5.4. Bernard Riemann a pojem *varieta*

Zcela výjimečné postavení v budování základů n-rozměrné geometrie má Riemann.[66] Nevypracoval ani ucelenou teorii jako Grassmann[67] ani neposkytl nové metody jako třeba Plücker, ale koncepcí pojmu *varieta* zformuloval fundamentální myšlenku, ze které se v následujícím období vyvinula rozsáhlá matematická oblast – diferenciální geometrie na varietách. Základní ideje nové koncepce vyslovil ve své habilitační přednášce v roce 1854 *Über die Hypothesen, welchen der Geometrie zu Grunde liegen (O hypotézách ležících v základech geometrie)*.[68] Ukázky z přednášky jsou uvedeny v tabulce 5.2. Od prací Riemanna můžeme na historii algebraické geometrie pohlížet jako na dialog dvou přístupů, jeden zdůrazňující geometrii a druhý algebru.[69] Riemann používá pojem *varieta* v jeho intuitivním smyslu. V originále je použito slovo *Mannigfaltigkeit*, jehož doslovný překlad je *rozmanitost*. Dnes se pod pojmem *Mannigfaltigkeit* rozumí již onen technický smysl, který se ustálil až v první polovině 20. století a jemuž v české geometrické terminologii odpovídá pojem *varieta*. V naivním významu, ve kterém pojem *Mannigfaltigkeit* používá i F. Klein[70] by mu snad nejlépe odpovídal výraz *vícerozměrné množství*.[71]

Ideu n-rozměrné variety zavádí Riemann induktivně, začíná s varietou jednodimenzionální, tedy s křivkou

jejíž základní charakteristika je, že z libovolného jejího bodu je možno jít spojitým pohybem jen dvěma směry, vpřed a vzad. [Kat98, str. 780]

Dvoudimenzionální varietu konstruuje tak, že každá jednodimenzionální podvarieta může spojitě přejít do jiné jednodimenzionální podvariety.

Riemannovy myšlenky byly velmi aktivně rozvíjeny F. Kleinem, který některé z nich vložil do svých vlastních výsledků.

---

[66] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

[67] Hermann Günter Grassmann (1809–1877).

[68] Viz [Rie19], poprvé publikováno 1868. Toto téma habilitační práce mu zadal Gauss. Když Riemannovu habilitační přednášku krátce před svou smrtí vyslechl, vysoce jeho hluboké myšlenky hodnotil.

[69] Viz [Gra94, str. 920].

[70] Felix Klein (1849–1925).

[71] Viz [Fuc96a, str. 84].

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen.

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Konstruktionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie gibt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und inwieweit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, daß der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Größen, unter welchem die Raumgrößen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe aus allgemeinen Größenbegriffen zu konstruieren. Es wird daraus hervorgehen, daß eine mehrfach ausgedehnte Größe verschiedener Maßverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Größe bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern daß

— 6 —

keiten gehen bei Änderung der Funktion stetig ineinander über; man wird daher annehmen können, daß aus einer von ihnen die übrigen hervorgehen, und es wird dies, allgemein zu reden, so geschehen können, daß jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht; die Ausnahmsfälle, deren Untersuchung wichtig ist, können hier unberücksichtigt bleiben. Hierdurch wird die Ortsbestimmung in der gegebenen Mannigfaltigkeit zurückgeführt auf eine Größenbestimmung und auf eine Ortsbestimmung in einer minderfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Es ist nun leicht zu zeigen, daß diese Mannigfaltigkeit $n-1$ Dimensionen hat, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit eine n-fach ausgedehnte ist. Durch n-malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Größenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es gibt indes auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Größenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Funktion für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur usw.

II. Maßverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, daß die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede meßbar ist.

