18. Normální soustava vektorů

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971.
pp. 125--136.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401347

18. NORMÁLNÍ SOUSTAVA VEKTORŮ

18.1. Definice vektoru řádu k. Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná čtvercová matice stupně n.

Vektor $\boldsymbol{x}$, který se lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}^k$ transformuje v nulový vektor $\boldsymbol{0}$, kdežto lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}^{k-1}$ v nenulový vektor, přičemž $k \geqq 1$, nazýváme *vektor řádu* k *matice* $\boldsymbol{A}$ (stručněji: *vektor řádu* k).

Pro vektor $\boldsymbol{x}$ řádu k $(\geqq 1)$ tedy platí vztahy

$$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\,.$$

18.2. Úmluva. O matici $\boldsymbol{A}$ stupně n budeme předpokládat, že má α-násobný charakteristický kořen 0, kde $\alpha \geqq 1$, a že

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r > 0$$

jsou charakteristická čísla příslušná ke kořenu 0.

Jak víme, mají matice

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \ldots, \boldsymbol{A}^r$$

nulity

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \alpha\,,$$

přičemž všechny další mocniny matice $\boldsymbol{A}$ mají stále nulitu α.

V dalších úvahách opět položíme

$$\text{nul}\, \boldsymbol{A}^k = \gamma_k\,,$$

přičemž pro $1 \leqq k \leqq r$ platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \gamma_k\,.$$

18.3. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{A}$ splňuje předpoklady odst. 18.2.

Nechť $1 \leqq k \leqq r$. Pak existuje α_k vektorů

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_k},$$

které se vyznačují tím, že vektory

$$\begin{array}{lllll}
(1) & \mathbf{x}_1, & \mathbf{x}_2, & \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_k} & \text{jsou řádu } k\,, \\
(2) & \mathbf{A}\mathbf{x}_1, & \mathbf{A}\mathbf{x}_2, & \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_{\alpha_k} & \text{jsou řádu } k-1\,, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(k) & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_1, & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_2, & \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_{\alpha_k} & \text{jsou řádu } 1\,,
\end{array}$$

přičemž všechny uvedené vektory jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Protože $\gamma_k = \text{nul } \mathbf{A}^k$, existuje γ_k nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^k$ transformují v nulový vektor, např. vektory

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2. \ldots, \mathbf{x}_{\gamma_k}. \tag{87}$$

Označme pro $m = 1, 2, \ldots, \gamma_k$ vektory

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m^1, \mathbf{A}\mathbf{x}_m^1 = \mathbf{x}_m^2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_m^k = \mathbf{x}_m^{k+1}, \tag{88}$$

takže je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_m^1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_m, \\
\mathbf{x}_m^2 &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_m, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{x}_m^{k-1} &= \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_m, \\
\mathbf{x}_m^k &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}_m = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Vezměme v úvahu vektory

$$\mathbf{x}_1^{k-1}, \mathbf{x}_2^{k-1}, \ldots, \mathbf{x}_{\gamma_k}^{k-1}. \tag{90}$$

Jsou-li tyto vektory vesměs nulové, plyne z předposlední rovnosti (89), že se vektory (87) transformují v nulové vektory lineární substitucí o matici $\mathbf{A}^{k-1}$. Tato matice má nulitu rovnou γ_{k-1}, takže největší počet nezávislých vektorů, které transformací o matici $\mathbf{A}^{k-1}$ přejdou v nulový vektor, je roven γ_{k-1}. Protože $\gamma_k > \gamma_{k-1}$, došli jsme ke sporu. Odtud soudíme, že mezi vektory (90) je aspoň jeden nenulový.

