spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě publikoval P. du Bois Reymond v roce 1895.[18] Jde o funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x), \tag{5.1}$$

kde $b > 1$ je liché číslo, $0 < a < 1$ a platí $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (viz obr. 5.3). Podobných příkladů bylo následně sestrojeno více.[19] Jak uvidíme v kapitole šesté, tyto poznatky matematické analýzy se staly stěžejními podněty k tomu, že se na křivku přestalo pohlížet jako na graf funkce.

Na závěr poznamenejme, že v roce 1922 byl v rukopisech B. Bolzana[20] objeven příklad spojité funkce, která dle něj neměla derivaci v „husté množině". V. Jarník následně ukázal, že funkce, která je v rukopise uvedena, nemá derivaci nikde.[21] Vzhledem k tomu, že rukopis byl dokončen roku 1834, Bolzano tím předběhl vývoj světové matematiky o několik desetiletí, ale práce nikdy nevyšla, takže tím vývoj matematiky nebyl nijak ovlivněn. Dalším Bolzanovým myšlenkám, které se bezprostředně týkají křivek, se věnujeme v sekci 5.5.

5.2. Diferenciální geometrie křivek do roku 1854

5.2.1. Leonhard Euler

V knize L. Eulera[22] *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748 je poprvé k pojmu funkce přistupováno jako k ústřednímu pojmu matematické analýzy. Euler uvádí, že

funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné veličiny a čísel nebo konstantních veličin. [Beč01, str. 8]

[18]P. du Bois Reymond: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79, 1875, str. 21–37.

[19]Např. Jean Gaston Darboux (1842–1917) sestrojil takovou funkci danou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} = \frac{\sin((n+1)! \cdot x)}{n!}.$$

[20]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

[21]V. Jarník, *O funkci Bolzanově*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, 51 (1922), str. 248–264. Přehledná konstrukce Bolzanovy funkce včetně dalších zajímavých komentářů viz [Sch00, str. 75-76].

[22]Leonhard Euler (1707–1783).

Ukázali jsme, že podobnou definici udal již Joh. Bernoulli (viz str. 174), ale zásluhou Eulera a jeho knihy, která dlouho udávala tón matematické analýze, se dostala tato definice do obecného povědomí.

Druhý díl Eulerova spisu *Introductio in Analysin Infinitorum* (viz obr. 5.4) je geometrický a je věnován především rovinným křivkám jakožto analytickým funkcím jedné proměnné, ale když Euler *Introductio* psal, věděl už, že se vyskytují i funkce neanalytické.[23] Hned na začátku tohoto geometrického dílu rozděluje funkce na spojité (*continuae*) a nespojité nebo-li smíšené (*discontinuae, mixtae*), ale tato terminologie má jiný význam než dnes. Spojitou křivkou nebo funkcí Euler nazývá tu, která je ve svém definičním oboru dána jedním analytickým výrazem a nespojitou tu, která je dána dvěma nebo více výrazy. Např. dvě větve hyperboly $y = \frac{1}{x}$ jsou v tomto smyslu spojitou křivkou, jak sám Euler uvádí, kdežto graf funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

je funkcí nespojitou.

Druhý díl Eulerova *Introductio* je originálním výkladem použití analytické geometrie a sloužil jako výchozí pro pozdější učebnice.