Es folgt nun, nachdem der Begriff einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstruiert und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, daß sich die

— 7 —

Ortsbestimmung in derselben auf n Größenbestimmungen zurückführen läßt, als zweite der oben gestellten Aufgaben eine Untersuchung über die Maßverhältnisse, deren eine solche Mannigfaltigkeit fähig ist, und über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Maßverhältnisse hinreichen. Diese Maßverhältnisse lassen sich nur in abstrakten Größenbegriffen untersuchen und im Zusammenhange nur durch Formeln darstellen; unter gewissen Voraussetzungen kann man sie indes in Verhältnisse zerlegen, welche einzeln genommen einer geometrischen Darstellung fähig sind, und hierdurch wird es möglich, die Resultate der Rechnung geometrisch auszudrücken. Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstrakte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen. Zu beidem sind die Grundlagen enthalten in der berühmten Abhandlung des Herrn Geheimen Hofrats Gauß über die krummen Flächen.

1.

Maßbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Größen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, daß die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede meßbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf Größenbestimmungen zurückgeführt, also die Lage eines Punktes in der gegebenen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Größen x_1, x_2, x_3 und so fort bis x_n ausgedrückt, so wird die Bestimmung einer Linie darauf hinauskommen, daß die Größen x als Funktionen Einer Veränderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Größen x als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden

Tabulka 5.2: Ukázka z Riemannovy přednášky *Über die Hypothesen, welchen der Geometrie zu Grunde liegen* s překladem vybraných odstavců

O hypotézách, které leží v základech geometrie

Jak dobře víme, geometrie předpokládá jako dané obojí: koncept prostoru a základní principy pro konstrukce v prostoru. To dává jen jmenné definice těchto věcí, zatímco jejich hlavní specifikace se objevují ve formě axiomů. Vztah mezi těmito předpoklady leží v temnotě, není vidět jestli nebo do jaké míry nějaký vztah mezi nimi je nutný, nebo prioritně zda nějaký vztah mezi nimi je možný. [. . .]

II. Vztahy míry, jež jsou možné na varietě dimenze n za předpokladu, že délky úseček jsou nezávislé na jejich poloze, což má za následek to, že každá úsečka může být měřena libovolnou jinou úsečkou.

Když jsme vytvořili pojem variety dimenze n a zjistili, že jejich pravá povaha spočívá ve vlastnosti toho, že určení polohy v ní může být redukováno na n určení velikosti, dostáváme se ke druhému z výše uvedených problémů, studiu vztahů míry, jichž je variety schopna a podmínek, které postačují k jejich určení. Určení míry vyžadují, aby veličiny byly nezávislé na poloze, což se může stát několika způsoby. Hypotéza, která se představí jako první a kterou zde rozvinu, je taková, že délka úseček je nezávislá na jejich poloze a v důsledku toho je každá úsečka měřitelná pomocí libovolné jiné úsečky. Tím se ukotvení polohy redukuje na ukotvení veličiny a polohu bodu n-dimenzionální variety lze v důsledku toho vyjádřit pomocí n proměnných $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a pak určení úsečky spočívá ve vyjádření těchto veličin jako funkcí jedné proměnné. Úloha pak spočívá ve stanovení matematického výrazu pro délku úsečky, a pro tento účel musíme uvažovat veličiny x vyjádřitelné v jistých jednotkách. Budu se tomuto problému věnovat s jistými omezeními a budu se především věnovat úsečkách, pro něž se poměry přírůstků dx příslušných proměnných souvisle mění. Můžeme pak uvažovat tyto úsečky rozdělené do jednotlivých prvků, v rámci nichž lze poměr veličin dx považovat za konstantní; a problém je tak redukován na určení, pro každý bod, obecného vyjádření pro lineární prvek ds začínající v tomto bodě, vyjádření, které tak bude obsahovat veličiny x a veličiny dx. Budu předpokládat, z druhé, že délka lineárního prvku, po první řád, je nezměněna, pokud na všechny body tohoto prvku aplikujeme nekonečně malé posunutí, z čehož současně vyplývá, že zvětší-li se všechny veličiny dx v tom samém poměru, bude se lineární prvek měnit v tom samém poměru. Za těchto předpokladů může být lineárním prvkem libovolná homogenní funkce prvního řádu veličin dx, která zůstává nezměněna, když změníme znaménka všch dx, a v níž jsou libovolné konstanty spojitými funkcemi veličin x.