Věra Radochová
Lerchův přínos k integrálnímu počtu

In: Otakar Borůvka (editor): Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy. (Czech). Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1957. pp. 516–531.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401321

VĚRA RADOCHOVÁ

LERCHŮV PŘÍNOS K INTEGRÁLNÍMU POČTU

I. *Seznam Lerchových prací, týkajících se integrálního počtu.*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše Lercha od JOS. ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148)

[18] O jistém integrálu omezeném, *Zpr. KČSN* 1886, 588—604.
[49] O integraleu' u jednog sistema totalnich diferencialnich jednačina i o jednom svojstvu determinanota, *Glas* 11 (1889), 9—20.
[55] Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations differentielles, *Věst. KČSN* 1889, 180—182.
[57] Mittheilungen aus der Integralrechnung, *Monatsh.* 1 (1890), 105—112.
[62] Nové odvození LEGENDROVA vzorce

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx\, dx}{\sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}} = a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x\, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}},$$

Rozpr. ČA 1 (1891), č. 8, 159—165.
[69] Zobecnění vzorce Frullaniova, *Rozpr. ČA* 1 (1891), č. 8, 125—131.
[72] Odvození některých vzorců z počtu integrálního, *Čas.* 21 (1892), 218—231.
[81] Sur une intégrale d'Euler, *Bull. Darboux* (2), 16 (1892) 337—343.
[83] Drobnosti z počtu integrálního, *Čas.* 22 (1893), 298—306.
[84] Généralisation du théorème de Frullani, *Věst. KČSN* 1893, č. 30, 1—6.
[85] O Catalanově stanovení mnohonásobných integrálů, *Věst. ČA* 2 (1893), 517—572.
[86] O integraci rovnic mezi třemi úplnými diferenciály, *Čas.* 22 (1893), 18—23.
[89] Poznámky k teorii omezených derivací, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 34, 1—15.
[99] Z počtu integrálního, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 9, 1—40.
[129] Úvahy z počtu integrálního, *Rozpr. ČA* 5 (1896), č. 23, 1—16.
[150] O některých integrálech omezených, *Čas.* 28 (1899), 32—36.
[164] Poznámka o jistém vzorci z počtu integrálního, *Čas.* 29 (1900), 39—41.
[165] Poznámka o některých integrálech omezených, *Čas.* 29 (1900), 28—32.
[177] Évaluation d'une integrale définie, *Giorn.* 41 (1903), 78—84.
[198] Bemerkungen über Funktionen des elliptischen Zylinders, *Jahresber.* 15 (1906), 403—404.
[200] Sur le problème du cylindre elliptique, *CR* 142 (1906), 1325—1328).
[209] Stanovení jistého mnohonásobného integrálu, *Čas.* 37 (1908), 225—230.
[212] Stanovení mnohonásobného integrálu, jenž vyjadřuje polydimensionální obsah oboru o n rozměrech omezeného danými $n + 1$ útvary prvního stupně, a některých integrálů obecnějších, *Čas.* 38 (1909), 1—5.
[213] O jednoduchém stanovení určitého integrálu omezeného, *Čas.* 39 (1910), 1—7.
[233] Příspěvky k teorii některých transcendent počtu integrálního, *Čas.* 48 (1919). 1—9. 166—188, 312—320; *Čas.* 49 (1920), 31—37, 81—91, 209—214.
[235] Příspěvky k teorii některých transcendent počtu integrálního, *Čas.* 50 (1921). 88—91, 264—277; *Čas.* 51 (1922), 77—85, 178—188.

II. *Obsah a metoda*

V celém údobí vědecké činnosti M. LERCHA se setkáváme s různými příspěvky a poznámkami k integrálnímu počtu. Tyto práce nepřinášejí zásadně nové poznatky do teorie integrálního počtu. Najdeme v nich studie speciálních a většinou v té době již známých integrálů, pro jejichž vyčíslení nebo transformace podává LERCH nové metody, často značně jednodušší než původní. Mnohdy jde též o zobecnění známých výsledků.

LERCHOVY práce z integrálního počtu mají význam hlavně po stránce metodické. Kromě běžných metod integrálního počtu setkáváme se i s použitím výsledků z teorie analytických funkcí, na př. Cauchyovy věty, o jejíž metodické ceně píše LERCH v práci [83] str. 306 toto: „... Věta Cauchyova o integraci v komplexním oboru jest instrument pro stanovení hodnot integrálů a pro studium jejich vlastností tak velkolepý, že se jím starý počet integrální redukuje aspoň na třetinu, a to při neocenitelném zisku na přehledu a systematice."

Při různých výpočtech se setkáváme u LERCHA velmi často s tím, že rovnici mezi integrály násobí vhodným výrazem a výsledek integruje. Tím se zdánlivě výpočet komplikuje, neboť z obyčejných integrálů vznikají integrály dvojnásobné. Využitím možnosti zaměnit pořadí integrování však LERCH dospívá velmi jednoduše k výsledkům (na př. v pracích [99], [150], [164]).

