10. ORTOGONÁLNÍ MATICE

10.1. Euklidovská délka vektoru. V euklidovské reálné geometrii se ke každému vektoru v n-rozměrném prostoru přiřazuje určitá délka, a to tak, že délkou vektoru $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se rozumí nezáporné číslo

$$s = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}\,.$$

Čtverec délky vektoru $\boldsymbol{x}$ je tedy prvkem matice

$$[s^2] = [x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2] = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\,,$$

kde $\boldsymbol{x}'$ je matice transponovaná z matice $\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ je zřejmě matice typu $1/1$.

Obsahem euklidovské reálné geometrie je studium vlastností útvarů (např. vektorů, lineárních prostorů, křivek apod.), které se nemění těmi lineárními reálnými transformacemi, jež zachovávají délky vektorů. Takové lineární transformace se nazývají *ortogonální.*

Je-li $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ libovolný reálný vektor a $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$ vektor transformovaný lineární substitucí o reálné čtvercové matici $\boldsymbol{R}$ stupně n, který má touž délku jako vektor $\boldsymbol{x}$, platí zřejmě vztah $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$.

Tato úvaha vede k následující definici:

10.2. Definice ortogonální matice. Lineární transformace

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$$

o čtvercové matici $\mathbf{R}$ (nad libovolným tělesem T) se nazývá ortogo- ní, platí-li pro každý vektor $\mathbf{x}$ (nad tělesem T) vztah

$$(\mathbf{Rx})' (\mathbf{Rx}) = \mathbf{x}'\mathbf{x} .$$

V tom případě se také matice $\mathbf{R}$ nazývá *ortogonální.*

10.3. Věta o ortogonálních maticích. 1. Matice $\mathbf{R}$ je ortogonální, právě když platí vztah

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E} . \tag{29}$$

2. Ortogonální matice je vždy regulární a její determinant $|\mathbf{R}|$ má hodnotu buď $+1$, nebo -1. Podle toho se ortogonální matice $\mathbf{R}$ nazývá *vlastní* (je-li $|\mathbf{R}| = 1$) nebo *nevlastní* (je-li $|\mathbf{R}| = -1$).

3. V determinantu $|\mathbf{R}|$ každé ortogonální matice $\mathbf{R}$ je algebraický doplněk libovolného prvku roven hodnotě tohoto prvku, je-li $\mathbf{R}$ vlastní ortogonální matice, popř. opačné hodnotě uvažovaného prvku, když $\mathbf{R}$ je nevlastní ortogonální matice.

Důkaz: 1a) Budiž $\mathbf{x}^* = \mathbf{Rx}$ ortogonální transformace, takže je

$$(\mathbf{Rx})' \mathbf{Rx} = \mathbf{x}'\mathbf{x} .$$

Odtud máme podle (6)

$$\mathbf{x}'(\mathbf{R}'\mathbf{R})\, \mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{x}. \tag{30}$$

Tato rovnice je zřejmě splněna platí-li vztah $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$. Je tedy platnost rovnice (29) dostačující podmínkou k tomu, aby lineární transformace o matici $\mathbf{R}$ byla ortogonální.

1b) Ukážeme, že rovnice (29) je i nutnou podmínkou pro ortogonální transformaci. Označme prvky matice $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ znaky c_{jk}, kde $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Protože je $(\mathbf{R}'\mathbf{R})' = \mathbf{R}'\mathbf{R}$, je matice $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ symetrická, takže

$$c_{jk} = c_{kj} .$$

Zvolme za vektor $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}_j$, jehož všechny souřadnice jsou nuly kromě j-té, která je $x_j = 1$. Pak na levé straně rovnice (30) dostaneme

$$[\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0] \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\}j = [c_{jj}] ,$$

kdežto na pravé straně bude

$$[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [1] .$$

Odtud máme $c_{jj} = 1$.

