1. POJEM MATICE NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM

1.1. Definice číselného tělesa. *Číselné těleso* T je každá neprázdná množina (komplexních) čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

(a) Obsahuje aspoň jedno číslo $p \neq 0$.

(b) S každou dvojicí (stejných nebo různých) čísel $a \in T$, $b \in T$ obsahuje též součet $a + b$, rozdíl $a - b$, součin ab, a je-li $b \neq 0$, též podíl a/b.

Příklady číselných těles: 1. Množina K všech komplexních čísel. Je to největší číselné těleso v tom smyslu, že každé jiné číselné těleso T je jeho podmnožinou, tj. $T \subset K$.

2. Množina D všech reálných čísel.

3. Množina R všech racionálních čísel.

Příklad 1. Dokažme, že množina R všech racionálních čísel je nejmenší číselné těleso, takže každé jiné číselné těleso T obsahuje těleso R.

Důkaz. Buď T libovolné číselné těleso. Podle vlastnosti (a) předešlé definice obsahuje těleso T aspoň jedno číselo $p \neq 0$. Podle vlastnosti (b) téže definice obsahuje těleso T též číslo $p/p = 1$, a tedy též čísla

$$1 + 1 = 2\,,\ 2 + 1 = 3\,,\ \ldots,\ 1 - 1 = 0\,,\ 0 - 1 = -1\,,$$
$$0 - 2 = -2\,,\ \ldots,$$

tedy všechna celá čísla. Odtud na základě vlastnosti (b) plyne, že těleso T obsahuje podíl m/n každých dvou celých čísel m, $n \neq 0$, a tedy každé racionální číslo. Proto $R \subset T$.

1.2. Definice matice nad číselným tělesem. *Maticí typu* m/n nad libovolným číselným tělesem T rozumíme skupinu čísel vybraných z tělesa T a uspořádaných do m řádků a n sloupců ($m, n \geqq 1$). Tato čísla nazýváme pak *prvky matice*.

Např. symbol

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

představuje matici typu 2/4 (tj. o 2 řádcích a 4 sloupcích) nad tělesem reálných čísel.

Jednoduchým příkladem matice libovolného typu m/n nad tělesem racionálních čísel je matice, jejíž všechny prvky jsou 0. Taková matice se nazývá *nulová* neboli *matice nula.*

Matice nad tělesem čísel reálných nazýváme stručně *reálné.*

1.3. Označení. 1. Vezměme v úvahu libovolnou matici typu m/n nad tělesem T. Její prvky vhodně pojmenujeme, tj. označíme, podle tohoto pravidla: Prvek, který leží v j-tém řádku (pro $1 \leqq j \leqq m$) a v k-tém sloupci (pro $1 \leqq k \leqq n$) uvažované matice označíme týmž písmenem, např. a, s indexy j, k, tedy znakem a_{jk}. Při tomto označení se pak každá matice typu m/n dá napsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ stručněji } [a_{jk}] \text{ nebo též } \|a_{jk}\| .$$

Tak např. v matici uvedené v odst. 1.2 je

$$a_{11} = 1, a_{12} = \sqrt{2}, a_{13} = -2, \dots, a_{23} = 0, a_{24} = 4 .$$

2. Vyskytnou-li se v nějaké úvaze dvě nebo více matic, značíme prvky jedné z nich např. $a_{11}, a_{12}, \dots$, kdežto druhé $b_{11}, b_{12}, \dots$, apod.

3. Matice označujeme pro stručnost jediným, obvykle velkým tučným písmenem, např.

$$\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots ,$$

popř. též s indexy, např.

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}' \quad \text{a podobně} .$$

Matice nulové označujeme zpravidla písmenem $\mathbf{O}$.

1.4. Rovnost dvou matic. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu m/n nad týmž tělesem T.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou si *rovny* a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, když každý prvek a_{jk} matice $\boldsymbol{A}$ se rovná stejnolehlému prvku b_{jk} matice $\boldsymbol{B}$ tj. platí-li vztahy

$$a_{jk} = b_{jk} \quad (\text{pro } j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Z uvedené definice rovnosti matic plyne, že (maticová) rovnost

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

zastupuje celkem mn rovností tvaru

$$\begin{array}{l} a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ \ldots,\ a_{1n} = b_{1n}\,, \\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22},\ \ldots,\ a_{2n} = b_{2n}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} = b_{m1},\ a_{m2} = b_{m2},\ \ldots,\ a_{mn} = b_{mn}\,. \end{array}$$

1.5. Úmluva. Pokud v dalších kapitolách a odstavcích nebude výslovně uvedeno jinak, budeme mlčky předpokládat, že jsme zvolili určité číselné těleso a že všechny uvažované matice jsou nad tímto tělesem T.

1.6. Poznámka o hodnosti matice. *Hodností* matice $\boldsymbol{A}$ typu m/n rozumíme, jak je známo z nauky o determinantech, takové celé nezáporné číslo p, že všechny determinanty řádu $p + 1$ vybrané z matice $\boldsymbol{A}$ mají, pokud existují, hodnotu rovnou nule, a při $p > 0$ aspoň jeden determinant řádu p vybraný z této matice má hodnotu různou od nuly.

Přitom říkáme, že determinant řádu j byl vybrán z dané matice $\boldsymbol{A}$, když byl utvořen z jejích řádků a sloupců vypuštěním některých řádků (v počtu $m - j$) a některých sloupců (v počtu $n - j$).

V nauce o determinantech se dokazují následující věty o hodnosti matice $\boldsymbol{A}$ typu m/n:

1. Pro hodnost p matice $\boldsymbol{A}$ platí vztahy

$$p \leqq m, \quad p \leqq n.$$

2. Má-li matice $\boldsymbol{A}$ hodnost p, pak z jejích m řádků (z jejích n sloupců) je právě p lineárně nezávislých, kdežto ostatní řádky (sloupce) jsou lineárními kombinacemi těchto lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Další vlastnosti hodnosti matice odvodíme v kap. 16.