LERCHOVY práce z integrálního počtu se týkají jednak funkcí jedné proměnné, jednak integrálů množných. Několik drobných poznámek je věnováno diferenciálním rovnicím.

III.

Jedna z pěkných integrálních relací je vzorec

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1+\frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2-wx} x^{s-1}\,dx, \tag{1}$$

který LERCH odvozuje v první části pojednání [99]. Tato relace je zvláštním případem vzorce KUMMEROVA[1]). S tímto LERCHOVÝM výsledkem se setkáváme také v příkladech knihy E. WHITTAKER-G. WATSON, A course of modern analysis, Cambridge 1920, str. 279.

V důkazu vzorce (1) vychází LERCH od funkce

$$F(u, s) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{s-1} \cos ux\,dx,$$

která je definována pro všechna konečná u a pro všechna s, pro něž $\mathrm{Re}\, s > 0$. LERCH násobí funkci $F(u, s)$ vhodnou funkcí a integruje vzhledem k proměnné u. V získaném dvojnásobném integrálu využije možnosti záměny integračního pořadí a po několika jednoduchých substitucích a s použitím Cauchyovy věty dostává vzorec (1). Tento vzorec je LERCHOVI východiskem pro další úvahy.

1. Ze vzorce (1) získává LERCH některé vlastnosti funkce $\Phi(u, s)$, definované vzorcem:

$$\Phi(u, s) = \int_0^\infty e^{-z^2+uz} z^{s-1}\,dz.$$

Tyto vlastnosti odvozuje znovu v druhé kap. téže práce [99]. Postupuje tím způsobem, že nejprve určí diferenciální rovnici

$$2\frac{d^2x}{du^2} = u\frac{dx}{du} + sx,$$

které funkce $x = \Phi(u, s)$ vyhovuje. Z vlastností integrálů této rovnice pak dostává na př. ABELOVU relaci

$$\Phi(u, s)\,\Phi(-u, s+1) + \Phi(-u, s)\,\Phi(u, s+1) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)e^{\frac{1}{4}u^2}. \quad (2)$$

Tuto relaci LERCH převede několika jednoduchými úpravami na tvar

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2s}\,dr \int_{-1}^{1} e^{urt}(1-t^2)^{s-1}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,e^{\frac{1}{4}u^2}. \quad (3)$$

Při označení

$$E(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)}$$

a s použitím rovnice

$$\int_{-1}^{1} e^{xt}(1-t^2)^{s-1}\,dt = \sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,E\left(\frac{x^2}{4}, s-\frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

a substituce $\sqrt{x} = r$ vychází z ABELOVY relace vzorec s ní ekvivalentní

$$\int_0^\infty e^{-x} x^s E(xu, s)\,dx = e^u. \quad (5)$$

Transformací integrálu v rovnici (4) substitucí $t = -1 + 2z$ a aplikací známých vlastností funkce Γ, vychází vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!\,(s+\frac{1}{2}, n)} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s, n)}{n!\,(2s, n)} 2^n x^n,$$

$$[(s, n) = s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1);\ (s, 0) = 1],$$

odvozený již dříve KUMMEREM.[1])

V dalším LERCH používá vzorce (5) k odvození této věty:

Každá analytická funkce $f(x)$ mající uvnitř kruhu $|x| = r$ povahu funkce celistvé se dá rozvinouti v řadu tvaru

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n E(x, s+n)\,x^n,$$

při čemž koeficienty A_n jsou dány vzorcem

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} f(z)\,D_n(z, s)\,dz,$$

a řada ta konverguje uvnitř uvedeného kruhu absolutně.

Integrály vyjadřující koeficienty A_n se vztahují na kružnici kolem počátku, ležící uvnitř kružnice $|x| = r$, a veličiny D_n jsou dány vzorcem

$$D_n(y, s) = (-1)^s \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{(n-\mu)!\,y^{\mu+1}}.$$

2. Při označení

$$P(v;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}\int\limits_0^1 e^{vz}z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-\alpha-1}\,dz,$$

a za předpokladů $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\beta-\alpha)>0$, plyne ze vzorce (1) rovnice

$$P(v;\alpha,\beta)=e^v P(-v,\beta-\alpha,\beta),$$

která se vyskytuje také již u KUMMERA,[1]) kde jest odvozena z vlastností hypergeometrické řady.