Zvolme nyní za vektor $\boldsymbol{x}$ vektor, jehož všechny souřadnice jsou nulové kromě souřadnic x_j a x_k, přičemž $x_j = x_k = 1$, kde $j < k$. Pak na levé straně vztahu (30) obdržíme

$$[0, \ldots, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [c_{jj} + c_{kj} + c_{jk} + c_{kk}] ,$$

zatímco na pravé straně bude $[2]$. Proto je

$$c_{jj} + c_{kk} + c_{jk} + c_{kj} = 2 .$$

Protože však $c_{jj} = c_{kk} = 1$, dostáváme z předešlé rovnosti vztah

$$c_{jk} = -c_{kj} .$$

Odtud vzhledem k vztahu $c_{jk} = c_{kj}$ plyne $c_{jk} = c_{kj} = 0$. Je tedy $\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$, jak jsme měli dokázat.

2. Z rovnice $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$ bezprostředně plyne

$$|\mathbf{R}'\mathbf{R}| = |\mathbf{R}'|\,|\mathbf{R}| = |\mathbf{E}| = 1\,.$$

Protože pak $|\mathbf{R}'| = |\mathbf{R}|$, je $|\mathbf{R}|^2 = 1$, odkud $|\mathbf{R}| = \pm 1$.

3. Protože matice $\mathbf{R}$ je regulární, plyne z rovnice $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$ násobením zprava maticí $\mathbf{R}^{-1}$ vztah

$$\mathbf{R}'(\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{E}\mathbf{R}^{-1}$$

a odtud

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}\,.$$

Avšak

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{R}|}\operatorname{adj}\mathbf{R} = \pm\operatorname{adj}\mathbf{R}\,,$$

takže

$$\mathbf{R}' = \pm\operatorname{adj}\mathbf{R}\,,$$

přičemž platí znaménko $+$, když $\mathbf{R}$ je vlastní, kdežto znaménko $-$, je-li $\mathbf{R}$ nevlastní ortogonální matice.

Značí-li r_{jk} prvky matice $\mathbf{R}$, kdežto R_{jk} algebraický doplněk prvku r_{jk} v matici $\mathbf{R}$, je v j-tém řádku a k-tém sloupci matice na levé straně poslední rovnice prvek r_{kj}, kdežto na pravé straně číslo $\pm R_{kj}$. Je tedy (pro $j, k = 1, 2, \ldots, n$)

$$r_{jk} = \pm R_{jk}\,.$$

Příklad 11. Ukažme, že transformace o matici

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

kde φ je libovolné reálné číslo, představuje vlastní ortogonální transformaci, která značí rotaci v euklidovské rovině. Určíme všechny vektory, které se při této transformaci nemění (jsou invariantní).

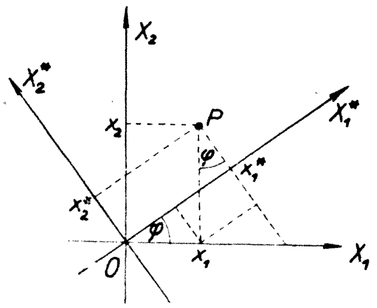
Řešení: Zde je

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}\,.$$

Protože $|\mathbf{R}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, jde o vlastní ortogonální matici. Příslušná lineární transformace $\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\mathbf{x}$ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x^* &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \,, \\ x_2^* &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

a představuje rotaci v euklidovské rovině (obr. 1).



Obr. 1.

Při této transformaci se pro $\varphi \neq 2k\pi$, kde k je celé číslo, nemění pouze jediný vektor, a to nulový vektor $\mathbf{0}$. Vskutku, nemá-li se nějaký vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ uvedenou transformací měnit, je nutné a stačí, aby platily rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \,, \\ x_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \,, \end{aligned}$$

tj. aby jeho souřadnice vyhovovaly rovnicím

$$\begin{aligned} x_1(1 - \cos \varphi) - x_2 \sin \varphi &= 0 \,, \\ x_1 \sin \varphi + x_2(1 - \cos \varphi) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Determinant této soustavy je

$$\begin{aligned} \Delta = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi &= (1 - \cos \varphi)^2 + (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \,, \end{aligned}$$

a pro $\varphi \neq 2k\pi$ je $\Delta \neq 0$. V tom případě je $x_1 = x_2 = 0$.

