14. CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE RACIONÁLNÍ FUNKCE V MATICI

Budiž $\mathbf{A}$ libovolná čtvercová matice stupně n. Z odst. 9.2 víme, že k matici $\mathbf{A}$ přísluší charakteristická rovnice

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0\,. \tag{48}$$

Značí-li $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})/h(\mathbf{A})$ libovolnou racionální funkci v matici $\mathbf{A}$, má tato racionální funkce opět charakteristickou rovnici, a to

$$|f(\mathbf{A}) - \lambda\mathbf{E}| = 0\,.$$

Mezi kořeny obou charakteristických rovnic platí určité vztahy, které odvodíme.

14.1. Věta. Nechť $g(\mathbf{A})$ je polynom v matici $\mathbf{A}$. Pak determinant $|g(\mathbf{A})|$ představuje rezultant polynomu $g(\lambda)$ a charakteristického polynomu $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ matice $\mathbf{A}$.

Důkaz: Nechť

$$g(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = \\ = a_0(\lambda - h_1)(\lambda - h_2)\ldots(\lambda - h_m)\,,$$

kde $h_1, \ldots, h_m$ značí kořeny algebraické rovnice $g(\lambda) = 0$. Zřejmě je

$$g(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^m + \ldots + a_m\mathbf{E} = a_0(\mathbf{A} - h_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - h_2\mathbf{E})\ldots \\ \ldots(\mathbf{A} - h_m\mathbf{E})\,,$$

takže

$$|g(\mathbf{A})| = a_0^n|\mathbf{A} - h_1\mathbf{E}|\,.\,|\mathbf{A} - h_2\mathbf{E}|\,.\,\ldots\,.\,|\mathbf{A} - h_m\mathbf{E}|\,.$$

Označíme-li $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, z předešlého vztahu obdržíme

$$|g(\mathbf{A})| = a_0^n\,\varphi(h_1)\,.\,\varphi(h_2)\ldots\varphi(h_m)\,. \tag{49}$$

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$, pak je

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Proto podle (49) dostáváme

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{A})| = a_0^n & (-1)^n (h_1 - \lambda_1)(h_1 - \lambda_2) \ldots (h_1 - \lambda_n) \,. \\ . & (-1)^n (h_2 - \lambda_1)(h_2 - \lambda_2) \ldots (h_2 - \lambda_n) \,. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ . & (-1)^n (h_m - \lambda_1)(h_m - \lambda_2) \ldots (h_m - \lambda_n) \,. \end{aligned} \tag{50}$$

Odtud plyne, že rovnice $\varphi(\lambda)$, $g(\lambda)$ mají společný kořen $h_k = \lambda_j$, právě když je

$$|g(\mathbf{A})| = 0 .$$

Tím je věta dokázána.

14.2. Poznámky. 1. Ze vztahu (50) plyne

$$|g(\mathbf{A})| = g(\lambda_1)\, g(\lambda_2) \ldots g(\lambda_n) . \tag{51}$$

2. Z předešlé věty 14.1 plyne (vzhledem k vlastnosti rezultantu algebraických rovnic), že matice $g(\mathbf{A})$ je singulární, právě když algebraická rovnice $g(\lambda) = 0$ a charakteristická rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ matice $\mathbf{A}$ mají společný kořen.

14.3. Věta o kořenech charakteristické rovnice matice $f(\mathbf{A})$. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ a značí-li $f(\mathbf{A})$ racionální funkci v matici $\mathbf{A}$, pak platí tvrzení

1. $|f(\mathbf{A})| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$; (52)

2. charakteristická rovnice matice $f(\mathbf{A})$ má kořeny

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n) .$$

Důkaz: 1. Je-li $f(\mathbf{A})$ polynom v matici $\mathbf{A}$, první tvrzení je správné podle vztahu (51), položíme-li $g(\lambda) = f(\lambda)$. Nechť je tedy

$$f(\mathbf{A}) = \frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})},$$

kde $g(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{A})$ jsou polynomy v matici $\mathbf{A}$, přičemž $|h(\mathbf{A})| \neq 0$. Pak podle (51) máme

$$|g(\mathbf{A})| = g(\lambda_1)\, g(\lambda_2) \ldots g(\lambda_n)\,,$$
$$|h(\mathbf{A})| = h(\lambda_1)\, h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n)\,.$$

Odtud plyne

$$|f(\mathbf{A})| = |g(\mathbf{A})| \,.\, |h(\mathbf{A})|^{-1} = g(\lambda_1) \ldots g(\lambda_n) \left[h(\lambda_1) \ldots h(\lambda_n)\right]^{-1} =$$
$$= \frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} \ldots \frac{g(\lambda_n)}{h(\lambda_n)} = f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_n)\,.$$

2. Pro každé λ je

$$\lambda \mathbf{A}^0 - f(\mathbf{A})$$

racionální funkce v matici $\mathbf{A}$. Tedy podle předešlého tvrzení je

$$|\lambda \mathbf{E} - f(\mathbf{A})| = |\lambda \mathbf{A}^0 - f(\mathbf{A})| = [\lambda \lambda_1^0 - f(\lambda_1)]\,[\lambda \lambda_2^0 - f(\lambda_2)] \ldots$$
$$\ldots [\lambda \lambda_n^0 - f(\lambda_n)] = [\lambda - f(\lambda_1)]\,[\lambda - f(\lambda_2)] \ldots [\lambda - f(\lambda_n)]\,.$$

Avšak levá strana této rovnice je až na součinitele $(-1)^n$ charakteristický polynom matice $f(\mathbf{A})$, kdežto pravá strana je její rozklad v kořenové faktory.

14.4. Poznámka. Je-li $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$, pak platí vztah

$$|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = (-\lambda)^n\,. \tag{53}$$

Skutečně podle věty 14.3.2 má charakteristická rovnice $|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = 0$ matice $\varphi(\mathbf{A})$ kořeny

$$\varphi(\lambda_1),\ \varphi(\lambda_2),\ \ldots,\ \varphi(\lambda_n)\,,$$

přičemž $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristické rovnice $\varphi(\lambda) = 0$. Proto je

$$\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) = \ldots = \varphi(\lambda_n) = 0\,.$$

To znamená, že rovnice $|\varphi(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = 0$ má všechny kořeny rovné nule. Odtud plyne vztah (53).

Tento výsledek později (v odst. 15.6) upřesníme, když ukážeme, že $\varphi(\mathbf{A})$ je vždy nulová matice.