Z ní plynou pro $\beta=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$, vztahy:

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^{s-1}\cos\operatorname{hyp}2uz\,dz=\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}e^{u^2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^{-s}\cos 2uz\,dz,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^{s-1}\sin\operatorname{hyp}2uz\,dz=-\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}e^{u^2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^{-s}\sin 2uz\,dz.$$

3. Obsahově i tím, že rovněž navazuje na uvedenou práci KUMMEROVU, je těmto výsledkům blízké pojednání [18]. LERCH v něm vyšetřuje integrál

$$J=\int\limits_0^\infty \Phi(x\mid v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx, \tag{6}$$

v němž

$$\Phi(x\mid v)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\cos 2n\pi v\sqrt{x},\quad \operatorname{Re}(s-1)>0. \tag{7}$$

LERCH zjistí konvergenci integrálu (6) a tím, že použije CAUCHY—POISSONOVY transformační rovnice pro funkci theta,[2]) obdrží rovnici

$$\int\limits_0^\infty \Phi(x\mid v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx=-\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s}+\int\limits_1^\infty\{\Phi(x,v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}+$$

$$+\Phi(x\mid vi)\,x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}\}\,dx.$$

Řada (7) je v intervalu $[\delta, h]$, $0<\delta<h$, stejnoměrně konvergentní; její integrací člen po členu a po jednoduché úpravě vyplyne relace

$$\int\limits_0^\infty\Phi(x\mid v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}dx=\zeta(s)\,2\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2}z^{s-1}\cos 2\pi vz\,dz,\ \zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s} \tag{8}$$

Pro $v=0$ přejde funkce $\Phi(x\mid v)$ ve funkci $\Phi_0(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$ a z relace (8) se snadno odvodí RIEMANNŮV vzorec[3])

$$\zeta(s)\,\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right) + \int_1^\infty \Phi_0(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx.$$

V druhé části pojednání [18] aplikuje LERCH relaci (8) při studiu funkce $C(s \mid v)$, definované vzorcem

$$C(s \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{n + \frac{1}{2}s - 1}{n},$$

a odvozuje zajímavou rovnici

$$C(s \mid v) = C(1 - s \mid vi)\, e^{-\pi v^2},$$

která je rovněž obsažena v KUMMEROVĚ pojednání.[1])

IV.

1. V práci [150] se LERCH nejprve zabývá důkazem vzorce

$$\int_{u+w}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2 - 2uw} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx. \tag{1}$$

Postupuje tak, že derivuje funkci

$$f(u) = e^{-2uw} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx.$$

Použitím vzorce

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ux\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-u^2}$$

a integrací dostává vzorec (1).

Často používanou metodou převedení integrálu na dvojnásobný pak odvodí LERCH ze vzorce (1) další vzorec

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \frac{dz}{u^2 + z^2} = \frac{\pi}{2u^2}(1 - e^{-u}) \tag{2}$$

a z něho částečnou integrací obdrží

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u}\, dx = \frac{1 - e^{-u}}{u} + \int_u^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}. \tag{3}$$

2. Na vzorce (2) a (3) navazuje LERCH v pojednání [164], v němž převede vzorec (3) na vztah mezi integrály dvojnásobnými a využitím možnosti záměny pořadí integračního dostává vzorec

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \operatorname{arctg} \frac{b}{x}\, dx = \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}; \tag{4}$$

(a, b jsou kladné konstanty.)

Tento vzorec LERCH znovu odvozuje v prvé části práce [177]. Postupuje tak, že určí hodnotu integrálu

$$S = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)^2 dx,$$

který je s integrálem

$$\Phi(a, b) = \int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x} \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\, dx$$

v jednoduchém vztahu

$$S = (a + b) K + 2\,\Phi(a, b); \quad K = \Phi(1,1). \tag{5}$$

Výpočtem, v němž používá běžných metod, integrace per partes a substituce, dostává jako výsledek

$$S = \pi \log \frac{(a + b)^{a+b}}{a^a\, b^b} + (a + b) K,$$

z něhož plyne pomocí relace (5) bezprostředně vzorec (4).

3. Na výsledek (4) navazují pak úvahy v druhé části pojednání [177]. Je v něm odvozena hodnota integrálu

$$T = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right) dx,$$

který je podobný integrálu S.

Po několika substitucích a úpravách LERCH nachází relaci

$$\frac{T}{a - b} = \int_{2n}^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}}; \quad n = \frac{\sqrt{ab}}{a - b}.$$

Z ní pomocí vzorce (4) při hodnotách $a = 1$, $b = q$ plyne výsledek

$$\int_{2n}^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}} = \frac{\pi}{1 - q} \log \frac{q^2}{\left(\frac{1 + q}{2}\right)^{1+q}}.$$

V.

