

Matematika v proměnách věků. IV

Marie Kupčáková

Dürerova „Melancholie” aneb detektivní geometrie

In: Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. IV. (Czech). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. pp. 67–102.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401055>

Terms of use:

© J. Čížmár, M. Jarošová, M. Kupčáková, A. Lukášová, M. Pémová, Z. Sklenáriková, R. Smýkalová, V. Svobodová, Z. Voglová

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



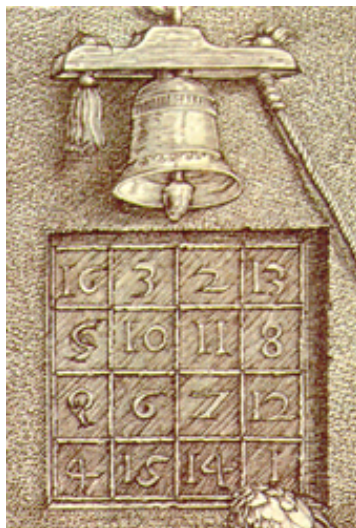
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

pouhé ubíhání do jednoho bodu, domnívat. Studium tohoto Dürerova díla je i po pěti stech letech geometrickým i filozofickým hlavolamem.

V minulém období jsem se zabývala nejprve skutečnou podobou geometrických těles v mědirytině. Zajímavé problémy však začaly narůstat směrem k rekonstrukci určovacích prvků perspektivy, k celkové kompozici mědirytiny a ke hledání metrických a proporčních vztahů. V tom všem se může ukrývat pramen poznání díla i jeho autora.

1 Poznámka k magickému čtverci

Matematici většinou věnují pozornost pouze horní části mědirytiny, kde je na zdi pevnosti vytesán v magickém čtverci letopočet vzniku díla – 1514 (obr. 2). Tento rok však byl pro Dürera důležitý i z jiného důvodu, než že ryl do štočku *Melancholii*. Po dlouhé nemoci mu zemřela maminka a on si zapsal do svého deníku: „*Zakoušel jsem takovou bolest, že se to nedá ani popsat.*“ [MtA]



Obr. 2

Všimněme si, že Dürerova matka se narodila v roce 1451 a zemřela 1514. Můžeme tedy soudit, že právě „magie“ letopočtů a čísel 1, 1, 4, 5 se ve čtverci odrazila:

$$4 - 1 = 3, \quad 5 - 1 = 4.$$

Součty v řádcích, sloupcích a diagonálách jsou 34.

Magický součet 34 najdeme také v pěti čtvercích 2×2 ležících při jeho vrcholech a uprostřed. Dále je to součet čísel 3, 5, 12 a 14 a čísel 2, 8, 9, 15 rozložených vždy na dvou vedlejších úhlopříčkách. [Fu]

Vzhledem k Dürerově stesku po matce se může zdát poněkud diskutabilní Pijoanův závěr: „*Magická tabulka naznačuje, že všechno dobře skončí.*“ [PiD]

2 Charakteristika zobrazené ženy

Uvádí se, že Dürer zamýšlel zpodobnit všechny čtyři temperamenty a začal *melancholií* (netopýr nahoře nese označení *Melencolia I* – detail obr. 14). [MtA]



Obr. 3 [PiD]

V souvislosti s mědirytinou bývá pojem melancholie nahrazován slovy úzkost, deprese či lhostejnost, a to nejenom v literatuře výtvarné a lékařské, ale i na webových stránkách o Dürerovi.

Například se dočteme:

„*Zdá se, že Dürer znal z vlastní zkušenosti deprese, v nichž zlé souhvězdí dobývá moci nad myslí.*“ [ChaA]

„*Symbolizuje snad Melancholie tvůrce v pochybnostech nad svojí prací a myslícího s úzkostí na zítřejší úlohu?*“ [HeD]

„*Melancholie je obrazem lhostejnosti a skleslosti, ale také vyrovnanosti, kterou přináší vědění. Smutek okřídlené ženy upozorňuje jak na radosti, tak na nebezpečí intelektuální zvidavosti.*“ [PiD]

Podíváme-li se v detailu do tváře ženy (obr. 3), vidíme, že se usmívá podobně jako její vrstevnice Mona Lisa. Není „lhostejná“, ani „úzkostná“, možná jenom unavená.

Jako by *Melancholie – Geometrie* měla za sebou nelehkou práci; vytvořila reálné modely těles, (například Vasari, 1512–1573, v díle *Vite de' Pittori* ve zmínce o perspektivě píše, že malíři si zhotovovali plně plastické modely, podle nichž kreslili [KaP]). Pak sestrojila obraz své dílny, nacházející se v místě mezi nebem a zemí, v zobrazení, které právě začalo nabývat mezi umělci obliby, a to v lineární jednoúběžníkové perspektivě (ještě drží kružítko). Řídila se přitom přesnými pravidly uvedenými v knize na klíně.

3 Z historie lineární perspektivy

Kde se ony vědomosti vzaly? Renesance navázala na antický odkaz perspektivního zobrazování prostoru. Nemůžeme proto v 15.–16. století hovořit o „objevování“ perspektivy, ale spíše o jejím „znovuobjevování“.

První umělec, který je v souvislosti s teoretickými základy a řešením obrazů v perspektivě zmiňován, se zřejmě jmenoval Agatharchos ze Sámu, který v 5. stol. př. n. l. maloval divadelní dekorace k Aischylově tragédii. [BaV] Uvádí to Pollio Vitruvius (31 př. n. l. – 14 n. l.), římský stavitel z doby Caesarovy a Augustovy, který pak sám shrnul práce svých předchůdců a sepsal pravidla perspektivního zobrazování v deseti knihách *De architectura*. (Vitruviovy spisy Dürer studoval.)