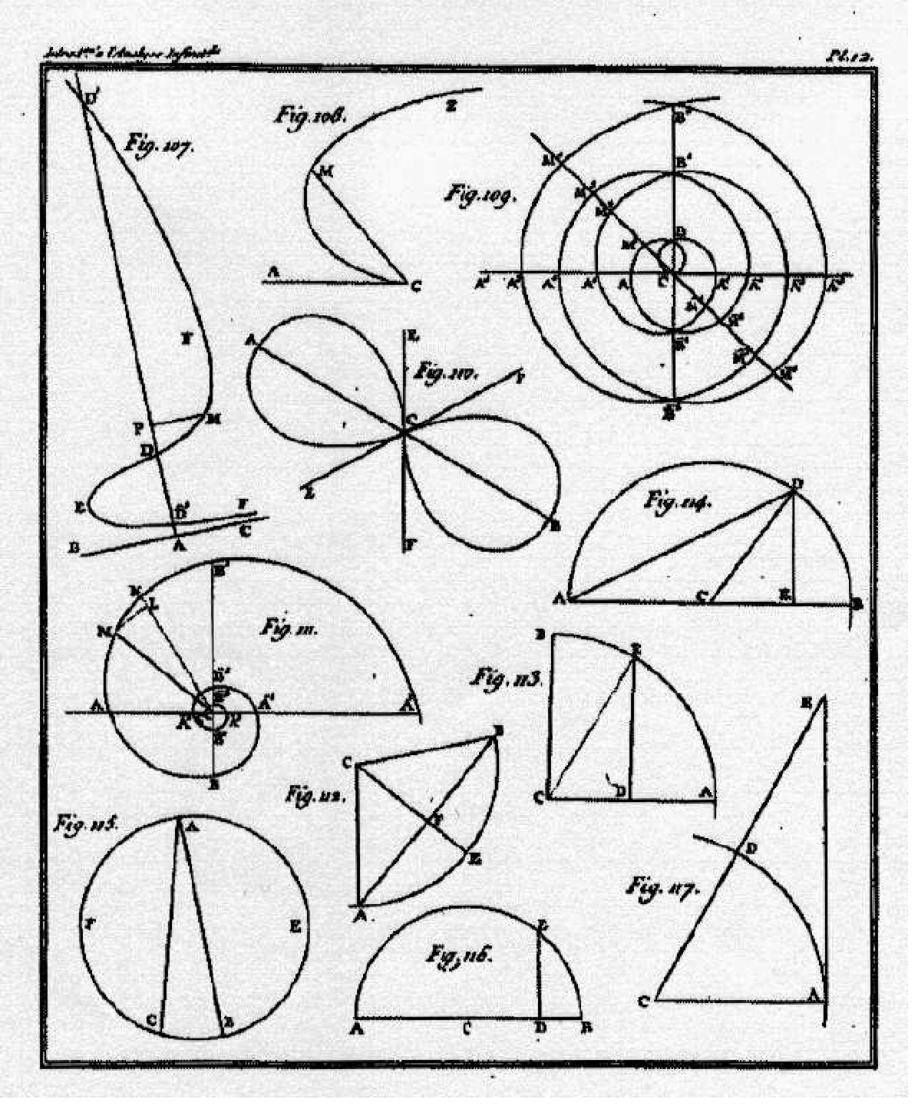
Na rozdíl od Newtona, který dával přednost syntetickým metodám geometrie starověkých [učenců], Euler se snaží řešit všechny geometrické otázky s použitím algebry a analýzy. [Juš72, str. 163]

V první části druhého dílu definuje pravoúhlé a kosoúhlé souřadnice a křivky, v druhé části Euler uvažuje transformace těchto souřadnic, v části třetí uvádí rozdělení algebraických křivek podle stupně, ve čtvrté studuje jejich vlastnosti – počet průsečíků s přímkou, počet bodů, kterými je křivka určena apod. V páté a šesté části poprvé Euler vyšetřuje v širším slova smyslu křivky druhého stupně dané rovnicí

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0, \tag{5.2}$$

ale používá i metody geometrické. Nejdříve vyšetřuje vlastnosti těchto křivek a potom rovnici (5.2) s použitím transformace souřadnic redukuje na kanonický tvar. Zkoumá speciální vlastnosti elipsy, paraboly a hyperboly, přičemž je zajímavé, že parabolu uvažuje jako nekonečně protáhlou elipsu. Teorie křivek druhého stupně se týká i odstavec šesté

[23] Viz [Juš72, str. 251].



Obrázek 5.4: Ukázka ze spisu L. Eulera *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748

části, v němž je uvedeno ryze analytické řešení úlohy o nalezení křivky procházející pěti danými body. V sedmé části je uvedena nová metoda rozdělení křivek třetího stupně do tří skupin založená na vyšetřování nekonečných větví s použitím diskriminantu a vyšetřování nekonečných větví se věnuje i část osmá. Na rozdíl od anglických matematiků nepoužívá Euler Newtonův rovnoběžník, ale tzv. „řád nekonečnosti“, což není nic jiného než stupeň neznámé veličiny ve jmenovateli (viz poznámka 50 na str. 152). Křivkám třetího stupně je věnována i část devátá a desátá, kde je uvedena klasifikace těchto křivek do 16 skupin, kanonické rovnice a srovnání s klasifikací Newtona.