V prvních kapitolách prací [57] a [129] se LERCH zabývá BESSELOVOU funkcí řádu nula $J_0(x)$, která je definována vzorcem

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{4^\nu (\nu!)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos a}\, da.$$

1. Pro funkci $J_0(x)$ odvozuje LERCH v práci [57] z LIPSCHITZOVA vzorce[4])

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r} J_0(\beta r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \tag{1}$$

$$(\alpha > 0;\ \beta \text{ reál.}),$$

WEBEROVU formuli[5])

$$\int_0^\infty J_0(z)\log z\,dz = \Gamma'(1) - \log 2. \tag{2}$$

Ve svém důkazu LERCH nejprve upraví integrál

$$A = \int_0^\infty J_0(z)\log z\,dz$$

tím, že zavede novou integrační proměnnou az a integrál A převede na integrál dvojnásobný; obdrží

$$A = \Gamma'(1) + \int_0^\infty e^{-a}a\,da \int_0^\infty J_0(az)\log z\,dz.$$

Aby vyčíslil dvojnásobný integrál na pravé straně, dokáže nejprve, že $\lim\limits_{N\to\infty} B_N = B$, při čemž značí

$$B_N = \int_0^\infty e^{-a}a\,da \int_0^N J_0(az)\log z\,dz, \quad B = \int_0^\infty e^{-a}a\,da \int_0^\infty J_0(a\,z)\log z\,dz.$$

Pomocí LIPSCHITZOVA vzorce LERCH vyčíslí integrál B_N a přechodem k limitě pro $N\to\infty$ dostává $B = -\log 2$.

V druhé části práce [57] odvozuje LERCH jako důsledek LIPSCHITZOVY formule vzorec

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z+u)}{z+u} J_0(z)\,dz = \frac{\pi}{2} J_0(u), \quad (u > 0).$$

2. K vlastnostem BESSELOVY funkce $J_0(u)$ se vrací LERCH v pojednání [129]. Po vhodné transformaci dvojnásobného integrálu

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x^2+y^2, xy)\,dxdy$$

nachází vzorec

$$\int_0^\infty u^{s-1}du \int_u^\infty \frac{e^{-av}\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{4a^s},$$

při čemž $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} s > 0$ a v případě $\operatorname{Re} a = 0$ je $0 < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$.

Pro $a = i$ plyne odtud pro funkci $J_0(u)$ vzorec

$$\int_0^\infty J_0(u)\,u^{s-1}\,du = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 \sin\frac{s\pi}{2}}{2\pi}; \tag{3}$$

při tom je $0 < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$. Když s je reálné číslo, pak integrál vlevo existuje pro $0 < s < \frac{3}{2}$.

Derivací vzorce (3) v čísle $s = 1$ plyne WEBERŮV vzorec (2). Mimo to jsou v práci [129] odvozeny pomocí rovnice (3) ještě další vlastnosti funkce $J_0(u)$, na př. relace

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (w + ix)\, \Gamma (w + ix)^2}{(w + ix)\, v^{w+ix}}\, dx = 4\pi^2 \int_{2\pi}^{\infty} J_0(x) \frac{dx}{x},$$

$$\left(v > 0,\ 0 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\right).$$

VI.

V roč. XVI (1905) časopisu *Monatshefte für Math. u. Physik* se zabýval G. HUBER integrálem

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{a - b \sin^2 \varphi}\, d\varphi \quad (a > 0,\ a > b).$$

Na tento HUBERŮV článek navázal A. PLESKOT[6]) a podal dvojí způsob vyčíslení tohoto integrálu. První výpočet je proveden obvyklými metodami integrálního počtu, druhý je proveden převedením na výpočet integrálu funkce komplexní proměnné po uzavřené křivce. Na druhou metodu navazuje K. PETR ve své poznámce[7]) a ukazuje, že je možno ji zjednodušit.

S článkem G. HUBERA byl LERCH obeznámen již dříve a uvedený integrál vyčíslil již za svého pobytu ve Freiburgu. Toto řešení reprodukuje LERCH v druhé části článku [213]. Způsob výpočtu je jednodušší než PLESKOTŮV, i když některé myšlenky jsou podobné. Na př. oba autoři začínají výpočet stejnou substitucí, avšak LERCH dospívá k výsledku značně rychleji než PLESKOT.

Velmi elegantní výpočet zmíněného integrálu je podán v prvé části článku [213]. LERCHOVA metoda výpočtu svou jednoduchostí značně předčí jak obě metody PLESKOTOVY, tak metodu PETROVU. Myšlenkový postup je tento:

V integrálu

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{a - b \sin \varphi}\, d\varphi$$

se zavede ve jmenovateli dvojnásobný úhel, takže

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{a - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Vhodným využitím vlastností jistých nekonečných řad se okamžitě vyčíslí integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - r^2) \log (1 - 2\varrho \cos 2\varphi + \varrho^2)\, d\varphi}{1 - 2r \cos 2\varphi + r^2} = \pi \log (1 - r\varrho)$$

$$(|r| < 1, \quad |\varrho| < 1);$$

z něho limitním přechodem pro $\varrho \to 1$ a po krátké úpravě vychází hledaný výsledek:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{a - b \sin^2 \varphi} = -\frac{\pi}{2a} \frac{\log \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}}} \cdot (a > 0, a > b).$$

VII.

Zobecněním vzorce FRULLANIOVA se zabývá LERCH v pojednáních [69] a [84].