Nechť $h(\geqq 1)$ značí největší počet vektorů (90), které jsou nezávislé, a nechť jsou označeny tak, že jsou to právě vektory

$$\boldsymbol{x}_1^{k-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_h^{k-1}. \tag{91}$$

Pak každý vektor (90) je lineární kombinací vektorů (91), takže je

$$\boldsymbol{x}_m^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} \boldsymbol{x}_\nu^{k-1}$$

neboli

$$\boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{x}_m = \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{x}_\nu ,$$

kde $a_{m\nu}$ jsou vhodné konstanty. Poslední rovnost můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{A}^{k-1}[\boldsymbol{x}_m - \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} \boldsymbol{x}_\nu] = \boldsymbol{0} .$$

Odtud vidíme, že všechny vektory

$$\boldsymbol{x}_m - \sum_{\nu=1}^{h} a_{m\nu} \boldsymbol{x}_\nu$$

jsou lineárními kombinacemi vhodných, pro všechny vektory týchž nezávislých vektorů v počtu γ_{k-1}, neboť nul $\boldsymbol{A}^{k-1} = \gamma_{k-1}$. Odtud pak plyne dále, že všechny vektory (87) jsou lineárními kombinacemi těchto nezávislých vektorů (v počtu γ_{k-1}) a vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_h$, v počtu h, tedy celkem $h + \gamma_{k-1}$ vektorů.

Protože vektory (87) jsou nezávislé a je jich γ_k, máme

$$\gamma_k \leqq \gamma_{k-1} + h$$

neboli

$$h \geqq \gamma_k - \gamma_{k-1} = \alpha_k .$$

Tím jsme zjistili, že vektory

$$\boldsymbol{x}_1^{k-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_k}^{k-1} \tag{92}$$

jsou lineárně nezávislé.

Nyní ukážeme, že pro $\mu = 0, 1, \ldots, k - 1$ jsou vektory

$$\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_2, \ldots,\ \boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_{\alpha_k}$$

vektory řádu $k - \mu$.

Nuže, pro $\beta = 1, 2, \ldots, \alpha_k$ platí vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{k-\mu}(\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_\beta) &= \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}_\beta = \boldsymbol{0}\,, \\ \boldsymbol{A}^{k-\mu-1}(\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_\beta) &= \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{x}_\beta = \boldsymbol{x}_\beta^{k-1} \neq \boldsymbol{0}\,, \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Zbývá zjistit, že pro $\mu = 0, 1, \ldots, k - 1$ a pro $\beta = 1, 2, \ldots, \alpha_k$ jsou vektory

$$\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_\beta$$

nezávislé.

V opačném případě platí relace tvaru

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta} \boldsymbol{x}_\beta + \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{1\beta} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_\beta + \ldots + \sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{k-1,\beta} \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{x}_\beta = \boldsymbol{0}\,, \tag{93}$$

v níž všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ nejsou nulové. Vynásobením rovnosti (93) maticí $\boldsymbol{A}^{k-1}$ obdržíme

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha_k} a_{0\beta} \boldsymbol{x}_\beta^{k-1} + \boldsymbol{0} + \ldots + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\,,$$

odkud plyne $a_{0\beta} = 0$ vzhledem k tomu, že vektory (92) jsou nezávislé. Podobně vynásobením maticí $\boldsymbol{A}^{k-2}$ obdržíme

$$a_{1\beta} = 0\,, \quad \text{atd.},$$

takže v relaci (93) jsou všechny koeficienty $a_{\mu\beta}$ nulové. Tím docházíme ke sporu, čímž je důkaz proveden.

18.4. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{A}$ splňuje předpoklady odst. 18.2. Pak existuje $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ vektorů

$$\boldsymbol{x}_1^1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_r}^1;\ \boldsymbol{x}_1^2, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-1}}^2;\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_1^r, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_1}^r \tag{94}$$

s těmito vlastnostmi:

1. vektory

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1 & \text{jsou řádu } r\,, \\ \mathbf{x}_1^2, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-1}}^2 & \text{jsou řádu } r - 1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{x}_1^r, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_1}^r & \text{jsou řádu } 1\,; \end{array}$$

2. pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1^k = \mathbf{x}_1^{k+1}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k = \mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1}\,;$$

3. vektory (94) jsou nezávislé.

