovně, nýbrž přihlížejíce k duchu jazyka si dovolíme odchylky, pokud ovšem nebudou na újmu přesnosti výkladu. Tak na př. místo „množina A jest souhrn prvků $a, b, c, \ldots$" můžeme říci „množina A se skládá z prvků $a, b, c, \ldots$" anebo „množina A má prvky $a, b, c, \ldots$"; místo „a jest prvek množiny A" můžeme říci „a jest prvek v množině A" anebo „a patří do množiny A", atp.

Jako množinu zavádíme také t. zv. *prázdnou* množinu, která jest charakterisována vlastností, že nemá vůbec žádných prvků. Protože každá množina jest svými prvky jednoznačně určena, jest jenom jedna prázdná množina. Budeme ji označovati symbolem $\emptyset$. Při další četbě poznáme, že zavedení pojmu prázdné množiny jest výhodné při formulaci úvah.

Každá množina, jejíž prvky jsou nějaké symboly, na př. písmena, jejichž význam není blíže vymezen, nazývá se *abstraktní*; na př. hořejší množina [1] jest abstraktní. Každá množina, která se skládá jenom z konečného počtu prvků, nazývá se *konečná*, kdežto v opačném případě *nekonečná*; na př. jsou množiny [1], [2] konečné, kdežto množiny [3], [4] jsou nekonečné. *Řádem* libovolné konečné neprázdné množiny rozumíme počet jejích prvků; dále jest pro náš účel vhodné přisouditi každé nekonečné množině řád 0. Prázdné množině řád nepřisuzujeme.

Nechť A, B značí nějaké množiny. Když každý prvek v A jest současně prvkem v B pravíme, že A jest *podmnožina* v B anebo B jest *nadmnožina* na A. Někdy tento vztah vyjadřujeme také tím, že A jest *část* množiny B anebo B *obsahuje* množinu A. Píšeme pak $A \subset B$ anebo $B \supset A$. Když $A \subset B$, množina B může ale nemusí obsahovati prvky, které do A nepatří. Obsahuje-li B alespoň jeden prvek, který nepatří do A, vyjadřujeme tuto okolnost přívlastkem *vlastní* a říkáme, že A jest vlastní podmnožina v B anebo, že B jest vlastní nadmnožina na A. Na př. množina všech prvočísel jest vlastní podmnožina v množině [3], neboť každé prvočíslo jest prvkem množiny [3] a tato množina obsahuje také čísla, jako na př. číslo 4, která prvočísla nejsou. Když A jest podmnožina v B, ale nikoli vlastní, pak nejenom jest každý prvek v A také prvkem v B, nýbrž i každý prvek v B jest prvkem v A, t. j. platí současně oba vztahy $A \subset B$, $B \subset A$; jest zřejmé, že tyto vztahy dohromady vyjadřují rovnost $A = B$.

Vidíme, že každá podmnožina v B jest buď vlastní anebo jest identická s B. Při této příležitosti si všimněme, že rovnost $A = B$ jest ekvivalentní se vztahy $A \subset B$, $B \subset A$ a sice v tom smyslu, že když platí, pak platí současně tyto vztahy a naopak. Nejčastěji seznáme rovnost dvou množin právě tím způsobem, že o každé z nich zjistíme, že jest podmnožinou v druhé.

Součtem množin A, B rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich. Protože touto definicí jsou vymezeny všechny prvky, které patří do součtu množin A, B a protože každá množina jest svými prvky jednoznačně určena, jest jenom jeden součet množin A, B; označujeme jej symbolem $A \vee B$ anebo $B \vee A$. Z naší definice plyne, že každá z obou množin A, B jest podmnožinou v $A \vee B$, neboť skutečně každý prvek na př. množiny A patří alespoň do jedné z množin A, B a sice do A; můžeme tedy psáti $A \subset A \vee B$, $B \subset A \vee B$. Na př. součet množiny všech kladných sudých čísel a množiny všech kladných lichých čísel jest množina [3] : $\{2, 4, 6, \ldots\} \vee \{1, 3, 5, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; součet množiny skládající se z jediného slova a a množiny [2] jest opět množina [2]. Pojem součtu dvou množin se dá snadno rozšířiti na pojem součtu systému množin: Součtem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$. Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden součet a že každá množina, která jest prvkem systému $\bar{A}$, jest podmnožinou v součtu systému $\bar{A}$. Součet systému $\bar{A}$ označujeme zpravidla symbolem $s\bar{A}$ a jestliže jsme prvky systému $\bar{A}$ označili písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, označujeme jej symbolem $\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \ldots$, stručněji $\Sigma\bar{a}$, anebo podobně, jak vždycky bude z výkladu patrno.