Příklad 12. Určeme všechny vektory, které se nemění při transformaci o matici

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix},$$

která je ortogonální nevlastní.

Řešení: Zde je

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

přičemž $|\boldsymbol{R}| = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1$, takže jde o nevlastní ortogonální matici. Příslušná transformace je dána rovnicemi

$$x_1^* = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi\,,$$
$$x_2^* = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi\,.$$

Je složena z rotace

$$x_1^{**} = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi$$
$$x_2^{**} = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi$$

a ze symetrie vzhledem k ose X_1

$$x_1^* = x_1^{**}\,, \quad x_2^* = -x_2^{**}\,.$$

V tomto případě existují vektory, které jsou vzhledem k hořejší substituci invariantní. Vskutku, z rovnic

$$x_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi\,,$$
$$x_2 = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi$$

plyne

$$x_1(1 - \cos\varphi) - x_2 \sin\varphi = 0\,,$$
$$x_1 \sin\varphi - x_2(1 + \cos\varphi) = 0\,.$$

Determinant soustavy je

$$\Delta = -(1 - \cos^2\varphi) + \sin^2\varphi = 0\,.$$

Proto řešení obou rovnic je při libovolném λ tvaru

$$x_1 = \lambda \sin \varphi\,, \quad x_2 = \lambda(1 - \cos \varphi)\,.$$

Jsou tedy invariantní všechny vektory tvaru

$$\begin{bmatrix} \lambda \sin \varphi \\ \lambda(1 - \cos \varphi) \end{bmatrix}.$$

10.4. Věta o kořenech charakteristické rovnice ortogonální matice $\boldsymbol{R}$. Je-li ortogonální matice $\boldsymbol{R}$ reálná, pak všechny kořeny λ_k charakteristické rovnice $|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ mají absolutní hodnotu rovnou 1, takže je

$$\lambda_k = e^{i\varphi_k}\,,$$

kde φ_k značí (pro $k = 1, 2, \ldots, n$) vhodné reálné číslo. Přitom imaginární kořeny jsou po dvou komplexně sdružené.

Důkaz: Vezměme v úvahu inverzní matici $(\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})^{-1}$, kde λ je libovolné číslo takové, že $|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}| \neq 0$. Zřejmě platí

$$(\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}|} \operatorname{adj} (\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})\,.$$

Prvky matice $\operatorname{adj} (\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})$ jsou (podle definice adjungované matice) algebraické doplňky prvků v matici $\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}$. Jsou to tedy polynomy stupně nejvýše $(n - 1)$-ho v proměnné λ. Proto prvky matice $(\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})^{-1}$ jsou racionální lomené funkce v proměnné λ a dají se tedy rozložit v částečné zlomky.

Nechť λ_0 značí libovolný kořen rovnice $|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ a nechť tento kořen je h_1-násobný. Pro společného dělitele všech minorů $(n - 1)$-ho stupně v matici $\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}$ nechť je kořen λ_0 h_2-násobný (přičemž může být $h_2 = 0$). Tedy pro čitatele každého prvku v matici $(\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E})^{-1}$ je tento kořen aspoň h_2-násobný a pro čitatele aspoň jednoho prvku v této matici je právě h_2-násobný. Derivace determinantu $|\boldsymbol{R} - \lambda \boldsymbol{E}|$ podle λ je rovna součtu n determinantů, z nichž k-tý má v k-tém sloupci derivace prvků podle λ

a ostatní sloupce nezměněné, takže

$$D_\lambda|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} - \lambda & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_{n2} & \dots & r_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} r_{11} - \lambda & r_{12} & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Vidíme, že tato derivace je rovna součtu minorů řádu $n - 1$ v matici $\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}$, a je tedy dělitelná výrazem

$$(\lambda - \lambda_0)^{h_2}.$$

Proto λ_0 je aspoň $(h_2 + 1)$-násobným kořenem rovnice $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| = 0$. Odtud plyne, že $h_1 > h_2$.

