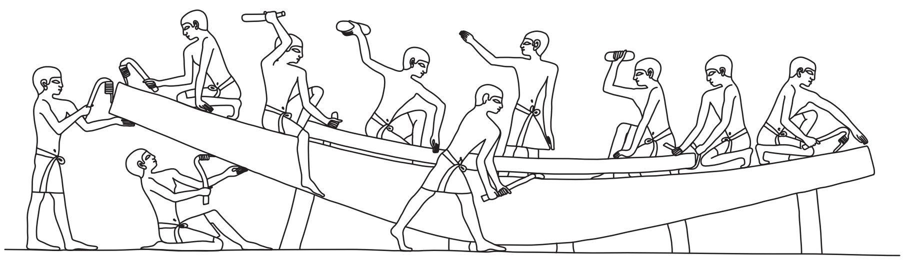
I.4 Počítání se zlomky

Ovládnutí zlomků je jedním ze základních předpokladů pro studium matematiky. Není tedy překvapivé, že se v egyptských matematických textech věnuje počítání se zlomky velká pozornost. Můžeme se zde setkat s úlohami, jejichž účelem je procvičit právě sčítání či násobení zlomků; teprve po zvládnutí těchto operací bylo možné řešit složitější problémy z algebry a geometrie. Naprostá většina výpočtů zaznamenaná v dochovaných textech zahrnovala více či méně složité počítání se zlomky.

Mezi nejjednodušší úlohy patří problém M3 v úvodu moskevského matematického papyru. Jeho zadání popisuje dřevěný stěžeň o délce 30 loktů, z něhož je třeba určit jeho $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. Jedná se tedy o snadný příklad $30 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = 16$ v podobě roztomilé slovní úlohy.



Výroba dřevěné bárky. Předák stojící uprostřed paluby udílí pokyny řemeslníkům, kteří dokončují loď; někteří z nich se právě chystají vztyčit stěžeň. Cejova hrobka v Sakkáře, 5. dynastie

Počítání s kmennými zlomky se dnes může zdát zbytečně složitým, avšak egyptská matematika si vytvořila účelný systém počítání se zlomky a rovněž hojně využívala pomocných tabulek. Tabulky mohly být ve školách memorovány, i když některé dochované výpočty naznačují, že bylo třeba se naučit i postupy, jak k příslušným hodnotám dojít. Dochovaly se nám tabulky na určování $\frac{2}{3}$ z čísla, tabulka sčítání zlomků a tabulka dvojnásobků zlomků s lichým jmenovatelem. Využívání hodnot z těchto tabulek je dobře patrné i v ostatních úlohách, zejména v písemných výpočtech.

Tabulka $2 \div n$

Tabulka označovaná tímto názvem souvisí s jednou ze stěžejních operací staroegyptské matematiky, se zdvojnásobováním, které tvořilo základ násobení a dělení. Určování dvojnásobku čísla tedy muselo být během výpočtů prováděno rychle a v podstatě automaticky.

U celých čísel není zdvojnásobování složité a rovněž zlomky se sudým jmenovatelem nepůsobily obtíže, neboť bylo možné je vykrátit, a získat tak opět kmenný zlomek ($2 \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$). Oproti tomu dvojnásobek zlomku s lichým jmenovatelem bylo třeba vyjádřit několika kmennými zlomky, jejichž součet činil $\frac{2}{n}$.

V mnoha případech nebylo pořízení vhodného rozkladu jednoznačné, avšak tabulka pro každý lichý zlomek uvádí vždy jen jeden odpovídající součet kmenných zlomků. Účelem tedy nebylo shromáždit všechny možnosti. Tabulku $2 \div n$ tedy snad můžeme považovat za pokus o kodifikaci nejednoznačných rozkladů, aby písař, který ji měl při práci po ruce, nemusel nad dvojnásobky dlouho přemítat. Na druhou stranu však některé úlohy v Rhindově papyru dokládají použití jiného rozkladu, než který je uveden v tabulce $2 \div n$, když to bylo pro daný výpočet výhodnější.

