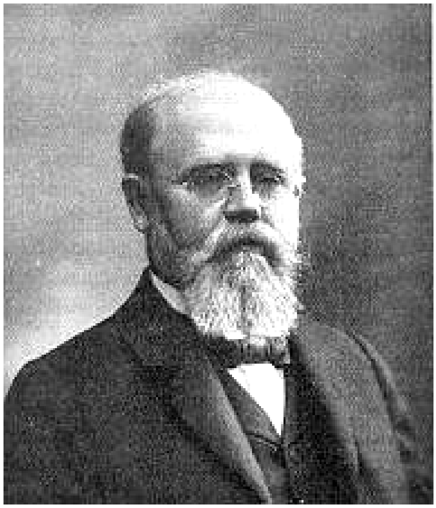

Emanuel Czuber (1851–1925)

Obrázek byl publikován v článku [Dol] a je dostupný na internetové adrese http:// www.math.muni.cz/~sisma/dthb/index.html.

5. Emanuel Czuber

5.1 Úvod

Autor této knížky se domnívá, že pražský rodák Emanuel Czuber patřil v první čtvrtině dvacátého století k předním evropským statistikům, v českých zemích však není příliš znám a podle dostupných pramenů ani v cizině není jeho osud o mnoho lepší. Monografie o něm asi dosud neexistuje, v biografických přehledech [HS] a [JK] není uveden, takže asi nejpodrobnějšími studiemi o Czuberovi obsahujícími i seznam jeho prací jsou [Dol] a příslušná kapitola v [Ott] (str. 500–521), v češtině pak příslušná část v knize [Šiš], str. 95 a násl.[204]

V této kapitole budou nejprve shrnuta základní fakta, na jejichž základě byl zformulován shora uvedený názor o významu Emanuela Czubera pro evropskou statistiku. Tato část kapitoly má bibliografický charakter a neobsahuje rozbory jednotlivých prací; vzhledem k tématické šíři Czuberových odborných zájmů není uspořádána chronologicky, ale tématicky. Ve druhé části této kapitoly bude ukázáno, jak Czuber ve své učebnici teorie pravděpodobnosti vykládá problém tzv. morální střední hodnoty a v souvislosti s tím tzv. petrohradský problém. Tyto problémy jsou dnes málo známé, ale v historii teorie pravděpodobnosti sehrály jistou roli a zabývali se jimi přední matematici (např. Laplace a Poisson); v této knížce už o nich byla zmínka v souvislosti s pracemi A. Pánka. Jeví se nám proto jako zajímavé ukázat, jak tyto otázky byly vykládány v první čtvrtině dvacátého století v učebnici, která dosáhla čtyř vydání (nepočítáme-li dotisky) a nepochybně byla studována i u nás.

5.2 Základní životopisné údaje

Emanuel Czuber se narodil 19. I. 1851 v Praze, kde také vystudoval na německé technice. Zde pak působil nejprve jako asistent na katedře praktické geometrie[205] u prof. Kořistky a v r. 1876 se habilitoval jako soukromý docent pro teorii a praxi vyrovnávacího počtu; od r. 1875 až do svého jmenování profesorem v Brně učil na 2. německé státní vyšší reálce v Praze. V r. 1886 se stal profesorem matematiky na německé technice v Brně; jeden rok (1890/91) zde byl rektorem. V r. 1891 se stal profesorem matematiky na

[204] Kniha [Šiš] neobsahuje Czuberovu bibliografii.
[205] Podle [Dol], str. 288: *„Lehrkanzel für Praktische Geometrie".*

technice ve Vídni, kde působil až do svého onemocnění v r. 1919[206]. Zavedl zde výuku pojišťovnictví; jeden rok (1894/95) byl rektorem. Zemřel 22. VIII. 1925 v Gniglu u Salcburku.

Jak už bylo řečeno (viz paragraf 1.6), v knize [Dep] na str. 274 je o Czuberovi uvedeno: *„Český odrodilec (původním jménem Čubr, které si postupně předělal na Čuber a pak Czuber).“* Podrobnější údaje o Czuberovu národnostním vývoji a některých jeho pozdějších názorech lze najít v článku [Mál] a v příslušné kapitole v knize [Šiš]; uveďme zde pouze, že Emanuel Czuber byl jako student (ještě jako Čubr) členem Jednoty českých mathematiků a na slavnostním shromáždění této Jednoty v březnu 1872 pronesl přednášku. Napsal rovněž několik českých článků do Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[207]; poslední z nich (v r. 1874) už publikoval pod jménem Čuber a když se v r. 1876 stal redaktorem časopisu „Technische Blätter“, je už na titulní stránce uvedeno jeho jméno jako Czuber. Je tedy zřejmé, že Czuber prošel jistým „národnostním“ vývojem, přesto však se nám označení „český odrodilec“ jeví jako příliš příkré. V článku [Dol] na str. 291 se o Czuberovi píše: *„Czuber war ein Österreicher von altem Schrot und Korn und hing mit inniger Liebe an seinem Vaterlande; der Zerfall der alten Monarchie traf ihn äußerst schwer.“*[208] Je tedy možné, že Czuber se cítil být občanem rakousko-uherské monarchie a národnostní otázka pro něj nebyla důležitá, takže ji nepojímal tak ostře, jak byla u nás tehdy chápána (a jak je někdy chápána dodnes).

Pro život Emanuela Czubera jistě nebylo bez významu, že jeho dcera Berta (1879–1979) zasáhla do dějin habsburského rodu a tím i do evropských dějin na nejvyšší úrovni, neboť v r. 1909 se s ní tajně oženil arcivévoda Ferdinand Karl (1868–1915), mladší bratr následníka trůnu Franze Ferdinanda (1863–1914)[209]. Pro tento hierarchicky nerovný sňatek byl arcivévoda Ferdinand Karl zbaven šlechtictví a žil pak jako soukromník Ferdinand Burg v jižních Tyrolích a v Mnichově, kde také zemřel; jeho žena ho přežila o více než půl století.