Položíme-li $\alpha = h_1 - h_2$ (> 0), obdržíme rozklad v částečné zlomky libovolného prvku c_{jk} v matici $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ tvaru

$$c_{jk} = \frac{a_{jk}}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \frac{b_{jk}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha - 1}} + \dots,$$

kde a_{jk}, b_{jk} značí vhodná čísla a nenapsané členy obsahují kořenového činitele $\lambda - \lambda_0$ s exponentem $m > 1 - \alpha$ a kromě toho kořenové činitele patřící k ostatním kořenům rovnice $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| = 0$. Čísla a_{jk} (pro $j, k = 1, 2, \dots, n$) nejsou vesměs rovna nule, neboť pro čitatele aspoň jednoho prvku v matici $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ je λ_0 kořenem právě h_2-násobným, takže rozklad tohoto prvku v částečné zlomky obsahuje zlomek

$$\frac{a}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha}, \quad \text{kde} \quad a \neq 0.$$

Je tedy

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \dots, \dots, \frac{a_{1n}}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \dots \\ \dots \\ \frac{a_{n1}}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \dots, \dots, \frac{a_{nn}}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} + \dots \end{bmatrix},$$

přičemž matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$, tj. není nula.

Proto je

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} \mathbf{A} + \dots$$

Odtud násobením maticí $\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E} = (\mathbf{R} - \lambda_0\mathbf{E}) - (\lambda - \lambda_0)\,\mathbf{E}$ plyne

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} [(\mathbf{RA} - \lambda_0\mathbf{A}) - (\lambda - \lambda_0)\,\mathbf{A} + \dots]$$

neboli

$$(\lambda - \lambda_0)^\alpha\,\mathbf{E} = (\mathbf{RA} - \lambda_0\mathbf{A}) - (\lambda - \lambda_0)\,\mathbf{A} + \dots$$

Odtud porovnáním koeficientů při $(\lambda - \lambda_0)^0$ obdržíme

$$\mathbf{RA} - \lambda_0\mathbf{A} = \mathbf{O}$$

neboli

$$\mathbf{RA} = \lambda_0\mathbf{A}\,. \tag{31}$$

Nechť $\bar{\lambda}_0$ značí číslo komplexně sdružené s číslem λ_0 a $\bar{\mathbf{R}}$, popř. $\bar{\mathbf{A}}$ matici komplexně sdruženou s maticí $\mathbf{R}$, popř. $\mathbf{A}$, takže např. $\bar{\mathbf{A}} = \|\bar{a}_{jk}\|$. Protože matice $\mathbf{R}$ je podle předpokladu reálná, je $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, takže z rovnice (31) plyne

$$\mathbf{R}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{A}}\,;$$

odtud transponováním dostaneme

$$\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{R}' = \bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{A}}'\,.$$

Násobíme-li zprava tuto rovnici rovnicí (31), dostaneme

$$\bar{\mathbf{A}}'(\mathbf{R}'\mathbf{R})\,\mathbf{A} = \bar{\lambda}_0\lambda_0\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A}$$

neboli

$$\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A}(1 - \bar{\lambda}_0\lambda_0) = \mathbf{O}$$

vzhledem k tomu, že $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E}$. Protože $\bar{\mathbf{A}}'\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ (neboť $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$), musí být

$$\bar{\lambda}_0\lambda_0 = 1\,.$$

Odtud plyne, že kořen λ_0 má absolutní hodnotu rovnou 1. Protože rovnice $|\boldsymbol{R} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$ má reálné koeficienty, jsou imaginární kořeny po dvou komplexně sdružené.

Poznamenejme, že jiný, kratší důkaz věty 10.4 lze provésti podobně jako u věty 11.4.