Část jedenáctá obsahuje klasifikaci křivek čtvrtého stupně. Euler uvádí rozdělení do 146 skupin, ale ve skutečnosti je těchto skupin jen 125. Některé jeho nepřesnosti v klasifikaci opravil J. Plücker – viz odstavec 5.3.1. Euler hledá také rovnice tečen ke křivkám v jednoduchých i násobných bodech. Ve dvanácté části přechází ke zkoumání tvaru křivek v konečné části roviny. Nemá k dispozici obecnou metodu, a proto uvažuje jen některé křivky třetího stupně a následně ukazuje, že jeho závěry lze zobecnit pro křivky dané rovnicí

$$Q(x)y^2 + 2P(x)y + R(x) = 0,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ jsou mnohočleny. Je zde podána stručná charakteristika n–násobných bodů a na závěr této části je zkoumána křivka na obrázku 5.5(a) o rovnici

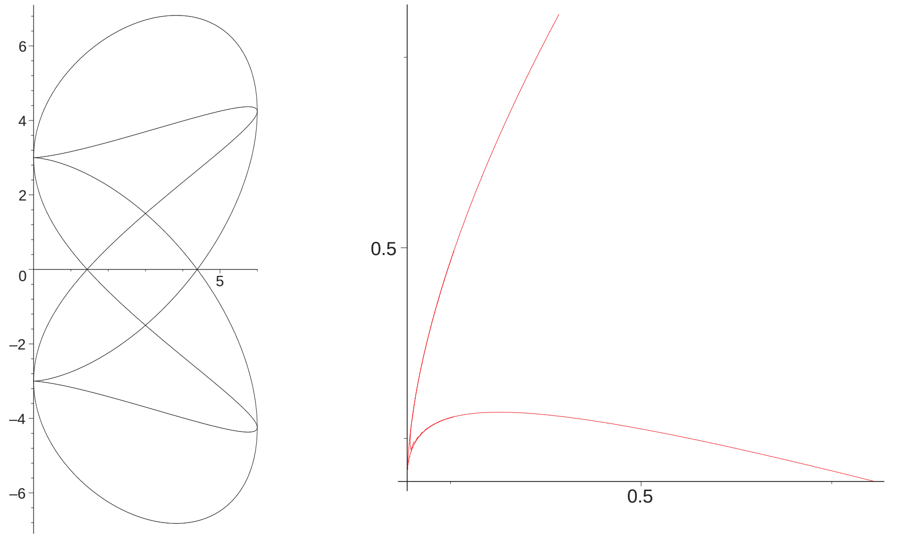
$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

V třinácté a čtrnácté části jsou zkoumány algebraické vlastnosti křivek v okolí regulárních i singulárních bodů – v části třinácté v souvislosti s určením tečny a v části čtrnácté v souvislosti s oskulační kružnicí, jejíž poloměr je poloměrem křivosti v daném bodě. Je zde uvedena také klasifikace singulárních bodů. V hlavní části textu Euler nejdříve opakuje chybu de Malvese (viz str. 159) a neuvažuje, že u algebraických křivek mohou existovat i body vratu druhého druhu, avšak brzo poté, co rukopis odeslal, zjistil, že tuto singularitu má např. křivka na obrázku 5.5(b) o rovnici

$$y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 + x^2 = 0.$$

Euler odeslal opravu a nakladatelem byla vytištěna na konci odpovídajícího odstavce.[24] Zajímavá je část patnáctá pojednávající o křivkách

[24]Této otázce je věnován i Eulerův článek *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hospital (O bodu vratu druhého druhu markýze l'Hospitala)*, Mém. Ac. Berlin, 1751 (1749).