[206] Penzionován byl v r. 1921
[207] Jejich seznam viz [Mál], str. 97, [Šiš], str. 96.
[208] *„Czuber byl typický poctivý Rakušan a lnul upřímnou láskou ke své vlasti; rozpad staré monarchie ho zasáhl mimořádně těžce“.*
[209] Podle [Ham] se Berta a Ferdinand Karl seznámili na plesu vídeňské techniky, nad kterým Ferdinand Karl převzal záštitu; na str. 126 v [Ham] je také fotografie této dvojice.

5.3 Dílo Emanuela Czubera

Jak už bylo řečeno, důkladné zpracování Czuberova díla dosud asi nebylo provedeno, zdá se však, že ho lze rozdělit do několika tématických okruhů, které se pochopitelně navzájem překrývají. V tomto paragrafu se pokusíme podat přehled hlavních Czuberových publikací v jednotlivých oblastech.

5.3.1 Pravděpodobnost a statistika

Jak už bylo řečeno (viz paragraf 1.6), Czuber byl prvním matematikem působícím v českých zemích a publikujícím v oblasti teorie pravděpodobnosti původní vědecké práce, které došly uznání v evropských matematických kruzích; uveďme zde proto přehled (možná neúplný) jeho publikací z této oblasti do r. 1891 (tj. do jeho odchodu do Vídně)[210]:

1) *Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen.* In: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. T. 62 (1878), č. 3, str. 267–284.

Z plného názvu časopisu je zřejmé, že se jednalo o časopis podobného zaměření, jaký u nás představoval Časopis pro pěstování matematiky. Czuberův článek se vztahuje k podobnému tématu jako článek A. Pánka (paragraf 4.3.1, článek č. 3) napsaný prakticky ve stejné době. Czuberův výklad tzv. morální střední hodnoty bude podán v paragrafu 5.4.

2) Překlad knihy belgického matematika Antoina Meyera (1802–1857) *„Cours de calcul des probabiltés"*, Bruxelles 1874; tento překlad vyšel pod názvem *„Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung"* v r. 1879 v Lipsku (Teubner) a má rozsah 554 stran[211].

Meyerova kniha vyšla v r. 1874 v Bruselu; podle Czuberovy předmluvy vznikla na základě rukopisu přednášek, které Meyer konal v letech 1849–

[210] Další významná Czuberova publikace z tohoto období je uvedena v paragrafu 5.3.3.
[211] Šišma ([Šiš], str. 99) soudí, že tento překlad mohl souviset s Czuberovým jmenováním korespondenčním členem Belgické společnosti věd se sídlem v Lutychu, které proběhlo v tomtéž roce.

1857 na univerzitě v Lutychu[212]. V německém překladu provedl Czuber četné změny a dvě kapitoly zcela přepracoval[213].

3) *Das Petersburger Problem.* In: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. T. 67 (1882) č. 1, str. 1–28.

Problematika článku připomíná článek A. Pánka, o kterém byla zmínka už při prvním Czuberovu článku; Pánek sice tzv. petrohradský problém přímo v názvu článku neuvádí, ale v první části článku na str. 74 a násl. o něm mluví. Czuberův výklad uvedené problematiky bude podá v paragrafu 5.4.

4) *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte.* Lipsko, Teubner, 1884, 244 stran.

V r. 1902 vyšel v Paříži[214] francouzský překlad této Czuberovy knihy. Název překladu byl *„Probabilités & moyennes géometriques"*, překladatelem byl Herman[215] Schuermans *„du Corps d'État-Major Belge"* a předmluvu napsal Charles Lagrange, *„Membre de l'Académie royale des Sciences de Belgique"*. Zdá se tedy, že Czuberovy přátelské vztahy s belgickými matematiky pokračovaly i po překladu Meyerovy knihy.

Podle [Dol], str. 289 byl Czuber prvním autorem, který podal systematický výklad geometrických pravděpodobností[216]. Czuber v předmluvě uvádí celou řadu jmen autorů, na které navazuje[217], za nejdůležitějšího pak považuje M.

[212] Podle Czuberovy předmluvy připravil knihu k vydání prof. Dr. F. Folie, *„Administrateur – Inspecteur der Universität Lüttich"*.

[213] Podle Czuberovy předmluvy to byly VIII. kapitola věnovaná vyrovnávacímu počtu a IX. kapitola věnovaná použití teorie pravděpodobnosti při studiu úmrtnosti a podobných otázek.

[214] Kniha vyšla v nakladatelství *„Librairie Scientifique A. Hermann, Libraire de S. M. le Roi de Suède et Norwège"*.

[215] Na titulní stránce překladu je na konci jména „Herman" skutečně jen jedno „n".

[216] [Dol], str. 289 o této Czuberově knize píše: *„ ... in welchem er als erster eine systematische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten bei geometrischen Beobachtungen und den aus ihnen abzuleitenden annähernd richtigsten Mittelwerte bietet ..."*.

[217] Na str. III–IV jsou jmenováni Buffon, Laplace, Colonel A. R. Clarke, H. Mc'Coll, E. B. Seitz, J. J. Sylvester, S. Watson, Rev. J. Wolstenholme, W. S. B. Woolhouse, E. Barbier, C. Jordan, E. Lemoine, L. Lalande.

W. Croftona (1826–1915)[218], jehož metody se podle Czubera vyznačují elegancí a vysokým stupněm obecnosti[219].

5) *Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.* Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 90 (1885), 719–742.