Tabulka $2 \div n$ je zaznamenána ve dvou z dochovaných textů, a to na jednom fragmentu káhúnského papyru a na počátku Rhindova papyru. Káhúnský papyrus obsahuje hodnoty dvojnásobků zlomků od $\frac{1}{3}$ po $\frac{1}{21}$. Hodnoty jmenovatelů a odpovídající dvojnásobky jsou přehledně uspořádány do sloupců spolu s kontrolními hodnotami pro rychlou zkoušku: např. $2 \div 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ s kontrolními hodnotami $1 + \frac{2}{3} (= \frac{5}{3})$ a $\frac{1}{3} (= \frac{5}{15})$, jejichž součet dává 2.

Tabulka v Rhindově papyru zahrnuje zlomky od $\frac{1}{3}$ až po $\frac{1}{101}$, které jsou rozděleny do několika sloupců textu. První případ ve sloupci je vždy uveden výrazem „vyděl $2 \div n$“, zatímco ostatní případy se omezují na zadání hodnoty dělitele. Na rozdíl od káhúnského papyru obsahuje každý případ i písemný výpočet, který můžeme chápat jako zkoušku správnosti, nebo jako popis metody, jak určit hledaný dvojnásobek zlomku v tom kterém případě: např. pro zlomek $\frac{2}{7}$ je zaznamenán následující výpočet:

$2 \div 7 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

pomocné hodnoty: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$

$2 \div 7 = \frac{1}{4}$

$4 \cdot 7 = 28$, a tedy $\frac{1}{4} \div 7 = \frac{1}{28}$

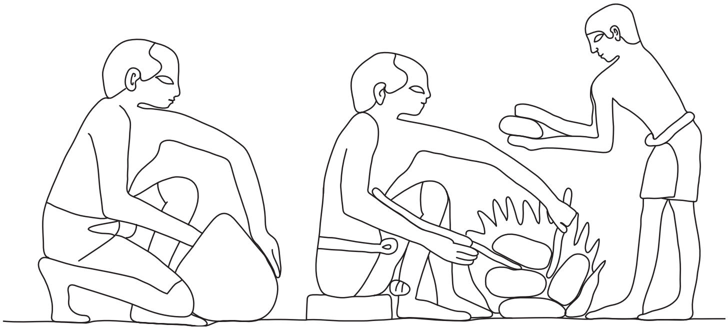
První část úlohy obsahuje zadání a požadované hodnoty dvojnásobku $\frac{1}{7}$, spolu s kontrolními hodnotami. Tato část se zcela shoduje s tabulkou z káhúnského papyru. Následující výpočet demonstruje postup řešení při hledání dvojnásobku $\frac{1}{7}$. Jde o písemné dělení $2 \div 7$ se zbytkem. Dělitel 7 se nejprve půlí, dokud se nedojde k hodnotě co nejbližší 2 (tedy $\frac{1}{4} \cdot 7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$), zbytek je $\frac{1}{4}$. Protože $\frac{1}{4} \div 7$ je rovna $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$, stačí najít čtyřnásobek 7, abychom získali hodnotu hledaného jmenovatele $\frac{1}{28}$.

Na rozdíl od tabulky zapsané v káhúnském papyru nebyla tato pasáž Rhindova papyru klasickou tabulkou. Kromě přehledu rozkladů pro jednotlivé liché zlomky totiž zároveň procvičovala násobení, resp. dělení zlomků a také ukazovala metody, které umožňovaly dosáhnout rozkladu pro jakýkoli případ.