1. V práci [69] LERCH nejprve velmi jednoduše dokazuje FRULLANIŮV vzorec

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\infty)] \log \frac{b}{a},$$

v němž f značí funkci, která má v intervalu $[0, \infty)$ integrál a v bodech $x = 0$, $x = \infty$ je spojitá.

Potom odvozuje obecnější vzorec

$$\int_a^b [f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x)]\, dx = A \log \varphi'(a) - B \log \varphi'(b),$$

v němž značí $A = \lim\limits_{x \to a} (x - a) f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b} (x - b) f(x)$.

LERCH předpokládá, že funkce $\varphi(x)$ je ohraničená a spojitá funkce v intervalu (a, b), vyhovující podmínkám $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, a že má v uvedeném intervalu kladnou derivaci $\varphi'(x)$, která má integrál v $[a, b]$. Dále se předpokládá, že $f(x)$ má v intervalu $[a, b]$ integrál a hodnoty A, B jsou konečné.

Na jednoduchý důkaz zobecněného vzorce navazují některé jeho aplikace, v nichž LERCH zejména ukazuje jak se vzorec hodí k vyjádření limit nespojitých funkcí pomocí integrálů.

2. Jiný způsob zobecnění FRULLANIOVA vzorce je podán v práci [84], kde je elementárními metodami dokázána tato věta:

Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ jsou kladné, navzájem různé konstanty. Nechť $f(x)$ má integrál v každé části intervalu $[0, \infty)$ a v čísle 0 má derivace až do řádu $p - 1$. Nechť pro funkci $\varphi(x)$ definovanou rovnicí

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \ldots + f^{(p-1)}(0) \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \varphi(x)\, x^{p-1}$$

platí

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0.$$

Předpokládejme, že existuje vlastní limita $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^{p-1}}$.

Pak platí

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p} \begin{vmatrix} f(a_0 x) & f(a_1 x) & \ldots\ldots & f(a_p x) \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \ldots\ldots & a_p^{p-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[A - \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}\right] \begin{vmatrix} a_0^{p-1} \lg a_0 & a_1^{p-1} \lg a_1 & \ldots\ldots & a_p^{p-1} \lg a_p \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \ldots\ldots & a_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

VIII.

Ve svém spise o eliptických integrálech odvodil LEGENDRE vzorec

$$\int\limits_0^\pi \frac{\cos nx \, dx}{\sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}} = a^n \int\limits_0^\pi \frac{\sin^{2n} x \, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}, \; (a > 0, \; n > 0 \text{ přir. číslo}).$$

Tímto vzorcem se zabýval také JACOBI[8]). V pojednání [62] ukazuje LERCH jednoduché odvození relace obecnější, která zahrnuje uvedený vzorec. Při odvození LERCH nejprve vhodně transformuje integrál

$$J = \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \, e^{\alpha i \varphi} (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi,$$

$$(0 < a < 1, \; \mathrm{Re}\, \beta > 0, \; \mathrm{Re}\,(\alpha - \beta) > -1, \; \alpha \text{ celé});$$

$f(t)$ značí jednoznačnou analytickou funkci uvnitř kružnice $|t| = 1$, která má v této oblasti pouze konečný počet jednoduchých pólů, z nichž žádný neleží v intervalu $[0, a)$.

Potom pouhým použitím Cauchyovy věty a speciální volbou $f(t) = t^n$ plyne

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{ni\varphi} (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi = 2\sin\beta\pi \int\limits_0^a t^{n-\beta} (a - t)^{\beta - 1} (1 - at)^{\beta - 1} dt.$$

Tento výsledek lze psát ve tvaru

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi\,(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1}\,d\varphi = \sin\beta\pi \int_0^a t^{n-\beta}\,(a-t)^{\beta-1}\,(1-at)^{\beta-1}\,dt,$$

z něhož pro $\beta = \frac{1}{2}$ a $t = a\sin^2 x$ plyne LEGENDRŮV vzorec.

IX.

Kromě uvedených nových důkazů, zobecnění a původních výsledků najdeme v LERCHOVÝCH pracích týkajících se integrálního počtu další drobné důkazy a zobecnění známých vzorců.

1. Na př. klasické EULEROVY vzorce

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}; \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{cotg} a\pi$$

jsou předmětem LERCHOVA studia v pojednáních [78] a [81]. V obou pracích je použito téže důkazové metody. Při odvození uvedených vzorců LERCH vychází od integrálu

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{ai\varphi}\,z^{a-1}\,dz}{1 - ze^{i\varphi}}, \; (a = \alpha + i\beta,\, 0 < \alpha < 1),$$

o němž dokáže, že nezávisí na φ pokud $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Z tohoto výsledku odvodí uvedené vzorce jednak tím způsobem, že stanoví limitu integrálu pro $\varphi = 0$, jednak volbou speciálních hodnot φ a porovnáním výsledků.