10.5. Věta o tvaru ortogonálních matic. Všechny ortogonální matice $\boldsymbol{R}$ stupně n, pro které je $|\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}| \neq 0$, lze vyjádřit vzorcem

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}}, \tag{32}$$

kde $\boldsymbol{T}$ značí libovolnou polosouměrnou matici stupně n vyhovující vztahu $|\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}| \neq 0$.

Důkaz: a) Nechť $\boldsymbol{R}$ je libovolná ortogonální matice stupně n, pro niž

$$|\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}| \neq 0 .$$

To znamená, že charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{R}$ nemá kořen $\lambda = -1$, takže neexistuje nenulový vektor $\boldsymbol{x}$, který lineární transformací o matici $\boldsymbol{R}$ přejde v opačný vektor $-\boldsymbol{x}$.

Utvořme pomocí matice $\boldsymbol{R}$ matici $\boldsymbol{T}$ tvaru

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R})^{-1} .$$

Odtud násobením zprava maticí $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R})$ dostaneme

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{R} . \tag{33}$$

Přechodem k maticím transponovaným obdržíme vztah

$$(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R})' \boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})'$$

neboli

$$(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R}') \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{R}' .$$

Násobme zleva poslední vzorec maticí $\boldsymbol{R}$. Vzhledem k rovnici $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}' = E$ obdržíme

$$(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}) \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{E} ,$$

takže po vynásobení zleva maticí $(\mathbf{R} + \mathbf{E})^{-1}$ dostaneme

$$\mathbf{T}' = -(\mathbf{R} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{R}).$$

Matice $(\mathbf{R} + \mathbf{E})^{-1}$, $\mathbf{E} - \mathbf{R}$ jsou zaměnitelné, neboť platí

$$(\mathbf{R} + \mathbf{E})(\mathbf{E} - \mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{E} - \mathbf{R}^2 - \mathbf{R} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{R}^2 = \\ = (\mathbf{E} - \mathbf{R})(\mathbf{R} + \mathbf{E}),$$

což znamená, že $\mathbf{E} - \mathbf{R}$, $\mathbf{R} + \mathbf{E}$ jsou zaměnitelné, a tudíž také $(\mathbf{R} + \mathbf{E})^{-1}$, $\mathbf{E} - \mathbf{R}$ jsou zaměnitelné. Proto je

$$\mathbf{T}' = -(\mathbf{E} - \mathbf{R})(\mathbf{R} + \mathbf{E})^{-1} = -\mathbf{T}.$$

Je tedy matice $\mathbf{T}$ polosouměrná. Kromě toho matice $\mathbf{E} + \mathbf{T}$ je regulární, neboť je

$$\mathbf{E} + \mathbf{T} = (\mathbf{E} + \mathbf{R})(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1} + (\mathbf{E} - \mathbf{R})(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1} = \\ = (\mathbf{E} + \mathbf{R} + \mathbf{E} - \mathbf{R})(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1} = 2\mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1},$$

takže

$$|\mathbf{E} + \mathbf{T}| = \frac{2^n}{|\mathbf{E} + \mathbf{R}|} \neq 0.$$

Ze vztahu (33) dostáváme

$$\mathbf{T} + \mathbf{TR} = \mathbf{E} - \mathbf{R}$$

neboli

$$\mathbf{R} + \mathbf{TR} = \mathbf{E} - \mathbf{T},$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{T})\mathbf{R} = \mathbf{E} - \mathbf{T}.$$

Protože $\mathbf{E} + \mathbf{T}$ je regulární, existuje $(\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}$ a platí

$$\mathbf{R} = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{T}).$$

Matice $(\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}$, $(\mathbf{E} - \mathbf{T})$ jsou zaměnitelné, takže poslední vztah můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{T}}{\mathbf{E} + \mathbf{T}}.$$

b) Buď $\boldsymbol{T}$ libovolná polosouměrná matice, pro niž platí $|\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}| \neq 0$. Ukážeme, že matice (32)