Tuto práci jsme neviděli.

6) *Zum Gesetz der grossen Zahlen.* Praha, 1889, Verlag von H. Dominicus. 40 stránek.

Práce má podtitulek *„Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brünner Lotterie vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung“*. Czuber zde na materiálu tvořeném výsledky losování v loterii[220] v Praze v letech 1754–1886 a v Brně v letech 1771–1886 experimentálně ověřuje platnost zákona velkých čísel (dnes bychom asi spíše řekli: Bernoulliovy věty).

Porovnáme-li témata prvních Czuberových pravděpodobnostních prací s tématy prací Pánkových, které byly napsány ve stejné době (viz paragraf 4.3.1), pak zjišťujeme, že první tři Czuberovy práce (ponecháme-li stranou překlad Meyerovy knihy) jsou věnovány týmž tématům, kterým se věnoval i Pánek (morální střední hodnota, petrohradský problém, geometrické pravděpodobnosti). Nevíme, byla-li tato témata v oné době všeobecně populární nebo jednalo-li se o nějakou specifiku pražského matematického prostředí, zdá se nám však málo pravděpodobné, že by se jednalo o shodu čistě náhodnou.

I když se domníváme, že Czuber získal evropský věhlas asi až v době svého vídeňského působení, z uvedených publikací je zřejmé, že jeho odborné výsledky v oblasti teorie pravděpodobnosti byly známé a uznávané i za hranicemi českých zemí již v době jeho působení u nás; podle našeho názoru o tom svědčí hlavně vydání francouzského překladu jeho knihy o geometrických pravděpodobnostech v Paříži v r. 1902[221].

---

[218] Podrobnosti o Croftonovi a jeho geometricko-pravděpodobnostních pracích lze najít v [SPJ].

[219] Na str. IV Czuber píše: *„Allen voran aber muss M. W. Crofton, Professor an der Kriegsakademie in Woolwich, genannt werden ... Croftons Methoden zeichnen sich durch Eleganz und einen hohen Grad von Allgemeinheit aus ...“*.

[220] Czuberův pravděpodobnostní výklad základů loterijní problematiky jsme už uvedli v paragrafu 4.4.2.1.

[221] Geometrické pravděpodobnosti představovaly v té době aktuální téma. V r. 1889 publikoval francouzský matematik J. L. F. Bertrand knihu *„Calcul des probabilités“*, ve které se objevuje na str. 4–5 úloha na geometrickou pravděpodobnost známá dnes pod názvem „Bertran-

Hlavní Czuberův význam v oblasti teorie pravděpodobnosti však asi nespočívá v pracích, které napsal v době svého působení v českých zemích, nýbrž v autorství učebnic *„Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen“* (Lipsko 1903, další vydání 1908-10, 1914, 1924)[222] a *„Die statistischen Forschungsmethoden“* (Vídeň 1921, další vydání 1927, 1938); jak je vidět z uvedených dat, tyto učebnice opakovaně vycházely v rozmezí více než třiceti let[223]. Pokud se druhé z uvedených učebnic týče, Czuber v předmluvě uvádí, že hlavním podnětem k jejímu sepsaní byla kniha anglického statistika G. U. Yuleho *„An Introduction to the Theory of Statistics“*, která poprvé vyšla v r. 1911 a během I. světové války byla vydána ještě třikrát[224]; je pozoruhodné, že tato učebnice, kterou Czuber psal v podmínkách poválečné střední Evropy (předmluva je datována 4. IV. 1920) a ve věku 69 let, byla vydána znovu ještě v r.1938.

5.3.2 Historie a filozofie teorie pravděpodobnosti

Tato problematika zřejmě zajímala Czubera celý život, jak je vidět z letopočtů vydání jeho knih *„Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen“* (In: Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung, 1899) a *„Die philosophische Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung“* (Leipzig 1923). V této souvislosti uveďme, že v knize [Ha2] v předmluvě na str. xvi je první z uvedených Czuberých knih uvedena jako jedna z klasických prací, na které kniha [Ha2] navazuje[225].

Czuber věnoval dějinám matematiky i svoji vídeňskou rektorskou inaugurační řeč, která vyšla v r. 1894 pod názvem *„Aphorismen zur Entwicklung und Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert“*, a některé menší práce; v souvislosti s jeho činností v oblasti pojistné matematiky je například zají-

---

ův paradox“. Úlohy tohoto typu vedly Bertranda k názoru, že nekonečné množiny jevů nemohou být v teorii pravděpodobnosti studovány, protože to vede k logickým rozporům.

[222] Malá ukázka z této učebnice vztahující se k loterijní problematice už byla uvedena v paragrafu 4.4.2.1.

[223] Poznamenejme v této souvislosti pro zajímavost, že známý italský statistik Bruno de Finetti (který se sice narodil r. 1906 v Innsbrucku, ale studoval na univerzitě v Milánu) v předmluvě ke své knize [Fin], str.xii - xiii píše: *„As far as Probability is concerned, the first book I encountered was that of Czuber. (Before 1950 - my first visit to the USA – I did not know any English, but only German and French.)“* ; zdá se tedy, že vliv Czuberových učebnic nebyl omezen jen na střední Evropu.

[224] Podle [JK], str. 168, dosáhla tato kniha nakonec čtrnácti vydání, posledního v r. 1950. Vyšla i v českém překladu (viz kap. 6).

[225] Z Czuberových knih je v předmluvě v [Ha2] uvedena jako klasická práce ještě jeho kniha *„Theorie der Beobachtungsfehler“* , o které se krátce zmíníme v paragrafu 5.3.3.

mavé, že v r. 1906 přeložil do němčiny a komentoval Moivrův spis *„Evaluation of annuities on lives“*[226].