Kromě EULEROVÝCH vzorců vychází tímto způsobem rovnice

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{1 - ze^{i\varphi}} = \frac{\pi\,e^{a i(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi} \; (0 < \varphi < 2\pi).$$

Těchto výsledků použil LERCH ve své práci [67][9]) při odvození vzorce

$$\frac{2\pi i\,e^{2w\pi i v}}{e^{2w\pi i} - 1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{w-k}.$$

2. Důkazy několika známých vzorců i původní výsledky podává LERCH v práci [83]. Je to jednak nový důkaz CAUCHYOVA vzorce

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \sin(x+y)\,dx\,dy = \frac{\pi k}{4\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

obdobného vzorce

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-k\sqrt{xy}} \cos(x+y)\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}} = 2\,\frac{\log\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}}.$$

Dále LERCH uvádí velmi jednoduché odvození pomocí CAUCHYOVY věty vzorce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi} f(x)\, dx}{(c_1^2 + x^2)(c_2^2 + x^2)\dots(c_m^2 + x^2)} = \pi \frac{e^{-|a|c_1} f(\pm c_1 i)}{c_1 (c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_1^2)\dots(c_m^2 - c_1^2)} +$$

$$+ \pi \frac{e^{-|a|c_2} f(\pm c_2 i)}{c_2 (c_1^2 - c_2^2)(c_3^2 - c_2^2)\dots(c_m^2 - c_2^2)} + \dots;$$

předpokládá se, že analytická funkce $f(x)$ má všechny singulární body buď pod nebo nad reálnou osou, $a > 0$ jsou-li nad osou, $a < 0$ jsou-li pod ní. U výrazu $\pm c_\nu i$ platí znamení $+$ má-li funkce singularity v horní půlrovině $-$ má-li je v dolní půlrovině.

Tento LERCHŮV výsledek[10]) je zobecněním DIRICHLETOVA integrálu[11])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cxi}\, dx}{(l^2 + x^2)(k + ix)^a} \frac{1}{(k_1 + ix)^{a_1}} \frac{1}{(k_2 + ix)^{a_2}} \cdots \frac{1}{(k_n + ix)^{a_n}} =$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k + l)^a} \frac{1}{(k_1 + l)^{a_1}} \cdots \frac{1}{(k_n + l)^{a_n}},$$

$$(k_1, k_2, \dots, k_n > 0).$$

3. Derivace integrálu podle parametru je předmětem pojednání [89]. LERCH v něm odvozuje větu:

Nechť funkce $F(x)$ má v intervalu $[a, b]$ integrál a nechť v intervalu $[\alpha, \beta]$, který je jeho částí, je $F(x)$ spojitá a platí v něm

$$\lim_{x' \to x} \frac{F(x) - F(x')}{(x - x')^\sigma} = 0 \quad (0 < \sigma < 1)$$

nechť dále existuje pro $\alpha < z < \beta$ integrál

$$\int_a^z [F(x) - F(z)](z - x)^{-\sigma - 1}\, dx.$$

Potom platí

$$\frac{d}{dz} \int_a^z F(x)(z - x)^{-\sigma}\, dx = F(z)(z - a)^{-\sigma} - \sigma \int_a^z [F(x) - F(z)](z - x)^{-\sigma - 1}\, dx$$

$$(\alpha < z < \beta).$$

Důkaz spočívá na vyšetřování podílu

$$\frac{\varphi(z + \triangle z) - \varphi(z)}{\triangle z} = \frac{\triangle \varphi(z)}{\triangle z}$$

kde

$$\varphi(z) = \int_a^z F(x)(z - x)^{-\sigma}\, dx.$$

LERCH si tento podíl nejprve vhodně upraví a limitním přechodem pro $\triangle z \to 0$ dostává hledaný výsledek.

Použitím vztahů získaných při důkazu uvedené věty odvozuje LERCH potom pro funkci $F(x)$, o níž předpokládá pouze spojitost v intervalu $[\alpha, \beta]$ relaci

$$\lim \frac{\triangle \varphi(z)}{(\triangle z)^{1-\sigma}} = 0 \qquad (\alpha < z < \beta)$$

$$\text{kde opět } \varphi(z) = \int_a^z F(x)(z-x)^{-\sigma}\, dx.$$

X.

Tři práce z integrálního počtu jsou věnovány výhradně množným integrálům.

1. Po prvé se jimi LERCH zabývá v práci [85], k níž mu dala podnět práce CATALANOVA[12]), jak sám píše:

„Ve svém zajímavém pojednání ‚Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples' (*Liouvilleův žurnál*, sv. 4., 1839) pan Eugen CATALAN podal metodu stanoviti mnohonásobné integrály, která v případě integrálů dvojnásobných a trojnásobných jest úplně jasná, spočívajíc na představách geometrických a mechanických. V případě obecném pak má spíše povahu divinace než přesného důkazu. Mám za to, že bude prospěšno vyložiti na tomto místě metodu zasloužilého učence belgického a podati přesný důkaz její v případě obecném."