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}}$$

je ortogonální a matice $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R}$ regulární. Zřejmě je

$$\boldsymbol{R}' = [(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})^{-1}]' = [(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})^{-1}]'(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T})' =$$
$$= [(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})']^{-1}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}),$$

takže

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{E}.$$

Z toho plyne, že matice $\boldsymbol{R}$ je ortogonální. Dále ze vztahu (32) plyne

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}) =$$
$$= (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}) - (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T})$$

a odtud

$$(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}) = 2\boldsymbol{E}.$$

Proto

$$|\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}| = \frac{2^n}{|\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}|} \neq 0.$$

Tím je věta dokázána.

10.6. Poznámka. Určení ortogonálních matic $\boldsymbol{R}$, pro něž $|\boldsymbol{R} + \boldsymbol{E}| = 0$. je složitější a nebudeme se jím zde zabývati.

Příklad 13. Napišme explicitně výraz (32) pro ortogonální matici $\boldsymbol{R}$ stupně $n = 2$.

Řešení: Každá polosouměrná matice stupně 2 je tvaru

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{bmatrix},$$

kde u značí vhodné číslo. Přitom je

$$|\mathbf{E} + \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & u \\ -u & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2 ,$$

takže budeme předpokládat, že $1 + u^2 \neq 0$.
Je tedy

$$\mathbf{E} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & u \\ -u & 1 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{E} + \mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{bmatrix},$$

takže

$$(\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1} = \frac{1}{1 + u^2} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{bmatrix}.$$

Příslušná ortogonální matice $\mathbf{R}$ je podle (32)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ u & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2} \begin{bmatrix} 1 - u^2 & -2u \\ 2u & 1 - u^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} & \dfrac{-2u}{1 + u^2} \\ \dfrac{2u}{1 + u^2} & \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} \end{bmatrix}.$$

Dosadíme-li sem $u = \operatorname{tg} \varphi/2$, obdržíme

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Tím jsme obdrželi všechny ortogonální matice 2. stupně, vyznačující se tím, že $|\mathbf{R} + \mathbf{E}| \neq 0$. Vidíme, že jsou to právě všechny vlastní ortogonální matice. (Viz př. 11.)

Příklad 14. Napišme explicitně výraz (32) pro ortogonální matice $\mathbf{R}$ stupně $n = 3$.

Řešení: Polosouměrná matice $\mathbf{T}$ stupně 3 je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & u & v \\ -u & 0 & t \\ -v & -t & 0 \end{bmatrix},$$

kde u, v, t značí nějaká čísla. Determinant

$$|\mathbf{E} + \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ -u & 1 & t \\ -v & -t & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2 + v^2 + t^2,$$

takže budeme předpokládat, že je $1 + u^2 + v^2 + t^2 \neq 0$. Dále je

$$\operatorname{adj}(\mathbf{E} + \mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & -u - vt & -v + ut \\ u - vt & 1 + v^2 & -t - uv \\ v + ut & t - uv & 1 + u^2 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \operatorname{adj}(\mathbf{E} + \mathbf{T}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -u & -v \\ u & 1 & -t \\ v & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + t^2 & -u - vt & -v + ut \\ u - vt & 1 + v^2 & -t - uv \\ v + ut & t - uv & 1 + u^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - u^2 - v^2 + t^2 & -2u - 2vt & -2v + 2ut \\ 2u - 2vt & 1 - u^2 + v^2 - t^2 & -2t - 2uv \\ 2v + 2ut & 2t - 2uv & 1 + u^2 - v^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

Proto

$$\mathbf{R} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2 + t^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 - u^2 - v^2 + t^2 & -2u - 2vt & -2v + 2ut \\ 2u - 2vt & 1 - u^2 + v^2 - t^2 & -2t - 2uv \\ 2v + 2ut & 2t - 2uv & 1 + u^2 - v^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

představuje všechny ortogonální matice stupně 3, pro něž je $|\mathbf{R} + \mathbf{E}| \neq 0$.