5.3.3 Aplikace teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky

Zdá se, že celou Czuberovu činnost by bylo možno charakterizovat právě orientací na aplikace teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Je jim věnována značná pozornost jak v učebnicích uvedených v paragrafu 5.3.1, tak i v dalších pracích, z nichž zde uvedeme pouze dvě rozsáhlé knihy *„Theorie der Beobachtungsfehler“* (Leipzig, Teubner 1891) a *„Mathematische Bevölkerungstheorie“* (Leipzig 1923); data vydání svědčí o celoživotním Czuberovu zájmu o aplikační problematiku.

První z uvedených knih vznikla ještě v době Czuberova působení u nás[227]. Má rozsah 418 stran a z našeho hlediska je zajímavé, že při psaní této knihy uplatnil Czuber historický přístup k problematice; v předmluvě (str. IV) o tom říká: *„Durch den Plan der Arbeit war es geboten, der historischen Seite Rechnung zu tragen; ich habe dies durch Anordnung des Stoffes wie auch durch litterar-historische Noten zu erreichen gesucht, von welch letzteren ich annehmen darf, dass sie ausreichen, um, wo es Bedürfnis wird, zu den Quellen zurückzuführen.“*[228] V této souvislosti uveďme, že v knize [Ha2][229] v předmluvě na str. xvi je tato Czuberova kniha uvedena jako jedna z klasických prací, na které kniha [Ha2] navazuje.

Z hlediska Czuberových aplikačních zájmů stojí za zmínku i skutečnost, že E. Czuber byl v letech 1876–1885 redaktorem časopisu *„Technische Blätter“* [230], který vycházel v Praze v letech 1861–1921, a publikoval v tomto časopisu několik článků.

[226] Pod tímto názvem cituje Moivreovu práci Czuber v úvodu ke svému překladu na str. V a uvádí, že byla vydána v r. 1724. Podle [Ha1], str. 509, byl plný název Moivreovy práce *„Annuities upon lives: or, the valuation of annuities upon any number of lives, as also of reversions. To which is added, an appendix concerning the expectations of life, and probabilities of survivorship“* a práce vyšla v r. 1725.

[227] Předmluva je datována *„Brünn, Juli 1891“*.

[228] *„Plán práce poskytl možnost přihlížet k historické stránce; snažil jsem se dosáhnout toho jednak uspořádáním látky, jednak literárně-historickými poznámkami, o kterých jsem mohl předpokládat, že postačí, aby vedly k pramenům, bude-li toho třeba.“*

[229] Tato kniha spolu se svoji první částí [Ha1] představuje asi nejobsáhlejší knihu o historii teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, která (zatím) byla napsána.

[230] Na titulní stránce VIII. ročníku (1876) je časopis charakterizován jako *„Vierteljahrschrift des Deutschen polytechnischen Vereines in Böhmen“*.

V této souvislosti nelze opomenout ani Czuberovu činnost v oblasti pojišťovnictví. Jak už bylo řečeno v paragrafu 5.2, zavedl na vídeňské technice výuku pojišťovnictví, byl poradcem řady pojišťoven a významným členem mnoha organizací působících v oblasti pojišťovnictví. Byl znám i za hranicemi Rakousko-Uherska a když se v r. 1909 konal ve Vídni VI. mezinárodní kongres pro pojistné vědy, Czuber tomuto kongresu předsedal. Po I. světové válce (v lednu 1921) však napsal do časopisu *„Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft“* článek, který svým politickým obsahem vzbudil v zahraničí značnou nevoli a negativně ovlivnil opětné navázání styků Mezinárodního komité aktuárských sjezdů s rakouskými členy (podrobnosti viz [Mal]).

5.3.4 Výuka matematiky

Jako vysokoškolský učitel se Czuber zabýval nejen výukou pravděpodobnosti a statistiky, ale i výukou "klasické" matematiky pro nastávající inženýry. Czuber nejen psal učebnice (uveďme např. několikrát vydanou učebnici *„Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung“* (Leipzig 1898, další vydání 1906, 1912, 1918–19), ale zamýšlel se i nad obecnějšími otázkami výuky matematiky na technikách (viz např jeho práci *„Der mathematischen Unterricht an den technischen Hochschulen“*. In: Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, Heft 5, Wien 1910). Je sice otázkou, nakolik jsou jeho názory ještě dnes aktuální, protože však Czuber sám celý život aktivně pracoval v oblasti aplikací matematiky, bylo by možná zajímavé porovnat jeho názory s dnešní situací.

Czuber věnoval dlouholetou pozornost i výuce na středních školách. V letech 1897 – 1921 byl redaktorem časopisu *„Zeitschrift für die österreichischen Realschulen“* a publikoval v něm řadu článků, působil jako předseda u maturitních zkoušek na reálkách a jako expert při zemské školní radě.

V souvislosti s tím poznamenejme, že Czuber sám byl považován za vynikajícího učitele. V [Ott], str. 507, je citováno ze vzpomínek na Czubera[231]: *„Das gedruckte Wort gibt allerdings nur einen schwachen Begriff von der pädagogischen Meisterschaft Czubers, die sich in seinen Vorlesungen entfaltete. Wenn er seinen bis auf den letzten Platz gefüllten Hörsaal betrat, ... , herrschte sofort andächtige Stille und alles folgte angespannt dem vollende-*

[231] *„Tištěné slovo ovšem dává jen slabou představu o Czuberově pedagogickém mistrovství, které se rozvíjelo v jeho přednáškách. Když vstoupil do posluchárny zaplněné do posledního místa, ... , panovalo ihned nábožné ticho a všichni napjatě sledovali dokonalou přednášku, která v průzračné jasnosti zpřístupnila i méně nadaným posluchačům pochopení matematické argumentace.“*

ten Vortrag, der in lichtvoller Klarheit auch dem weniger begabten Hörer das Verständnis mathematischer Beweisführung erschloß.“

5.4 Dva historické problémy: morální střední hodnota a petrohradský problém

V tomto paragrafu se podíváme na to, jak Czuber ve své učebnici *„Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen“* vykládá problém tzv. morální střední hodnoty[232] a v souvislosti s tím tzv. petrohradský problém. Vycházíme přitom z dotisku čtvrtého vydání[233] uvedené učebnice, který vyšel v r. 1932 (tedy už po Czuberově smrti) v nakladatelství Teubner v Lipsku a v Berlíně.