V prvé části článku [85] vychází LERCH od dvojného integrálu, k němuž vede komplanace trojosého elipsoidu, a transformuje jej na jednoduchý integrál eliptického typu. Své úvahy pak zobecňuje na množný integrál

$$A = \int\int\dots\int \sqrt{\frac{1 - a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - \dots - a_n^2\xi_n^2}{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n \; [a_\nu \in (0,1)]$$

nad oborem $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \leqslant 1$.

Postupuje tak, že si označí

$$\sqrt{\frac{1 - a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - \dots - a_n^2\xi_n^2}{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2}} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$$

a zkoumá integrál

$$A_x = \int\int\dots\int \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n \tag{1}$$

nad oborem $\mathfrak{A}_x$ daným nerovností

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \leqslant x$$

kde $x > 1$.

Stanoví hodnotu diferenciálu

$$dA_x = A_{x+dx} - A_x$$

a po dosti složitých úpravách dochází ke vzorci

$$A = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}\left\{1 + \int_1^\infty \left[1 - \frac{(x^2-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\dots(x^2-a_n^2)}}\right]dx\right\}. \tag{2}$$

Druhá část pojednání [85] navazuje bezprostředně na výsledky CATALANOVY. LERCH zpřesňuje formulaci CATALANOVY věty:

Mějme integrál

$$A = \int\int \dots \int F(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) f[\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)] \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n,$$

jehož integrační obor je definován nerovnostmi

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \leqslant 0, \quad \xi_k \geqslant 0, k = 1, 2, \dots n.$$

Nechť pro dané hodnoty $\beta > \alpha$ platí:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \alpha, \text{ pro } \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \beta, \text{ pro ty body } (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n), \text{ pro něž } \psi = 0;$$

dále nechť obor $\mathfrak{A}_v$ definovaný nerovností

$$\varphi \leqslant v$$

obsahuje jediný bod $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$, je-li $v = \alpha$, ale splývá s integračním oborem, je-li $v = \beta$;
dále předpokládejme, že integrál

$$\int\int \dots \int F(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

přes obor

$$\xi_k \geqslant 0, \ \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \leqslant v$$

dovedeme stanovit jako funkci $B(v)$ proměnné v.

Potom platí

$$A = \int_\alpha^\beta f(v) \, dB(v). \tag{3}$$

Poměrně jednoduchý důkaz této věty spočívá na obdobné metodě jako důkaz vzorce (2) v prvém odstavci.

LERCH označí

$$A_v = \int\int \dots \int F(\xi_1, \dots \xi_n) f[\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)] \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

přes obor

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \leqslant v, \quad \xi_k \geqslant 0$$

a stanoví $dA_v = A_{v+dv} - A_v$.

Z vlastností integrálu (1) a z předpokladů věty dostává výsledek (3).

2. K práci [209] dala LERCHOVI podnět otázka H. LAURENTA, položená v časopise L'Intermédiaire des Mathematiciens, XIV (1907) str. 124. Šlo v ní o výpočet integrálu

$$H = \int\int \dots \int dx_1 \, dx_2 \dots dx_n$$

nad integračním oborem, jenž je definován podmínkami

$$-\frac{1}{2} \leqslant x_\nu \leqslant \frac{1}{2}; -\alpha \leqslant x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant \alpha; \ \nu = 1, 2, \dots n; \ \alpha > 0 \text{ konstantní.}$$

LERCH určuje hodnotu integrálu H použitím DIRICHLETOVA faktoru nespojitosti[13]) a dostává jako výsledek vzorec

$$H = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - 2\mu + 2\alpha)^n \, sgn\,(n - 2\mu + 2\alpha).$$

Geometricky je hodnota integrálu H obsah jistého n-rozměrného útvaru.

Podobným problémem, stanovit obsah n-rozměrného útvaru, omezeného $n + 1$ nadrovinami, se zabývá LERCH v pojednání [212]. Nejprve odvozuje výsledek obecnější:

V n-rozměrném euklidovském prostoru budiž dáno $n + 1$ nadrovin

$$P_0 = 0,\ P_1 = 0, \dots P_n = 0;\ P_\nu = a_{\nu 0} x_0 + a_{\nu 1} x_1 + \dots + a_{\nu n} x_n.$$

Předpokládá se, že obor Ω definovaný nerovnostmi

$$P_0 \geqslant 0,\ P_1 \geqslant 0, \dots P_n \geqslant 0,$$

je celý v konečnu a že

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Pak platí vzorec

$$\int\int \dots \int P_0^{s_0 - 1} P_1^{s_1 - 1} \dots P_n^{s_n - 1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$
$$= \frac{\Gamma(s_0)\,\Gamma(s_1) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(s_0 + s_1 + \dots + s_n)} \; \frac{A^{s_0 + s_1 + \dots + s_n - 1}}{A_{00}^{s_0} A_{10}^{s_1} \dots A_{n0}^{s_n}}, \tag{4}$$

kde se integruje přes obor Ω, $s_0, s_1, \dots s_n$ jsou libovolné konstanty, pro něž $\mathrm{Re}\, s_\nu > 0$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots n$), $A_{00}, A_{10}, \dots A_{n0}$ jsou subdeterminanty prvků prvního sloupce determinantu A.