Důkaz (úplnou indukcí): Je-li $r = 1$, je věta správná podle předcházející věty 18.3. Budiž tedy $r \geqq 2$. Nechť $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ a předpokládejme, že existují vektory

$$\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1; \ldots; \mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k\,, \tag{95}$$

které mají tyto vlastnosti:

1. vektory

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_r}^1 & \text{jsou řádu } r\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k & \text{jsou řádu } r - k + 1\,; \end{array}$$

2. pro $1 \leqq \mu \leqq k - 1$ platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1^\mu = \mathbf{x}_1^{\mu+1}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_{\alpha_{r-\mu+1}}^\mu = \mathbf{x}_{\alpha_{r-\mu+1}}^{\mu+1}\,;$$

3. vektory

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k & \text{jsou řádu } r - k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{A}^{r-k}\mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{A}^{r-k}\mathbf{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k & \text{jsou řádu } 1\,; \end{array} \tag{96}$$

4. všechny vektory (95) a (96) jsou nezávislé.

Tento předpoklad je splněn pro $k = 1$, jak plyne z věty 18.3, píšeme-li v ní r místo k. Ukážeme, že pak existují další vektory

$$\mathbf{x}_1^{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_{\alpha_{r-k}}^{k+1} \tag{97}$$

takové, že o vektorech (95) a (97) platí hořejší výroky 1 až 4, v nichž místo k píšeme $k + 1$. Tím bude důkaz věty 18.4 proveden.

Nuže označme

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1^k = \boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k+1}}^k = \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1},$$

takže hořejší vzorce platí i pro $\mu = k$. Protože

$$\text{nul } \boldsymbol{A}^{r-k} = \gamma_{r-k},$$

existuje γ_{r-k} nezávislých vektorů, které se lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}^{r-k}$ transformují v nulový vektor. Podle předpokladů 3 a 4 jsou vektory

$$\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k+1}}^{k+1}$$

řádu $r - k$, a tedy se lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}^{r-k}$ transformují v nulový vektor a jsou nezávislé. Existují tudíž další vektory

$$\boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k+1}+1}^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\gamma_{r-k}}^{k+1}$$

v počtu $\gamma_{r-k} - \alpha_{r-k+1}$ takové, že se všechny vektory

$$\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\gamma_{r-k}}^{k+1}$$

transformují lineární substitucí o matici $\boldsymbol{A}^{r-k}$ v nulový vektor a jsou nezávislé.

Pro $m = 1, 2, \ldots, \gamma_{r-k}$ označme

$$\boldsymbol{x}_m^{k+2} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m^r = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m^{r-1},$$

takže

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_m^{k+2} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m^{k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x}_m^r &= \boldsymbol{A}^{r-k-1}\boldsymbol{x}_m^{k+1}, \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A}^{r-k}\boldsymbol{x}_m^{k+1}. \end{aligned}$$

Vezměme nyní v úvahu vektory

$$\boldsymbol{x}_1^r, \ldots, \boldsymbol{x}_{\gamma_{r-k}}^r. \tag{98}$$

Mezi těmito vektory je aspoň α_{r-k+1} nezávislých vektorů, totiž (jak plyne z předpokladu 4) vektory

$$\boldsymbol{x}_1^r, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k+1}}^r.$$

Podobně jako jsme v důkazu věty 18.3 zjistili o vektorech (podle tamnějšího označení) (90), zjistíme i nyní, že mezi vektory (98) je aspoň h nezávislých vektorů, kde

$$h \geqq \gamma_{r-k} - \gamma_{r-k-1} = \alpha_{r-k}\,.$$

Při vhodném označení jsou tedy nezávislými vektory

$$\boldsymbol{x}_1^r, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k}}^r\,.$$

Nyní ukážeme, že pro $\mu = 0, 1, \ldots, r - k - 1$ jsou

$$\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k}}^{k+1}$$

vektory řádu $r - k - \mu$. Pro $\beta = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-k}$ platí totiž vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{r-k-\mu}(\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_\beta^{k+1}) &= \boldsymbol{A}^{r-k}\boldsymbol{x}_\beta^{k+1} = \boldsymbol{0}\,, \\ \boldsymbol{A}^{r-k-\mu-1}(\boldsymbol{A}^\mu \boldsymbol{x}_\beta^{k+1}) &= \boldsymbol{A}^{r-k-1}\boldsymbol{x}_\beta^{k+1} = \boldsymbol{x}_\beta^r \neq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