Celá učebnice je dvousvazková a je rozdělena na pět částí (Erster - Fünfter Teil); první tři části jsou zahrnuty do prvního svazku, který má rozsah 478 stran, další dvě části jsou zařazeny do druhého svazku o rozsahu 470 stran. Jednotlivé části jsou dále děleny na oddíly (Abschnitt), které jsou číslovány v každé části zvlášť, oddíly jsou členěny na paragrafy, které jsou v každém oddílu číslovány zvlášť, a paragrafy jsou členěny na body, které jsou číslovány v celé učebnici (tj. v obou dílech) průběžně, což usnadňuje odkazy[234]. Výklad, kterým se zde budeme zabývat, je zařazen do první části nazvané *„Wahrscheinlichkeitstheorie“*[235], v této části do čtvrtého oddílu nazvaného *„Vom Zufall abhängige Gewinne und Verluste“* a v rámci oddílu do pátého paragrafu nadepsaného *„Die moralische Erwartung“* ; zahrnuje necelých deset stránek (str. 264–273) a v rámci celé učebnice obsahuje body 157–161. Náš výklad rozčleníme podle těchto Czuberových bodů; nebudeme sice důsledně dodržovat Czuberovo značení ani jeho postupy, v základních rysech však budeme sledovat jeho výklad.

---

[232] Termín <u>morální</u> střední hodnota je už historicky ustálený, ale podle našeho názoru by bylo vhodnější mluvit o <u>subjektivní</u> střední hodnotě, protože v této teorii jde o peníze, nikoli o morálku.

[233] Čtvrté vydání vyšlo v r. 1923.

[234] Uveďme pro zajímavost, že celá učebnice je rozdělena do 400 bodů.

[235] Názvy dalších částí: *Ausgleichungsrechnung. Kollektivmaßlehre. Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung.*

157. Hypotéza Daniela Bernoulliho[236]

Základní myšlenka pojmu morální střední hodnoty spočívá v poznatku, že nějaká daná peněžní částka nemá stejný význam pro každého člověka[237]. Bernoulli tento názor formuluje matematicky takto: označíme-li současný majetek nějakého člověka x a změní-li se tento majetek o dx, pak morální hodnota této změny je přímo úměrná velikosti této změny a nepřímo úměrná velikosti majetku, tj. platí

$$dy = k\,\frac{dx}{x},$$

kde konstanta k závisí na konkrétní osobní situaci každého člověka. Předpokládáme-li, že změny majetku každého člověka probíhají spojitě, pak změna majetku z počáteční hodnoty a na koncovou hodnotu x má morální hodnotu

$$y = k\int_a^x \frac{dx}{x} = k\ln\left(\frac{x}{a}\right);$$

přitom předpokládáme $a > 0$, $x > 0$.

158. Morální střední hodnota

Nechť nějaký člověk má majetek m, který se může změnit o x_i s pravděpodobností $p(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, přičemž $\sum_i p(i) = 1$. Pak morální hodnota každé této změny je

$$k\ln\left(\frac{m + x_i}{m}\right)$$

a střední hodnota těchto morálních hodnot je

$$\sum_i p(i)\,k\ln\left(\frac{m + x_i}{m}\right) = k\ln\frac{(m + x_1)^{p(1)}(m + x_2)^{p(2)}\ldots}{m}.$$

Označíme-li h jednorázovou změnu, která by odpovídala této střední hodnotě, tj.

---

[236] Czuber zde cituje práci D. Bernoulliho *„Specimen theoriae novae de mensura sortis“*, Comm. Ac. Petropol. V, 1738, a upozorňuje na to, že v r. 1896 vyšel v Lipsku komentovaný německý překlad této práce.

[237] Pánek ve svém článku *„O mathematické a morální naději“* píše: *„Má-li na př. někdo 1000 zl., oželí snadněji ztrátu 10 zl. než ten, jenž vládne pouze 100 zl.“* (Čas. pěst. math. fys. 7 (1878), str. 78).

$$k \ln\left(\frac{m+h}{m}\right) = k \ln \frac{(m+x_1)^{p(1)}(m+x_2)^{p(2)}\dots}{m} ,$$

pak platí $$h = (m+x_1)^{p(1)}(m+x_2)^{p(2)}\dots \; - \; m$$

a tuto veličinu nazveme morální střední hodnotou[238].

Budou-li veličiny x_i malé v porovnání s veličinou m, pak se lze v rozvoji výrazu

$$\frac{h}{m} = \left(1+\frac{x_1}{m}\right)^{p(1)}\left(1+\frac{x_2}{m}\right)^{p(2)}\dots - 1$$

omezit na první mocniny zlomků $\frac{x_i}{m}$ a dostáváme $h = \sum_i p(i)\, x_i$; jinak řečeno, čím vyšší je majetek člověka ve srovnání s očekávanými zisky nebo ztrátami, tím víc se morální střední hodnota jeho zisků nebo ztrát blíží obvyklé matematické střední hodnotě.