(a) (b)

Obrázek 5.5: Některé křivky, kterými se zabýval L. Euler

majících jeden nebo více „průměrů“, kde Euler pod pojmem *ortogonální průměr křivky* rozumí přímku, která půlí všechny kolmé chordy, tj. osu křivky. Cílem této části je nalézt podmínky, při kterých má křivka jednu nebo více os symetrie, ale ve skutečnosti zde Euler formuluje obecnější úlohu: Najít podmínky, za kterých může být křivka „podobná nebo rovná sama sobě“. Tím ve skutečnosti klasifikuje pohyby v rovině, tj. rovinné transformace, a ukazuje, kterými z nich může křivka přejít sama v sebe (tzv. shodné transformace). V části šestnácté jsou uvedeny rovnice křivek splňující předem dané geometrické vlastnosti, ale většinou jsou zde jen zobecněné vlastnosti kuželoseček (např. se hledají křivky, pro něž suma třetích, čtvrtých a pátých mocnin vzdáleností od dvou daných bodů je konstantní). Podobné otázky jsou řešeny v sedmnácté části v polárních souřadnicích. V části osmnácté Euler navazuje na studium shodností v rovině a zkoumá na křivkách podobná zobrazení a afinní transformace (*affinitas*). V devatenácté části pojednává o průsečících algebraických křivek a v části dvacáté o jejich využití pro konstrukční řešení algebraických rovnic, ale tato část je mnohem méně rozsáhlá než u Descarta nebo Newtona.

V části dvacáté první se pojednává o některých transcendentních křivkách: logaritmické křivce, goniometrických křivkách, spirále, cykloidě, epicykloidě, hypocykloidě a křivce o rovnici

$$x^y = y^x.$$

Část dvacátá druhá je věnována řešení transcendentních rovnic, které obsahují goniometrické funkce.

Svůj dodatek k *Introductio in Analysin Infinitorum* věnoval Euler analytické geometrii v prostoru, jsou zde obsaženy počátky teorie kvadratických ploch. Stejně jako Clairaut užívá jednoduché rovinné souřadnice, místo třetí bere kolmou vzdálenost bodu od roviny. V poznámce uvádí, že by bylo možno užít i tří souřadnic a v pozdějších spisech už je také užívá.

Ve své práci z roku 1767 *Recherches sur la courbure des surfaces (Pojednání o křivých plochách)* na začátku poznamenává, že dosud bylo možné vyjádřit křivost jen pro sféru a zavádí pro obecnou plochu normálový řez, čímž rozumí řez plochy rovinou, která obsahuje normálu. Pro normálové řezy, tj. křivky na ploše, bylo možné vyšetřovat jejich křivosti. Euler zjistil, že mezi normálovými řezy jsou takové, jejichž křivosti jsou maximální, resp. minimální, jejich křivosti označil f, resp. g. Bylo možné dokázat, že tyto dva normálové řezy, které Euler nazývá hlavní (*principal*) řezy, jsou vzájemně kolmé. Jako důsledek určil poloměr křivosti obecného normálového řezu

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos\phi}, \tag{5.3}$$

kde ϕ je úhel mezi normálovým řezem a jedním z hlavních řezů.

V roce 1776 Meusnier[25] přidal dodatek k Eulerově formuli, když uvažoval i šikmý řez: pro rovinu σ, která protíná plochu v křivce o poloměru křivosti r_σ a normály plochy pod úhlem α, Meusnier našel vztah

$$r_\sigma = r \cdot \cos\alpha.$$

V roce 1813 Ch. Dupin[26] převedl Eulerovu formuli (5.3) do elegantnějšího tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\phi}{f} + \frac{\sin^2\phi}{g}. \tag{5.4}$$

Eulerovo dílo je vyvrcholením prehistorického období diferenciální geometrie před vznikem systematického výkladu. Geometrické metody se zde objevují ještě daleko více než v příručkách 19. a 20. století.

[25] Jean Battiste Meusnier (1754–1793).

[26] Pierre Charles François Dupin (1784–1873).

V roce 1750, záhy po Eulerově *Introductio in Analysin Infinitorum*, vychází spis G. Cramera[27] *Introduction à l'analyse des lignes courbes (Úvod do analýzy křivek)*, ve kterém shrnul a doplnil znalosti o počtu určujících prvků křivky, o singulárních bodech a násobnosti průsečíků křivek tak dalece, že závažnějších výsledků v teorii algebraických křivek se v 18. století v podstatě už nedosáhlo.