$$
\begin{array}{ll}
2 \div 3 = \frac{2}{3} & 2 \div 53 = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795} \\
2 \div 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} & 2 \div 55 = \frac{1}{30} + \frac{1}{330} \\
2 \div 7 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} & 2 \div 57 = \frac{1}{38} + \frac{1}{114} \\
2 \div 9 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} & 2 \div 59 = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531} \\
2 \div 11 = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} & 2 \div 61 = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} \\
2 \div 13 = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} & 2 \div 63 = \frac{1}{42} + \frac{1}{126} \\
2 \div 15 = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} & 2 \div 65 = \frac{1}{39} + \frac{1}{195} \\
2 \div 17 = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} & 2 \div 67 = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536} \\
2 \div 19 = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} & 2 \div 69 = \frac{1}{46} + \frac{1}{138} \\
2 \div 21 = \frac{1}{14} + \frac{1}{42} & 2 \div 71 = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710} \\
2 \div 23 = \frac{1}{12} + \frac{1}{276} & 2 \div 73 = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} \\
2 \div 25 = \frac{1}{15} + \frac{1}{75} & 2 \div 75 = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} \\
2 \div 27 = \frac{1}{18} + \frac{1}{54} & 2 \div 77 = \frac{1}{44} + \frac{1}{308} \\
2 \div 29 = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} & 2 \div 79 = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790} \\
2 \div 31 = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155} & 2 \div 81 = \frac{1}{54} + \frac{1}{162} \\
2 \div 33 = \frac{1}{22} + \frac{1}{66} & 2 \div 83 = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498} \\
2 \div 35 = \frac{1}{30} + \frac{1}{42} & 2 \div 85 = \frac{1}{51} + \frac{1}{255} \\
2 \div 37 = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296} & 2 \div 87 = \frac{1}{58} + \frac{1}{174} \\
2 \div 39 = \frac{1}{26} + \frac{1}{78} & 2 \div 89 = \frac{1}{60} + \frac{1}{336} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890} \\
2 \div 41 = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328} & 2 \div 91 = \frac{1}{70} + \frac{1}{130} \\
2 \div 43 = \frac{1}{42} + \frac{1}{66} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301} & 2 \div 93 = \frac{1}{93} + \frac{1}{186} \\
2 \div 45 = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} & 2 \div 95 = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570} \\
2 \div 47 = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470} & 2 \div 97 = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} \\
2 \div 49 = \frac{1}{28} + \frac{1}{196} & 2 \div 99 = \frac{1}{66} + \frac{1}{198} \\
2 \div 51 = \frac{1}{34} + \frac{1}{102} & 2 \div 101 = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}
\end{array}
$$

Určování desetiny z čísla menšího než 10

Z dnešního pohledu můžeme tento problém popsat také jako rozklad zlomků s 10 ve jmenovateli. Jedná se o velmi užitečné výpočty, neboť číslo 10 v egyptské matematice často figuruje jako dělitel. V Rhindově papyru bezprostředně za tabulkou $2 \div n$ následuje tabulka $n \div 10$ pro n menší než 10. Na tuto stručnou tabulku navazuje šestice úloh, R1–R6, jež jsou zadány jako slovní úlohy, kdy je třeba rozdělit 1, 2, 6, 7, 8 a 9 chlebů mezi deset lidí tak, aby každý dostal stejný díl.



Venkovští pasáci dobytka pečou chleba. Jeden hněte těsto ve velké nádobě a druhý za pomoci dvou holí vkládá na oheň bochníky, které mu podává mladý pomocník. Hrobka Nefera a Kahaje v Sakkáře, 5. dynastie

V zadání úloh se objevuje počet chlebů určených k rozdělení a poté následuje rovnou výsledek. Postup vedoucí k nalezení výsledku v úlohách chybí, je tedy možné, že byl jednoduše přejat z předcházející tabulky. Po výsledku vždy následuje zkouška a zdá se, že právě v ní spočívá hlavní váha úloh. Výsledek se zde násobí deseti, jinými slovy se postupně zdvojnásobuje, takže následně stačí jen sečíst dvojnásobek s osminásobkem. Během násobení se využily některé identity z tabulky $2 \div n$, a to $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ a $2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. Další identita $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 1$, která se ověřila ve zkoušce první úlohy ve skupině, mohla následně usnadnit sčítání zlomků v příkladech R2–R3 a R6. Podobně identita $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = 1$ objevující se v úloze R4 mohla být využita pro usnadnění výpočtu v R5.

R1: $1 \div 10 = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} \cdot 10 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 1$

R2: $2 \div 10 = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = 2$

R3: $6 \div 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$

$(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}) \cdot 10 = 1 + \frac{1}{5} + 4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 6$

R4: $7 \div 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{30}$

$(\frac{2}{3} + \frac{1}{30}) \cdot 10 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 7$

R5: $8 \div 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

$(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}) \cdot 10 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + 6 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = 8$

R6: $9 \div 10 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$

$(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}) \cdot 10 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + 7 + \frac{1}{5} = 9$

Není zcela patrné, proč byly v této skupině úloh vynechány případy se 3, 4 a 5 chleby, zvláště když písař neopomněl zaznamenat ani tak jednoduchý případ, jako je $1 \div 10$ v úloze R1. Nezbývá tedy než věřit, že opomenutí tří případů lze připsat na vrub něčí nepozornosti.