159. Důsledky pojmu morální střední hodnoty

Tento bod obsahuje následující tři příklady:

1) Uvažujme hru dvou hráčů A, B, ve které hráč A vsadí částku α, hráč B vsadí částku β, pravděpodobnost výhry hráče A (tj. pravděpodobnost, že hráč A získá β) je rovna p, pravděpodobnost výhry hráče B je rovna $q = 1 - p$. Předpokládejme dále, že hra je spravedlivá, tj. $p\,\beta = q\alpha$; pak platí

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \;\; , \;\; q = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \; .$$

Označíme-li m majetek hráče A, pak morální střední hodnota jeho výhry je podle předešlého bodu rovna

$$h = (m+\beta)^p (m-\alpha)^q \; - \; m \; = \left[(m+\beta)^\alpha (m-\alpha)^\beta\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} - \; m \; .$$

Protože geometrický průměr konečného počtu kladných čísel je vždy menší nebo roven jejich aritmetickému průměru[239], platí

---

[238] Czuber neříká, o morální střední hodnotu čeho se jedná; asi by mělo být řečeno, že se jedná o morální střední hodnotu očekávaných změn (zisků nebo ztrát).

[239] Viz např. Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele.* 1. vyd. Matfyzpress, Praha 1997, str. 29. Abychom mohli této věty použít, musí být α , β celá kladná čísla a sázka hráče A mu-

$$\left[(m+\beta)^{\alpha}(m-\alpha)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} < \frac{\alpha(m+\beta)+\beta(m-\alpha)}{\alpha+\beta} = m \;;$$ [240]

z čehož plyne, že $h < 0$. Analogickou úvahu bychom mohli provést i pro hráče B => ve spravedlivé hře je morální střední hodnota výhry každého hráče záporná.

2) Obchodník, jehož majetek je m, bude mít zisk a, jestliže loď se zbožím šťastně dopluje, což se stane s pravděpodobností p. Částku a si však může pojistit, zaplatí-li pojistné $(1-p)\alpha$; z matematického hlediska je tato „hra" spravedlivá[241].

Jestliže se obchodník pojistí, je jisté, že získá částku $\alpha-(1-p)\alpha = p\alpha$ a morální střední hodnota[242] jeho zisku je rovna

$$h_1 = (m + pa) - m.$$

Jestliže se obchodník nepojistí, bude mít zisk rovný a s pravděpodobností p a zisk rovný 0 s pravděpodobností $1-p$. Morální střední hodnota jeho zisku je v tomto případě rovna

$$h_2 = (m+a)^p\, m^{1-p} - m \quad .$$

Předpokládejme, že číslo p je racionální [243], a označme $p = r/s$, kde r, s jsou celá kladná čísla. Použijeme-li opět vztahu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, dostaneme

$$\left[(m+a)^r\, m^{s-r}\right]^{\frac{1}{s}} < \frac{r(m+a)+(s-r)m}{s}$$

a z toho plyne $h_2 < h_1$; jinak řečeno, morální střední hodnota obchodníkova zisku je v případě pojištění vždy vyšší než v případě, že se obchodník nepojistí.

---

sí být menší než jeho majetek, což jsou sice předpoklady přirozené, ale Czuber je výslovně neuvádí.

[240] Výraz v lomené závorce lze považovat za součin α součinitelů $(m+\beta)$ a β součinitelů $(m-\alpha)$; v tomto případě je geometrický průměr menší než aritmetický průměr.

[241] Pojistné takto vypočítané (tzv. nettopojistné) by (obecně řečeno) nestačilo pojišťovně ani na krytí provozních nákladů, natož na tvorbu zisku, takže ve skutečnosti by pojišťovna v daném případě vybírala pojistné vyšší. Czuber se ve druhé části příkladu tímto faktem zabývá (viz dále).

[242] Jedná se o střední hodnotu v případu, že změna pa má pravděpodobnost rovnu 1.

[243] Z „běžného" hlediska je tento předpoklad přijatelný, Czuber ho však výslovně neuvádí.

Czuber příklad rozebírá ještě dál; ukazuje, že morální střední hodnota v případě pojištění zůstane vyšší i v případě, že pojišťovna bude požadovat další přirážky k vypočítanému nettopojistnému (pokud tyto přirážky nepřekročí jistou mez)[244] a končí numerickým příkladem.

3) Obchodník, jehož majetek je m, bude mít zisk a, jestliže loď se zbožím šťastně dopluje, což se stane s pravděpodobností p. Označíme-li $q = 1 - p$, pak morální střední hodnota jeho zisku je rovna

$$h_1 = (m + a)^p \, m^q - m .$$

Jestliže obchodník rozdělí své zboží stejným dílem na dvě lodi se stejnou pravděpodobností doplutí, pak s pravděpodobností p^2 bude mít zisk a, s pravděpodobností $2pq$ bude mít zisk $a/2$ a s pravděpodobností q^2 bude mít zisk nulový; morální střední hodnota jeho zisku bude rovna

$$h_2 = (m + a)^{p^2} \left(m + \frac{a}{2} \right)^{2pq} m^{q^2} - m ;$$

sérií algebraických úprav lze dokázat, že $h_2 > h_1$; jinak řečeno, morální střední hodnota obchodníkova zisku bude vyšší, rozdělí-li své zboží na dvě lodi[245] .

160. Petrohradský problém[246]

Začněme malým historickým komentářem. Tzv. petrohradský problém se poprvé objevuje v dopisu, který Nicolas Bernoulli dne 9. IX. 1713 napsal Pierru Remondu Montmortovi a ten ho potom připojil k druhému vydání svého spisu *„Essay d'analyse sur les jeux de hazard"*. Daniel Bernoulli problém publikoval v práci *„Specimen theoriae novae de mensura sortis"*

---

244 Pánek ve svém článku *„O mathematické a morální naději"* v této souvislosti píše: *„Z toho plyne též, že pojišťovací ústavy zjednají pojištěnci moralní výhodu a sobě zároveň určitý výdělek."* (Čas. pěst. math.fys. 7 (1878), str. 89).