5.2.2. Gaspard Monge a Carl Friedrich Gauss

G. Monge[28] shrnul své vlastní výsledky spolu s dalšími té doby do první učebnice diferenciální geometrie *Application de l'analyse à la géométrie (Aplikace analýzy na geometrii)*, kterou lze považovat za první systematické dílo zabývající se diferenciální geometrií. Práce je specifická tím, že

vznikala v podstatě více než třicet let a kostru tvořily vysokoškolské přednášky. Tomu musel podléhat i celkový způsob výkladu látky. Monge je věrný způsobu výkladu postupujícímu od známého k neznámému obdobnému jeho výkladu deskriptivní geometrie. [Šmí69, str. 5]

Monge zveřejňoval své práce z diferenciální geometrie během svého působení na vojenské škole od roku 1771. Postupně se jeho úvahy objevovaly i v přednáškách a v roce 1801 byly poprvé vydány pod názvem *Feuilles d'analyse appliqué à la géometrie (Listy aplikace analýzy na geometrii)*. Pozdější vydání z let 1804 a 1809 bylo značně rozšířeno a neslo již název *Application de l'analyse à la géométrie*. Po Mongeově smrti knihu ještě v roce 1828 doplnil dodatkem Liouville.[29]

Z řady dřívějších článků, které pak byly do knihy zahrnuty, je vzhledem k našemu tématu zajímavý memoár, který předložil Monge pařížské akademii v roce 1771. V tomto spise, který následně vytvořil poslední kapitolu *Application de l'analyse à la géométrie*, vyšetřuje křivost prostorových křivek. Byla to vůbec první Mongeova práce z difererenciální geometrie. Zabývá se poloměrem křivosti prostorových křivek. Monge ukazuje, že analogií středu křivosti rovinných křivek je osa křivosti křivek prostorových, nazývá ji polární přímkou. Dokazuje, že plocha, kterou polární přímky tvoří, je rozvinutelná a že daná prostorová křivka

[27] Gabriel Cramer (1704–1752).

[28] Gaspard Monge (1746–1818).

[29] Joseph Liouville (1809–1882). Někteří autoři uvádějí jako datum vydání Mongeovy knihy s Liouvillovým dodatkem až rok 1850. Vzhledem k tomu, že dodatek obsahuje překlad Gaussovy knihy z roku 1828 věnované teorii ploch, zdá se tato možnost pravděpodobnější.

má nekonečně mnoho evolut, které na této ploše leží. U rovinných křivek splývá evoluta s množinou středů křivosti křivky. Množina středů křivosti prostorové křivky leží na ploše polár, ale neshoduje se s evolutou prostorové křivky. Kromě evolut se poslední část spisu věnuje také studiu jednoduchých a dvojných bodů.

S Gaussovou[30] *Disquisitiones generales circa superficies curvas (....)* z roku 1828 začíná nová epocha.

Gauss bývá někdy nazýván otcem diferenciální geometrie. Byl první, kdo uvedl ideu invariantu. [Gra94, str. 334]

Gauss ve své knize vytvořil důmyslnou a hlubokou teorii ploch bez použití tensorového či vektorového počtu, pomocí kterých se dnešní klasická diferenciální geometrie vykládá. Byl prvním, kdo definoval plochu v $\mathbb{E}^3$ prostřednictvím prostého spojitého zobrazení po částech otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$. Do té doby byla plocha chápána jako hranice pevného tělesa.

Rozhodl se, že bude uvažovat jen plochy nebo jejich části se „spojitou křivostí“, tedy takové, pro které v každém bodě existuje tečná rovina. Sféru jako plochu s konstantní křivostí použil podobně jako kružnici v rovině – definoval křivost plochy v okolí daného bodu srovnáváním s křivostí tohoto bodu v jeho okolí na korespondující kulové ploše. Vzorec pro míru křivosti vyjadřuje – viz (5.6), že míra křivosti se rovná součinu křivostí hlavních normálových řezů. Normálový řez je křivka na ploše, proto se Gauss začal zabývat vlastnostmi křivek na ploše, které plochu charakterizují. Tím dal základ úvahám o vnitřní geometrii plochy jako jisté analogii geometrie v rovině.