Sčítání zlomků

Skupina úloh R7–R20 v Rhindově matematickém papyru se někdy označuje jako úlohy *sekem*, což je egyptský výraz s významem „učinit úplným“, „doplnit“. V tomto případě jej však můžeme chápat obecněji jako „počítat“. Přesné zadání úloh není snadné zjistit, neboť výpočty nejsou doprovázeny žádným bližším komentářem. Písemné výpočty nicméně ukazují, že úlohy *sekem* se věnují počítání se zlomky. Určuje se násobek zadaného zlomku, čili se sčítá zadaná hodnota se svými dvěma částmi. V úlohách R7 a R9–R15 se zadané zlomky sčítají se svou polovinou a čtvrtinou, zatímco v úlohách R8, R16–R20 se svou třetinou a dvěma třetinami. Druhý zmíněný případ jasně ukazuje, že hlavním tématem úloh bylo procvičit právě sčítání zlomků. Kdyby šlo jen o získání výsledku, stačilo by místo přičítání třetiny a dvou třetin zlomku určit jeho dvojnásobek, neboť $1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 2$.

Sčítání zlomků se provádělo převedením na společného jmenovatele. Oproti dnešním postupům však v egyptských výpočtech za společného jmenovatele nemusel být zvolen nejmenší společný násobek, takže hodnoty odpovídající čitatelům mohly mít i podobu zlomku. Hodnota čitatele se připsala červeným inkoustem pod každý zlomek ve výpočtu, přičemž zvolený společný jmenovatel měl hodnotu 1. Tato červená čísla jasně zachycovala vztah toho kterého zlomku k ostatním hodnotám ve výpočtu a také v ostatních úlohách ve skupině. V obou skupinách příkladů se totiž operuje vždy s týmž společným jmenovatelem.

Úlohy R7 a R8 celou skupinu příkladů uvádějí a přehledně ukazují metodu jejich řešení. Všechny úlohy ve skupině jsou k sobě v určitém vztahu, neboť zpravidla platí, že hodnota zadaná v jednom příkladu je polovinou zadání předcházejícího příkladu.

R7: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{28})$

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{56}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{112}) = \frac{1}{2}$

Při sčítání se využívá společného jmenovatele 28, červená čísla uvádějící z našeho pohledu hodnotu čitatelů tedy dávají součet 14.

R8: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$
Za společného jmenovatele byla v tomto příkladu zvolena hodnota 18, a to i přesto, že snadněji by se počítalo s nejmenším společným násobkem všech sčítaných zlomků, tedy s 12.

R9: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{14})$
$(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{20}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{50}) = 1$
Zadání této úlohy má navazovat na hodnoty v příkladu R7, jichž je dvojnásobkem. Chybou písaře se však místo $\frac{1}{14}$ počítá s $\frac{1}{10}$. V celém výpočtu chybějí červené hodnoty napomáhající sčítání, což může odrážet zmatení písaře, který si snad svou chybu uvědomil, ašak namísto aby ji opravil, připojil za chybný výpočet správný výsledek.

R7B: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{28})$
$(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{56}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{112}) = \frac{1}{2}$
Výpočet je totožný s příkladem R7. Jeho zadání je poloviční oproti úloze R9, což byl zřejmě důvod, proč jej písař zapsal na tomto místě znovu. Opakování příkladu je nejspíše důvodem toho, že červené hodnoty jsou připsány jen u posledních dvou sčítanců, nikoli v celém výpočtu.

R10: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{28})$
$(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{7} + 9 = \frac{1}{2}$
Zadání je totožné se zadáním úlohy 7B, avšak postup řešení se liší. V hodnotě dvojnásobku se využívá vztahu $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} = 2 \cdot \frac{1}{7}$, který je znám z tabulky $2 \div n$. Výpočet obsahuje mnoho chyb a zcela zde chybí červené hodnoty napomáhající sčítání. Hodnota čtyřnásobku je nesprávná, nejspíš vinou nepozorného písaře.