245 Czuber připojuje poznámku, že Laplace zobecnil tento výsledek na rozdělení zboží na libovolný počet stejných dílů.
Úloha se objevuje i u Pánka v odlišné formulaci: *„Zdaž jest výhodnější k jednotlivému podniku věnovati jistou sumu S, kterouž v příznivém případě pravděpodobností p_1 získati a v nepříznivém pravděpodobností p_2 ztratiti můžeme, nebo na několik na sobě nezávislých podniků téhož druhu za stejných podmínek rozděliti?"* a dospívá k závěru: *„Není rádno svého jmění najednou k jakémusi podniku užiti, nýbrž znenáhla nebo stejnou dobu na rozličné způsoby."* (*„O mathematické a morální naději"*. Čas. pěst. math.fys. 7 (1878), str. 87–88)

246 Existuje řada prací věnovaných tomuto problému; Czuber v jedné ze svých prvních prací (viz práce č. 3 v paragrafu 5.3.1) podává podrobnou historii problému. Základní informace lze najít např. v práci [Ma4].

(Commentarii Acad. Petropol., V, 1738[247]) a odtud dostal problém přívlastek „petrohradský“; tato práce je věnována morální střední hodnotě a Daniel Bernoulli v ní podal řešení problému opírající se o tento pojem; Bernoulliovo řešení Czuber ve své učebnici vysvětluje.

Czuber formuluje problém takto: *„Petr hází mincí tak dlouho, dokud nepadne „lev“*[248] *; stane-li se to při prvním hodu, Petr musí zaplatit Pavlovi jednu korunu*[249]*; stane-li se to teprve při druhém hodu, zaplatí dvě koruny; když teprve při třetím hodu, zaplatí čtyři koruny, a tak při každém dalším hodu vždy dvakrát tolik, kolik by zaplatil při předešlém hodu. Jak velká je střední hodnota Pavlovy výhry?“*

Zde přerušíme Czuberův výklad a připojíme malý komentář. Petr při hře funguje jako bankéř; aby hra byla spravedlivou, musel by Pavel Petrovi předem zaplatit za právo zúčastnit se hry vstupní poplatek rovný střední hodnotě své možné výhry. Ta je však podle pravidel hry rovna

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\quad\cdots\quad+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots\quad=\infty\,,$$

takže hra se vlastně nedá spravedlivě hrát. Teoreticky je Petr v nevýhodě při jakkoli vysokém Pavlově vkladu, prakticky by ale žádný hráč na Pavlově místě nevsadil do hry ani sto korun, protože by si snadno spočítal, že částku $2^7 = 128$ korun může vyhrát s pravděpodobností $2^{-8} \doteq 0{,}0039$; v tomto rozporu mezi teoreticky stanovenou střední hodnotou výhry, která je nekonečně veliká, a „prakticky“ možnými výhrami, které jsou dosti malé, spočívá paradox této hry.

Příčina paradoxu je zřejmá: ve hře lze sice vyhrát velice vysoké částky, ale s velice malými pravděpodobnostmi. Z hlediska dnešní matematiky není nad čím bádat, protože řada definující střední hodnotu výhry není konvergentní a střední hodnota výhry v dané hře tedy není definována. V minulosti však tento paradox zaujal mnoho matematiků; zde si ukážeme, jak Czuber vyložil přístup Daniela Bernoulliho k tomuto problému[250].

---

[247] Todhunter ([Tod], str. 213) upozorňuje na to, že příslušný svazek *Commentarii* sice vyšel až v r. 1738, ale zahrnuje práce z let 1730–1731.
[248] U Czubera nepadá „lev“, ale *„Wappen“*.
[249] Czuber používá jako měnovou jednotku dukáty (asi v návaznosti na Bernoulliho), ale kvůli názornosti jsme se rozhodli dát zde přednost korunám.
[250] Czuber ještě před výkladem Bernoulliova přístupu vkládá odkaz na Bacheliera, který upozornil na to, že nebude-li se vždy při každém dalším hodu předchozí částka zdvojnásobovat,

Je-li Pavlův majetek[251] roven m, je morální střední hodnota Pavlovy výhry v dané hře rovna

$$h = (m+1)^{\frac{1}{2}} (m+2)^{\frac{1}{4}} (m+4)^{\frac{1}{8}} \cdots \quad - \quad m$$

a tato hodnota je konečná, protože nekonečný součin

$$\mathrm{P}(m) = \prod_{1}^{\infty} (m + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}}$$

konverguje pro každou kladnou hodnotu m. Tuto skutečnost Czuber dokazuje takto[252]:

Platí

$$\mathrm{P}(m) = \prod_{1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2^n}} \left(\frac{m}{2^{n-1}} + 1 \right)^{\frac{1}{2^n}} \quad < \quad \prod_{1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2^n}} (1+m)^{\frac{1}{2^n}} \quad ,$$

z čehož plyne

$$\ln \mathrm{P}(m) < \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2^n} \ln 2 + \frac{1}{2^n} \ln(1+m) \right) \ .$$

Pro řadu $\ln 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$ platí

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots \right)$$

a protože v závorce je součet řady $\sum_{1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = 4$, má řada $\ln 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$ součet rovný $\ln 2$.

Řada $\ln(1+m) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je rovněž konvergentní a má součet rovný $\ln(1+m)$.