Analogii přímky v rovině tvoří nejkratší spojnice dvou bodů na ploše. Gauss nalezl její rovnici. Hlavní normála prostorové křivky, která je nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše, se shoduje s normálou plochy. Tuto vlastnost poprvé objevil Euler prostřednictvím úvah o prostorových křivkách, ale Gauss ji odvodil tak, že se vyhnul úvahám, které by vyžadovaly zavádět pojmy z teorie prostorových křivek.

Tak se Gauss dostává ke geodetickým křivkám,[31] na nichž vždy nejkratší spojnice dvou bodů leží. Dokazuje některé věty o nejkratších spoj-

[30] Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

[31] Počátky hlubšího studia geodetických křivek pocházejí z přelomu 17. a 18. století a jsou spojeny se jmény Jac. a Joh. Bernoulliových. Rovnici geodetické čáry publikoval Joh. Bernoulli až v roce 1742, ale znal ji již roku 1728, kdy ji uvedl v jednom ze svých dopisů (viz [Fuc99, str. 150]). V práci z roku 1728 *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente (O nejkratší křivce na libovolné ploše spojující dva dané body)* Euler použil tři vzájemně kolmé souřadnice a ukázal, že plochu lze vyjádřit rovnicí se třemi proměnnými, křivku pak dvěma takovými rovnicemi a uvedl rovnice třech typů ploch – válcových, kuželových a rotačních.

nicích a konstruuje geodetické polární a rovnoběžné souřadnice. Ukazuje, že rovnici nejkratší spojnice lze odvodit i pomocí první diferenciální formy. Potom její element vyjádříme ve tvaru, který je dobře znám z diferenciální geometrie i dnes

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2}. \tag{5.5}$$

Ukázal, že míru křivosti plochy v daném bodě P lze vyjádřit pomocí křivosti dvou extrémních normálových řezů na této ploše bodem P, tzv. hlavních řezů. Dnes toto vyjádření nazýváme Gaussova (úplná) křivost plochy:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2, \tag{5.6}$$

kde κ_1, κ_2 jsou křivosti křivek hlavních řezů. Dále Gauss dokázal tvrzení, které je známé jako *theorema egregium* (znamenitá věta):

Věta 5.1. Křivost K je invariantní vůči otáčení a ohýbání plochy.

Myšlenky o invariantech přinesly další výsledky do teorie křivek. Nejdůležitější vzorce jsou dnes známé jako Frenet–Serretovy formule a dávají vztah mezi vektorovým trojhranem tvořeným vektory tečny ($\vec{t}$), normály ($\vec{n}$) a binormály ($\vec{b}$) a obloukem křivky s:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\vec{n}, \tag{F–S 1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}, \tag{F–S 2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{n}, \tag{F–S 3}$$

kde $\kappa(s)$ je křivost a $\tau(s)$ torze křivky.

Rovnice (F–S 1) a (F–S 2) se objevily v roce 1826 v Cauchyho[32] *Lecons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie (Lekce z aplikací infinitesimálního počtu na geometrii).* Práce byla vydána na základě jeho přednášek na Polytechnice. Estónský matematik Karl Eduard Senff v roce 1831 jako první odvodil všechny tři vzorce.[33] Frenet[34] je prezentuje ve svých tezích v roce 1847, ale bez toho, že by si byl vědom důležitosti jejich významu. Jejich základní význam podtrhl teprve Serret[35] v roce 1851.

[32] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) patří k těm, kdo pozvedli diferenciální geometrii na počátku 19. století.

[33] Viz [Gra94, str. 335].

[34] Fréderic Jean Frenet (1816–1868).

[35] Josef Alfred Serret (1819–1885).

Vzhledem k našemu tématu je třeba připomenout, že dosud převládalo v diferenciální geometrii studium křivek rovinných. Prostorovými křivkami se zabýval pouze Clairaut. Monge na něho navázal a vyřešil všechny složitější otázky, které Clairaut nevyřešil.