R11: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{7}$
$\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\frac{\mathit{1}}{\mathit{14}} + \frac{1}{18} = \frac{1}{4}$
I v tomto příkladu se písař dopustil chyb, přičemž svou chybu ve dvojnásobku opravil. Ve výpočtu se neobjevují červené hodnoty.

R12: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{14}$
$\frac{1}{9}\frac{\mathit{1}}{\mathit{14}} + \frac{\mathit{1}}{\mathit{28}} + \frac{1}{36} = \frac{1}{8}$
Chyba z předchozí úlohy se objevuje i v zadání tohoto příkladu. Hodnota dvojnásobku byla poopravena, avšak čtyřnásobek zůstal chybný. Ve výpočtu se neobjevují červené hodnoty.

R13: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{16} + \frac{1}{112})$

$$(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{112}) + (\tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{224}) + (\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{448}) = \tfrac{1}{8}$$

Zadání této úlohy je jiným vyjádřením hodnoty zadané v předcházejícím příkladu, protože $\frac{1}{16} + \frac{1}{112} = \frac{1}{14}$. Červené hodnoty napomáhající sčítání odpovídají společnému jmenovateli 28, zvolenému již v úloze R7.

R14: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{28}$

$$\tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{72} = \tfrac{1}{16}$$

V zadání této úlohy je hodnota $\frac{1}{28}$ zapsána chybně jako $\frac{1}{18}$ a tento omyl prolíná celým výpočtem. Červené hodnoty vztahující se ke společnému jmenovateli 28 nicméně tuto chybu zcela ignorují.

R15: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{32} + \frac{1}{224})$

$$(\tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{228}) + (\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{456}) + (\tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{912}) = \tfrac{1}{16}$$

Zadání této úlohy je jiným vyjádřením hodnoty zadané v předcházejícím příkladu. Písař se znovu dopustil chyby, když v zadání místo $\frac{1}{224}$ zapsal $\frac{1}{228}$. Chyba se opakuje i u dvojnásobku a čtyřnásobku, červené hodnoty však odpovídají správným hodnotám. Vztahují se opět ke společnému jmenovateli 28.

R16: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = 1$$

Tento příklad navazuje na úlohu R8 a jeho zadání je vůči ní dvojnásobné. Výpočet neobsahuje červené hodnoty. Sčítání v tomto případě bylo celkem snadné, proto jich pravděpodobně nebylo zapotřebí, zatímco v předcházející skupině chybějí zpravidla u těch úloh, kde písař ve výpočtu chyboval.

R17: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}$

$$\tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{18}) + \tfrac{1}{9} = \tfrac{2}{3}$$

Zadaná hodnota odpovídá nikoli polovině, ale $\frac{2}{3}$ hodnoty zadané v předchozí úloze. Sčítání se opět obešlo bez červených čísel.

R18: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{6}$

$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{3}$$

Zadání je poloviční vůči předcházející úloze a výpočet se obešel bez červených hodnot.

R19: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{12}$

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{6}$$

V tomto případě již sčítání usnadnila červená čísla vztahující se ke společnému jmenovateli 18.

R20: $(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{24}$

$\frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \frac{1}{12}$

Stejně jako v předchozím příkladu se při sčítání využívá červených hodnot odpovídajících společnému jmenovateli 18.

Doplňování

Úlohy R21–R23 ve svém zadání rovněž obsahují sloveso *sekem* s významem „doplnit“. Hledá se doplnění zadaného zlomku do hodnoty 1 (popř. do $\frac{2}{3}$), čili ve výrazu $A + B = C$ se má najít hodnota B. Řešený problém tedy můžeme chápat jako odečítání zlomků. Výpočty v těchto úlohách jsou doprovázeny komentáři objasňujícími postup, v závěru je vždy provedena zkouška ověřující, že součet zadaných zlomků s výsledkem je skutečně roven 1 (popř. $\frac{2}{3}$). Řešení usnadňují hodnoty vyjadřující vztah zlomků při převedení na společného jmenovatele; v těchto úlohách jich však většina není psána červeným, nýbrž černým inkoustem.