Zbývá zjistit, že všechny vektory

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}_1^1, \quad \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_r}^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k}}^{k+1}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k}}^{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}^{r-k-1}\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{A}^{r-k-1}\boldsymbol{x}_{\alpha_{r-k}}^{k+1} \end{gathered}$$

jsou nezávislé. V opačném případě totiž platí relace tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_r} a_{1\nu}\boldsymbol{x}_\nu^1 + \ldots + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+1,\nu}\boldsymbol{x}_\nu^{k+1} + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{k+2,\nu}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\nu^{k+1} + \ldots + \\ + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{r-k}} a_{r\nu}\boldsymbol{A}^{r-k-1}\boldsymbol{x}_\nu^{k+1} = \boldsymbol{0}\,,$$

přičemž všechny koeficienty $a_{1\nu}, \ldots, a_{r\nu}$ nejsou rovny 0. Násobíme-li však tuto rovnost postupně maticemi $\boldsymbol{A}^{r-1}, \boldsymbol{A}^{r-2}, \ldots, \boldsymbol{A}^0$, zjistíme, že všechny koeficienty $a_{1\nu}, \ldots, a_{r\nu}$ jsou rovny nule. Tím jsme dospěli ke sporu a důkaz věty je ukončen.

Soustava α vektorů (94) o uvedených vlastnostech se nazývá *normální soustava vektorů příslušná k* (α-násobnému) *charakteristickému kořenu* 0 matice $\boldsymbol{A}$. Tento pojem nyní rozšíříme.

18.5. Definice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná matice stupně n, nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny vzájemně různé charakteristické kořeny matice $\boldsymbol{A}$ a nechť $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ značí násobnosti těchto kořenů, takže

$$\alpha + \beta + \ldots + \sigma = n\,.$$

Pak kořen 0 charakteristické rovnice matice

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E} \quad \text{je } \alpha\text{-násobný}\,, \\ &\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E} \quad \text{je } \beta\text{-násobný}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{A} - \lambda_s \boldsymbol{E} \quad \text{je } \sigma\text{-násobný}\,. \end{aligned}$$

Nechť normální soustava vektorů příslušných k charakteristickému kořenu 0 matice

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E} \quad \text{je} \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha\,, \\ &\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E} \quad \text{je} \quad \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{A} - \lambda_s \boldsymbol{E} \quad \text{je} \quad \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Pak soustava všech vektorů (99) v počtu n je tzv. *normální soustava vektorů* matice $\boldsymbol{A}$.

18.6. Věta. Vektory soustavy (99) jsou nezávislé, takže čtvercová matice stupně n

$$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta, \ldots, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma]$$

je regulární.

Důkaz: Ve skupině vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha$ nechť jsou vektory uspořádány tak, že vektory vyššího řádu předcházejí vektory nižšího řádu. Podobně tomu budiž v ostatních skupinách soustavy (99).

Předpokládejme, že vektory (99) nejsou lineárně nezávislé, takže existuje lineární relace

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu \boldsymbol{a}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu \boldsymbol{b}_\nu + \ldots + \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi \boldsymbol{s}_\pi = \boldsymbol{0}\,, \tag{100}$$

přičemž některá z čísel $m_\mu, n_\nu, \ldots, p_\pi$ nejsou nuly. Můžeme předpokládat, že některá z čísel p_π nejsou nuly, neboť v opačném případě si obdobnou situaci opatříme vypuštěním posledního součtu, popř. několika posledních součtů vlevo. Označme relaci (100) stručně symbolem

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta, \ldots, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma\} = \boldsymbol{0}\,.$$

Když vektor na levé a na pravé straně v relaci (100) vynásobíme maticí $\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}$, obdržíme

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{a}_\mu] + \ldots + \sum_{\pi=1}^{\sigma} p_\pi[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{s}_\pi] = \boldsymbol{0}\,. \tag{101}$$

Když vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha$ označíme tak jako v (94), vidíme, že vzhledem k relaci (88) je