Průnikem množin A, B rozumíme množinu všech prvků, které patří do obou množin A, B. Podobně jako u součtu zjistíme, že jest jenom jeden průnik množin A, B a označujeme jej symbolem $A \cap B$ anebo $B \cap A$. Z naší definice plyne, že $A \cap B$ jest částí každé z obou množin A, B, neboť každý prvek v $A \cap B$ patří na př. do množiny A. Všimněme si, že i když množiny A, B nemají společných prvků, má definice průniku množin A, B smysl a sice jest v tom případě $A \cap B$ prázdná množina. Zde již poznáváme, že zavedení pojmu prázdné množiny jest výhodné, neboť jinak mohli bychom mluviti o průniku jenom u některých množin. Přesto jest účelné, abychom měli zvláštní název pro množiny, které mají společné prvky a pro množiny, které jich nemají. Mají-li množiny A, B společné prvky, nazývají se *incidentní*, kdežto v opačném případě se nazývají *disjunktní*; první případ jest charakterisován nerovností $A \cap B \neq \emptyset$, kdežto druhý rovností $A \cap B = \emptyset$. Příkladem incidentních množin jest množina skládající se z jediného slova a a množina [2], jejichž průnikem jest první množina; příkladem disjunktních množin jest množina všech kladných sudých čísel a množina všech kladných lichých čísel, jejichž průnik jest zřejmě $\emptyset$. Pojem průniku dvou množin se dá opět rozšířiti na pojem průniku systému množin: Průnikem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří do každé z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$. Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden průnik a že tento průnik jest podmnožinou v každém prvku systému $\bar{A}$. Průnik systému $\bar{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{p}\bar{A}$ a v případě, že jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, symbolem $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{a}$, atp.

Cvičení. 1. $A \vee \emptyset = A$; $A \vee A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.

2. $A \vee (A \cap B) = A$; $A \cap (A \vee B) = A$.

3. Když $A \subset B$, pak $A \vee B = B$, $A \cap B = A$; naopak, když platí jedna z těchto rovností, pak $A \subset B$.

4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

5. $(A \vee B) \cap C = (A \cap C) \vee (B \cap C)$; $(A \cap B) \vee C = (A \vee C) \cap (B \vee C)$.

6. Když množina A má konečný počet $n \geqq 0$ prvků, pak má 2^n podmnožin.

2. O rozkladech v množinách.

Nechť G značí (všude v této knížce) libovolnou neprázdnou množinu. *Rozkladem* v G rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní. Pojem rozkladu v množině jest jedním z nejdůležitějších a snad i nejsložitějším pojmem, které se v této knížce vyskytují a proto doporučujeme, aby si jej čtenář dobře osvojil. Podle definice má tedy každý rozklad v G alespoň jeden prvek, každý prvek rozkladu jest neprázdná podmnožina v G a zejména si zapamatujme, že průnik každých dvou prvků rozkladu jest prázdná množina. Jednoduchým příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel jest systém skládající se z jednoho prvku, jímž jest množina všech kladných sudých čísel. Obecněji jest příkladem rozkladu v G systém skládající se z jednoho prvku, jímž jest libovolná neprázdná podmnožina v G. Systém množin [4] na str. 3. jest příkladem rozkladu v množině všech přirozených čísel $\geqq 2$.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad v G. Libovolný prvek v G může býti nejvýše v jednom prvku rozkladu $\bar{A}$, protože každé dva prvky v $\bar{A}$ jsou disjunktní; může se ovšem státi, že není vůbec v žádném prvku rozkladu $\bar{A}$. Když však rozklad $\bar{A}$ jest takový, že každý prvek v G jest v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, pak pravíme, že rozklad $\bar{A}$ *pokrývá* množinu G, nebo že jest *na* množině G anebo že jest rozkladem množiny G. Je-li tedy $\bar{A}$ rozklad množiny G, existuje ke každému prvku $a \in G$ prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že $a \in \bar{a}$. Na př. v hořejších příkladech jest poslední příkla-