R21: $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ doplnit do 1:

$1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = 1$

V prvním kroku se využívá společný jmenovatel, totiž 15. Do 1 tedy chybí $\frac{4}{15}$, které se dohledají v písemném výpočtu $4 \div 15$. Hodnoty čitatelů usnadňují také sčítání prováděné ve zkoušce. V závěru úlohy je připsán výraz „jiné $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ se k tomu přičtou“, který, jak se zdá, do této úlohy nepatří. Může se vztahovat k následujícímu příkladu, kde se s uvedenými zlomky počítá.

R22: $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ doplnit do 1:

$1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{30}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

Postup je stejný jako v úloze R21. Společným jmenovatelem je u těchto zlomků 30, tedy se dohledává $\frac{9}{30}$.

R23: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}$ doplnit do $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{40}$

Komentáře vysvětlující tuto úlohu se omezují na minimum. Zadané zlomky se mají doplnit do $\frac{2}{3}$, doprovázejí je hodnoty odpovídající společnému jmenovateli 45. Další postup řešení je vynechán a následuje rovnou výsledek a zkouška. Ve zkoušce se zadané zlomky sčítají se stanoveným výsledkem a s $\frac{1}{3}$, takže po sečtení se dojde k 1.

Tabulka sčítání zlomků

Vedle tabulky $2 \div n$ a výpočtů procvičujích práci se zlomky se můžeme setkat i s tabulkou sčítání zlomků, která mohla sloužit jako pomůcka pro usnadnění jiných výpočtů. Dochovala se na koženém svitku z Britského muzea a je na něm zapsána hned dvakrát. Obě verze přitom obsahují tytéž písařské chyby.

Tabulka zahrnuje jak triviální případy, tak i několik obtížných součtů. V celém textu chybějí červené hodnoty vztahující se k procesu sčítání zlomků. Můžeme tedy usoudit, že hodnoty byly opsány z jiného, snad rozsáhlejšího textu. Účelem zjevně nebylo procvičit sčítání, ale jen zaznamenat výsledek.

Zachyceny jsou následující případy (chyby jsou zde opraveny):

$\frac{1}{10} + \frac{1}{40} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{75} + \frac{1}{200} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{50} + \frac{1}{30} + \frac{1}{150} + \frac{1}{400} = \frac{1}{16}$
$\frac{1}{25} + \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{1}{15}$
$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42} = \frac{1}{7}$
$\frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \frac{1}{9}$
$\frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \frac{1}{66} = \frac{1}{11}$
$\frac{1}{28} + \frac{1}{49} + \frac{1}{98} + \frac{1}{196} = \frac{1}{14}$
$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{1}{15}$
$\frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}$
$\frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$
$\frac{1}{21} + \frac{1}{42} = \frac{1}{14}$
$\frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{1}{30}$
$\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{20}$
$\frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$
$\frac{1}{48} + \frac{1}{96} = \frac{1}{32}$
$\frac{1}{96} + \frac{1}{192} = \frac{1}{64}$

Tabulka určování $\frac{2}{3}$ z lichého zlomku

V egyptské matematice hrály $\frac{2}{3}$ velice důležitou úlohu. Jak byly určovány $\frac{2}{3}$ z celého čísla, není z výpočtů patrné. Pravděpodobně pro tento účel existovaly tabulky, které měl písař během počítání při ruce. Ze $\frac{2}{3}$ se následně půlením určovala $\frac{1}{3}$.

Úloha R61 v Rhindově papyru zaznamenává tabulku určování zlomků ze zlomků, kde jsou $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{3}$ výrazně zastoupeny. Obsahuje následující případy:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{33}$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{22}$
$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$	$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{44}$

Vedle této tabulky je zapsán text označený jako úloha R61B, který popisuje algoritmus pro výpočet $\frac{2}{3}$ ze zlomku s lichým jmenovatelem. Postup je zde vysvětlen na případě $\frac{1}{5}$ a můžeme jej vyjádřit vztahem $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x}$. Úloha se uzavírá tvrzením, že stejný výpočet je použitelný pro každý lichý zlomek, což lze chápat jako náznak obecně platného pravidla popsaného na konkrétním případě.