Platí tedy

$$\mathrm{P}(m) < 2(1+m) \, ,$$

a z toho podle Czubera plyne konvergence nekonečného součinu $\mathrm{P}(m)$.

---

ale násobit „jenom“ 1, 999...9 (tj. libovolný počet devítek za desetinnou čárkou), pak se „prakticky“ nic nezmění, ale střední hodnota výhry bude konečná a paradox zmizí.

[251] Protože možné výhry vyjadřujeme v korunách, musí i hodnota Pavlova majetku být vyjádřena v korunách.

[252] Czuber uvádí, že tento důkaz je převzat z poznámek, které připojil A. Pringsheim k německému překladu spisu D. Bernoulliho *„Specimen theoriae novae de mensura sortis“*.

Domníváme se, ze Czuberův důkaz má malý formální nedostatek: z omezenosti by ještě nemusela plynout konvergence. Tento nedostatek však lze snadno odstranit. Označme

$$\mathrm{P}_k(m) = \prod_{1}^{k} (m + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \ .$$

Pak

$$\frac{\mathrm{P}_{k+1}(m)}{\mathrm{P}_k(m)} = (m + 2^k)^{\frac{1}{2^{k+1}}} \quad > \quad 1 \ ,$$

posloupnost $\mathrm{P}_k(m)$, k = 1, 2, ... je tedy rostoucí, a to spolu s již dokázanou omezeností stačí ke konvergenci nekonečného součinu $\mathrm{P}(m)$.

Vraťme se zpět k Czuberovu výkladu. Z předešlého výkladu je zřejmé, že při použití morální střední hodnoty místo „matematické“ střední hodnoty žádný paradox nevzniká, protože morální střední hodnota Pavlovy výhry je konečná. Podívejme se nyní, jaký nejvyšší vklad může Pavel vložit do hry, aby se morální střední hodnota jeho výhry nestala zápornou. Označíme-li tento vklad x, musí platit

$$(m+1-x)^{\frac{1}{2}} \ (m+2-x)^{\frac{1}{4}} \ (m+4-x)^{\frac{1}{8}} \cdots \quad - \quad m = 0 \ ;$$

označíme-li $m_1 = m - x$, dostaneme z toho

$$x = (m_1 + 1)^{\frac{1}{2}} \ (m_1 + 2)^{\frac{1}{4}} \ (m_1 + 4)^{\frac{1}{8}} \cdots \quad - \quad m_1 \ ,$$

a bude-li x malé v porovnání s m, bude $m_1 \doteq m$ a dostáváme přibližný vztah pro x

$$x \doteq (m+1)^{\frac{1}{2}} \ (m+2)^{\frac{1}{4}} \ (m+4)^{\frac{1}{8}} \cdots \quad - \quad m \ ;$$

výše maximálního možného Pavlova vkladu by tedy neměla překročit (přibližně) hodnotu morální střední hodnoty jeho výhry. Czuber připojuje dva numerické výsledky: pro m = 100 dostává $x \doteq$ 4,36, pro m = 200 dostává $x \doteq$ 6.

Czuber si nyní klade řečnickou otázku, zda teprve pojem morální střední hodnoty umožňuje odstranit paradox v řešení daného problému, a odpovídá na tuto otázku záporně. Podle Czubera je paradox způsoben špatnou formulací problému, která jednak neklade žádná omezení na reálně možnou délku hry, jednak nepřihlíží k tomu, že částka, kterou Petr může reálně vyplatit, je omezená; v tomto směru připojuje několik poznámek.

161. O významu Bernoulliovy hypotézy

V tomto závěrečném bodu Czuber hodnotí význam teorie morální střední hodnoty. Vyslovuje názor, že není vhodná k řízení činností závisejících na náhodných jevech, může však být užitečná při porovnávání různých činností z hlediska jejich působení na majetkové poměry jednoho člověka; přitom tato teorie vede k výsledkům, které jsou v souladu s obecným názorem[253]. Uvádí dále, že Bernoulliova teorie se stala základem moderní teorie hodnoty, a cituje v této souvislosti řadu autorů; v závěru se zmiňuje o použití Bernoulliovy teorie v psychologii a při studiu sociálních a politických problémů.

Tím Czuberův výklad o morální střední hodnotě končí. Poznamenejme ještě, že porovnáme-li tento Czuberův výklad s Todhunterovým výkladem obsahu spisu D. Bernoulliho *„Specimen theoriae novae de mensura sortis“* ([Tod], str. 213–222), pak zjistíme, že Czuber vykládá v podstatě totéž, co Daniel Bernoulli, vynechává pouze některé věci, které nepovažoval za podstatné, a (pochopitelně) při výkladu používá ve své době moderního matematického aparátu.

Jak už bylo řečeno, ani pojem morální střední hodnoty, ani petrohradský paradox se v dnešních učebnicích teorie pravděpodobnosti neobjevuje. V historii teorie pravděpodobnosti však tyto problémy sehrály jistou roli a považovali jsme proto za vhodné (a snad i zajímavé) ukázat, jak byly tyto problémy vykládány v úspěšné učebnici teorie pravděpodobnosti před necelými sto lety.

[253] *„Die Lehre von der moralischen Hoffnung ist gewiß nicht geeignet, Unternehmungen, die auf zufälligen Ereignissen aufgebaut sind, zu regeln, dazu gibt das Prinzip der mathematischen Hoffnung die allein richtige Grundlage. Wenn es sich aber darum handelt, verschiedene Unternehmungen in ihren Wirkungen auf die Vermögenslage einer Person zu vergleichen, kann von ihr Gebrauch gemacht werden, und da führt sie, wie gezeigt worden, zu Resultaten, welche mit den Eingebungen des gemeinen Verstandes harmonieren.“*