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{a}_\mu] = m_1 \boldsymbol{x}_1^2 + m_2 \boldsymbol{x}_2^2 + \ldots + m_{\alpha_r} \boldsymbol{x}_{\alpha_r}^2 +$$
$$+ \ldots + m_{\alpha-\alpha_1} \boldsymbol{x}_{\alpha_2}^r = m_1 \boldsymbol{a}_{\alpha_r+1} + m_2 \boldsymbol{a}_{\alpha_r+2} + \ldots + m_{\alpha-\alpha_1} \boldsymbol{a}_{\alpha-\alpha_1+\alpha_2}$$

Dále např. je

$$n_\nu[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{b}_\nu] = n_\nu[(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E}) + (\lambda_2 - \lambda_1)\, \boldsymbol{E}]\, \boldsymbol{b}_\nu =$$
$$= n_\nu(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{b}_\nu + n_\nu(\lambda_2 - \lambda_1)\, \boldsymbol{b}_\nu\,,$$

takže

$$\sum_{\nu=1}^{\beta} n_\nu[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{b}_\nu] = (\lambda_2 - \lambda_1)\,[n_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + n_\beta \boldsymbol{b}_\beta] +$$
$$+ n_1 \boldsymbol{b}_{\beta_{r_2}+1} + \ldots,$$

přičemž β_{r_2} je poslední charakteristické číslo matice $\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E}$ příslušné ke kořenu 0.

Je tedy relace (101) tvaru

$$\{\boldsymbol{a}_{\alpha_r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta, \ldots, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma\} = \boldsymbol{0}\,.$$

Případnými dalšími násobeními maticí $\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}$ a pak maticemi $\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E}, \ldots, \boldsymbol{A} - \lambda_{s-1} \boldsymbol{E}$ dojdeme k relaci

$$\{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma\} = \boldsymbol{0}. \tag{102}$$

Podle předpokladu nejsou všechna čísla $p_1, \ldots, p_\pi$ rovna nule. Je-li např. $p_1 \neq 0$, podobně jako výše obdržíme

$$\begin{aligned} p_1[(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}) \boldsymbol{s}_1] &= p_1[(\boldsymbol{A} - \lambda_s \boldsymbol{E}) + (\lambda_s - \lambda_1) \boldsymbol{E}] \boldsymbol{s}_1 = \\ &= p_1(\lambda_s - \lambda_1) \boldsymbol{s}_1 + p_1 \boldsymbol{s}_{\sigma_0} + \ldots, \end{aligned}$$

kde $\sigma_0 > 1$. Je tedy koeficient při $\boldsymbol{s}_1$ v relaci (101)

$$p_1(\lambda_s - \lambda_1).$$

Podobně koeficient při $\boldsymbol{s}_1$ v relaci (102) je p_1-krát součin vhodných mocnin rozdílů $\lambda_i - \lambda_k$ pro $i \neq k$. Je tedy tento koeficient různý od nuly. To je však nemožné, neboť podle významu jsou vektory $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma$ lineárně nezávislé. Tím je věta dokázána.

18.7. Invariantní podprostory určené normální soustavou vektorů. V tomto odst. nechť T značí těleso komplexních čísel.

Buď $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice stupně n nad tělesem T a V_n aritmetický n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem T. Buď dále $\mathscr{A}$ zobrazení prostoru V_n do sebe určené maticí $\boldsymbol{A}$, takže pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in V_n$ je $\mathscr{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in V_n$.

Buď λ_1 charakteristický kořen matice $\boldsymbol{A}$ s násobností $\alpha (\geqq 1)$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ příslušná charakteristická čísla. Podle věty 18.4 existuje normální soustava vektorů příslušných ke kořenu λ_1

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1^1, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha_r}^1, \\ \boldsymbol{a}_1^2, \ldots\ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha_{r-1}}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_1^r, \ldots\ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha_1}^r. \end{array} \tag{103}$$

Tato soustava se vyznačuje tím, že se každý vektor, pokud jeho symbol není v posledním řádku, transformuje maticí $\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}$ ve vektor, jehož symbol je právě pod ním, kdežto vektory v posledním řádku se transformují ve vektor $\boldsymbol{0}$.