Historikové matematiky se neshodují v tom, zda považovat za začátek systematického výkladu diferenciální geometrie práci Mongeovu: *Application de l'analyse à la géométrie* nebo Gaussovu: *Disquisitiones generales circa superficies curvas* a není naším cílem to rozhodnout,[36] ale bezesporu lze říci, že Monge

byl zakladatelem francouzské školy diferenciální geometrie: Meusnier a Dupin, například, byli jeho žáci. V tradici pokračovali další a trvá dodnes; současná terminologie je z velké části francouzského původu. [Gra94, str. 333]

O Gaussovi se již v roce 1877 píše:

Přejde-li později k studiu vyšší geometrie, zejména k vyšetřování ploch, o nichž Euler a Monge si tolikerých zásluh získali, a porovná-li pak tyto metody s těmi, podle nichž se vyšetřuje křivost rovinných útvarů geometrických, zarazí se zajisté nad nestejnými zásadami, jimiž se tu mathematikové řídí, přeje-li si pak míti důslednou a analogickou methodu, najde ji opět jen u Gausse, kterýž vůbec v důsledném provádění nejhlavnějších úloh byl nepřekonatelným mistrem. [Stu77, str. 27]

S těmito slovy můžeme jen souhlasit. Z dnešního hlediska navíc zdůrazněme, že

když Gauss vyjádřil míru křivosti jako součin křivostí hlavních normálových řezů, poznal, že k určení míry křivosti stačí zkoumat křivky na ploše. Tak nachází analogii přímky v rovině – nejkratší spojnici dvou bodů. Tento pojem dále rozvinul. [Ště64, str. 29]

Gauss tím zobecnil geometrii v rovině a částečně vytvořil vnitřní geometrii plochy. Jeho práce dala především nový směr diferenciálně geometrickému zkoumání ploch.

[36] Podrobná studie této otázky viz [Šmí69].

5.2.3. Následovníci Monge a Gausse

Mongeovi žáci vytvořili tzv. francouzskou geometrickou školu.[37] Zmiňme z nich Ch. Dupina, který už v roce 1813 publikoval spis *Développments de géométrie (Rozvoj geometrie)*. Práce obsahuje mnoho příspěvků zejména k diferenciální geometrii ploch, ale také pasáže týkající se křivek – např. o asymptotických přímkách apod. Jeho dalším přínosem k rozvoji diferenciální geometrie je objev tzv. *Dupinovy indikatrix*, která umožní nahradit lokálně průběh plochy rovnicí obsahující jen členy druhého stupně.

Na výsledky Gausse přímo navázal K. Peterson,[38] který v roce 1853 objevil závislost koeficientů 1. a 2. kvadratické formy. Nezávisle na něm přišel na vztah mezi těmito koeficienty i Mainardi[39] v roce 1857 a v roce 1868 Codazzi,[40] odtud termín *Peterson–Mainardi–Codazziho rovnice.* Jelikož první rovnici znal už Gauss, užívá se někdy i termín *Gauss–Mainardi–Codazziho rovnice.* Navíc výsledky Petersona nebyly ve své době ve světě dobře známy, protože jako učitel matematiky nepracoval na univerzitě. Ale následně ovlivnily Egorova[41] a jakmile Darboux[42] a Bianchi[43] jeho výsledky použili ve své práci, stal se světově známým. Do té doby, než byly Petersonovi nejdůležitější práce z let 1866–1867 přeloženy,[44] mnohé jeho výsledky zobecnil Darboux.

Tím se ovšem dostáváme už daleko za rámec vytyčeného tématu.

[37] Mezi přímé Mongeovi žáky, kteří rozvíjeli francouzskou geometrickou školu patří: Jean Hachette (1769–1834), Barnabé Brisson (1777–1828), Charles Julien Brianchon (1783–1864), Jean Victor Poncelet (1788–1867), Théodore Olivier (1793–1853), Charles Dupin, Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796–1874), Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) a další – viz např. [Fol82, str. 53].

[38] Karl Michajlovič Peterson (1828–1881).

[39] Gaspare Mainardi (1800–1879).

[40] Delfino Codazzi (1824–1873).

[41] Dimitri Fedorovič Egorov (1869–1931).

[42] Jean Gaston Darboux (1842–1917).

[43] Luigi Bianchi (1856–1928).

[44] Byly publikovány v Toulouse teprve v roce 1905.