Při důkazu postupuje LERCH tak, že nejprve transformuje integrál na levé straně vzorce (4) substitucí

$$\frac{P_1}{P_0} = z_1,\ \frac{P_2}{P_0} = z_2, \dots \frac{P_n}{P_0} = z_n$$

v integrál

$$\int\int \dots \int P_0^s z_1^{s_1 - 1} z_2^{s_2 - 1} \dots z_n^{s_n - 1} \frac{dz_1\, dz_2 \dots dz_n}{A}$$
$$(s = s_0 + s_1 + \dots + s_n)$$

kde jsou všechny integrace od nuly do nekonečna.

Jednoduchou úpravou a použitím vzorce

$$\int_0^\infty e^{-ux} x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{u^s}$$

pro $u = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu 0} z_\nu$ dostane vzorec (4).

Pro $s_0 = s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$, je hodnota uvedeného integrálu rovna obsahu integračního oboru Ω.

XI.

Ve svých spisech věnuje LERCH několik poznámek také diferenciálním rovnicím. Jsou v nich buď odvozeny známé vztahy (práce [86]), nebo jejich drobné doplňky ať už v teorii jedné diferenciální rovnice, nebo systému (práce [49], [55], [198], [200]).

BRIOT a BOUQUET uvedli ve svém pojednání[14]) větu, že diferenciální rovnice, $y' = f(x, y)$, která má holomorfní integrál s předepsanými počátečními podmínkami $y = y_0$ pro $x = x_0$, nemá žádné další řešení s týmiž počátečními podmínkami ani v okolí bodu x_0 neholomorfní. LERCH ve své práci [55] podává jednoduchý důkaz této věty zobecněné pro systém dvou rovnic.

Vlastnosti integrálů diferenciální rovnice

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2\,m \cos 2\,x + n)\,\psi = 0$$

se zabývá LERCH v pojednáních [198], [200]. Při integraci této diferenciální rovnice se má určit parametr n tak, aby jedno řešení bylo periodické, a pak určit druhé řešení neperiodické.

Určení hodnoty n převedl HEINE na výpočet řetězových zlomků. Jeho metoda však selhává pro velká n. LERCH ji upravil tak, že je použitelná i pro případ $n = 100{,}00505$, $m = -1$, a určil deset prvních koeficientů periodického řešení.

Poznámky

[1]) E. KUMMER, De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis, *Journal für die reine und angew. Math.* (Crelle), 17 (1837), 228—242.

[2]) Podrobně o CAUCHY-POISSONOVÝCH transformačních rovnicích viz v LERCHOVÝCH spisech: Ze základů theorie funkcí eliptických, *Věst. ČA* 5 (1897), [130], Eliptické funkce, *Spisy PF* Brno, 1926, [237].

[3]) B. RIEMANN, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Größe, *Monatshber. der Ak. der Wissensch. zu Berlin*, 1859.

[4]) R. LIPSCHITZ, Über die Darstellung gewisser Functionen durch die Eulersche Summenformel, *Journal f. d. reine u. angew. Math.* (Crelle), 56 (1859).

[5]) H. WEBER, Über die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme, *Journal für d. reine u. angew. Math.* (Crelle) 75, (1873), 75—105.

[6]) A. PLESKOT, O jistém integrálu omezeném, *Čas. pro pěst. mat. a fys.* 1909, 427.

[7]) K. PETR, Poznámka ku předcházejícímu článku, *Čas. pro pěst. mat. a fys.* 1909, 434.

[8]) G. JACOBI, Formula transformationis integralium definitorum, *Journal f. d. reine u. angew. Math.* (Crelle), 15 (1836), 1—26.

[9]) M. LERCH, Sur une série, *Jorn. de Teix.* 10 (1891), 103—105.

[10]) Viz Encyklopädie der math. Wiss. II, 1 Leipzig 1889—1916, str. 186.

[11]) LEJEUNE-DIRICHLET, Note sur les intégrales définies, *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* (Crelle) 4, (1829), 94—98.

[12]) E. CATALAN, Mémoire sur la reduction d'une classe d'intégrales multiples, *Journ. math. p. et appl.*, IV, (1839), 336.

[13]) O DIRICHLETOVĚ faktoru nespojitosti viz na př. R. COURANT-D. HILBERT, Methoden d. mathematischen Physik, Berlin 1924, str. 65.

[14]) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Paris, sv. XXXVI.