Platí tedy vzorce

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{a}_\nu^\mu = \boldsymbol{a}_\nu^{\mu+1} \quad \text{pro } 1 \leqq \mu \leqq r - 1\,,$$
$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{a}_\nu^\mu = \boldsymbol{0} \quad \text{pro} \quad \mu = r$$
$$(\nu = 1, \ldots, \alpha_{r-\mu+1})\,,$$

neboli

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_\nu^\mu = \lambda_1 \boldsymbol{a}_\nu^\mu + \boldsymbol{a}_\nu^{\mu+1} \quad \text{pro } 1 \leqq \mu \leqq r - 1\,.$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_\nu^\mu = \lambda_1 \boldsymbol{a}_\nu^\mu \quad \text{pro} \quad \mu = r\,.$$

Tyto vzorce ukazují, že vektory, jejichž symboly stojí v tabulce (103) v témže sloupci, určují v prostoru V_n podprostor, který je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní. Rozměr tohoto podprostoru je dán počtem vektorů v onom sloupci.

Např. podprostor v prostoru V_n určený vektory v prvním sloupci tabulky (103) je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní, protože $\mathscr{A}$-obraz každého z těchto vektorů leží opět v tomto podprostoru:

$$\mathscr{A}\boldsymbol{a}_1^1 = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1^1 + \boldsymbol{a}_1^2,\ \mathscr{A}\boldsymbol{a}_1^2 = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1^2 + \boldsymbol{a}_1^3, \ldots, \mathscr{A}\boldsymbol{a}_1^{r-1} =$$
$$= \lambda_1 \boldsymbol{a}_1^{r-1} + \boldsymbol{a}_1^r,\ \mathscr{A}\boldsymbol{a}_1^r = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1^r\,;$$

uvažovaný podprostor je zřejmě r-rozměrný.

Vidíme, že normální soustava vektorů příslušných k charakteristickému kořenu λ_1 matice $\boldsymbol{A}$ určuje v prostoru V_n podprostory, které jsou při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní, a sice

$$\begin{array}{ll}
\alpha_r & \text{podprostorů } r\text{-rozměrných}\,, \\
\alpha_{r-1} - \alpha_r & \text{podprostorů } r - 1\text{-rozměrných}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1 - \alpha_2 & \text{podprostorů } 1\text{-rozměrných}\,,
\end{array}$$

celkem tedy α_1 invariantních podprostorů.

Ke každému charakteristickému kořenu $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ matice $\boldsymbol{A}$ patří taková soustava podprostorů v prostoru V_n, z nichž každý je při zobrazení $\mathscr{A}$ invariantní. Při označení jako v definici 18.5 tvoří báze těchto podprostorů dohromady bázi prostoru V_n

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha;\ \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\beta;\ \ldots;\ \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_\sigma\,.$$

Prostor V_n je tedy přímým součtem oněch invariantních podprostorů, jichž je celkem $\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \sigma_1$, přičemž ovšem $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \sigma_1$ značí největší charakteristické číslo patřící ke kořenu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Podle odst. 8.4. má matice souřadných vektorů $\mathscr{A}$-obrazů prvků uvedené báze diagonální tvar.

Např. matice souřadných vektorů $\mathscr{A}$-obrazů prvků báze $\boldsymbol{a}_1^1, \ldots, \boldsymbol{a}_1^r$ invariantního r-rozměrného podprostoru o němž byla výše řeč, je vzhledem k oné bázi

$$\begin{array}{r} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n-r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že podle odst. 8.4. platí vztahy

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

přičemž $\boldsymbol{B}$ značí matici souřadných vektorů $\mathscr{A}$-obrazů prvků hořejší báze prostoru V_n a $\boldsymbol{Q}$ matici této báze.

Došli jsme k tomuto výsledku:

K matici $\boldsymbol{A}$ existuje čtvercová matice $\boldsymbol{B}$ stupně n, která má tvar

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

a je blokově diagonální

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_k).$$

Přitom každá z (čtvercových) matic $\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_k$ patří k některému kořenu a matice $\boldsymbol{A}$ a je tvaru

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a \end{bmatrix}. \tag{104}$$

Počet matic patřících k témuž kořenu a je roven největšímu z charakteristických čísel matice $\boldsymbol{A}$ příslušných k tomuto kořenu.