Nejvýznamnější vliv na rozvoj lineární perspektivy od počátků až do období renesance mělo Eukleidovo teoretické pojednání *Optica*, přibližně z roku 300 př. n. l. Za zakladatele znovuobjevené perspektivy jako vědy pak byl považován až italský teoretik umění, architekt a umělec epochy renesance Filippo Brunelleschi (1377–1446).

Jednu z prvních učebnic *De prospectiva pingendi* napsal r. 1482 Piero della Francesca (1416–1492), který perspektivu definoval jako průmět prostorového útvaru, který je získán jako průnik zorného kužele s rovnou průmětnou. (S jeho dílem se Dürer seznámil v roce 1506 na návštěvě Itálie.)

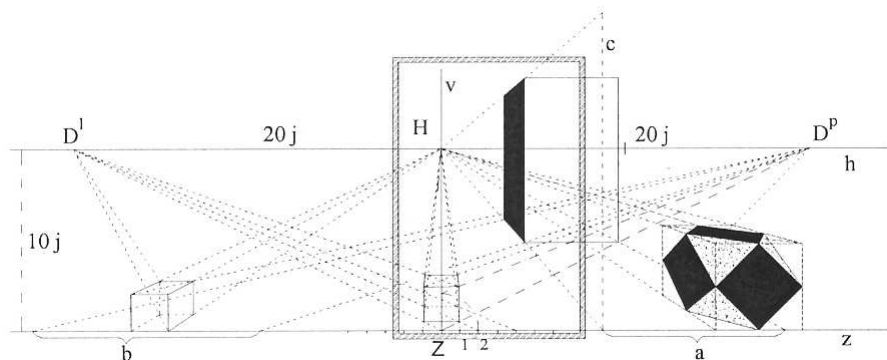
Návod k sestrování perspektivních obrazů podal i Dürerův současník Leonardo da Vinci (1452–1519). V českém překladu jeho *Úvah o malířství* čteme, jak správně nakreslit krajinu:

„Pravidlo č. 32: Vezmi sklo veliké asi jako kreslicí papír, a to upevni dobře před svými očima, t. j. mezi očima a věcí, kterou chceš kreslit, a pak si sedni na 2/3 lokte před tímto sklem a upni hlavu nějakým zařízením tak, aby se nemohla nikterak pohnouti. Pak zavři i zakryj jedno oko a potom štětcem nebo tužkou vyznač na skle, co se tam jeví z prostoru, a pak to okopíruj a přenes na dobrý papír, vymaluj to, libo-li ti, děláje

tak dobře vzdušnou perspektivu.“ [LiU]

4 Příprava k mědirytu

Norimberský umělec Albrecht Dürer nabyl kolem rokem 1510 přesvědčení, že umění je věda a že vzdělání umělce není založeno na osvojení řemeslných dovedností, ale že je zakotveno ve studiu matematiky a zákonů perspektivy. Byl přesvědčený, že s úplnými znalostmi zákonů kresby dokáže sestavit pravou a čistou krásu. V tomto období se možná seznámil s knížkou Jeana Pélerina *De artificiali perspectiva*, v roce 1512 studoval rukopis Albertiho (1404–1472) perspektivního pojednání *O malířství*. Právě Alberti začal používat metodu distančních bodů, aniž by ji však vysvětloval, neboť ji považoval za zřejmou.



Obr. 4

Lze si představit, že Dürer byl v roce 1514 v podobné situaci, jako student, který se učí základům jednoúběžníkové perspektivy a zná pouze ty nejjednodušší konstrukce. (Dürerův spis *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* vyšel až v roce 1525 – teorie perspektivy a stínování je zařazena ve čtvrtém svazku *Pojednání*.) Možná se některé z jeho prvních studií podobaly obr. 4, kterým čtenáři přibližujeme distanční metodu konstrukce dvou krychlí o hraně $2j$, kuboktaedru sestaveného z krychle o hraně $4j$ a kvádrů o rozměrech a , b , c . Rámeček orientačně naznačuje kompozici výřezu. Konstrukce však začínají zadáním perspektivy, a to základní přímkou z , horizontem h , hlavním bodem H a distancí d ; zde $v_h = 10j$, $d = 20j$.

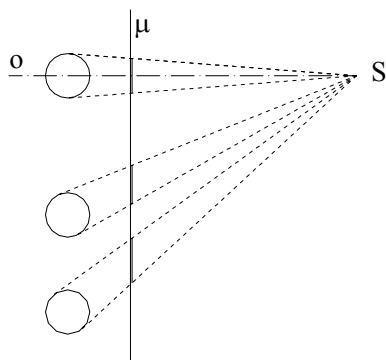
Pokud chce konstruktér dodržovat proporční vztahy, používá jednotku měření, v naší době zcela přirozeně v soustavě SI 1 m, 1 mm, . . .

- Základní přímkou z v *Melancholii* je zřejmě dolní strana obrazu.
- Horizont h evidentně splývá s mořským obzorem.
- Věž pevnosti je v průčelné poloze, obrazy říms její levé boční stěny se sbíhají v hlavním bodě H ležícím na horizontu.
- Myšlená hlavní vertikála v prochází bodem H a je kolmá k horizontu.
- Zadání distance d v *Melancholii* je, jak se domnívám, diskutabilní a nejednoznačné, a právě to způsobuje badatelům problémy s vyhodnocením podoby velkého mnohostěnu.
- Dürer sám uváděl, že vše pečlivě měřil – ale v jakých jednotkách, v Norimberku v roce 1514?

Vše souvisí se vším, proto i na tyto naznačené otázky možná nakonec najdeme odpověď.

5 Obraz a vzor oblého tělesa

Koule a kruh byly v renesanci symboly věčnosti a klidu. Dürer umístil kouli na vertikálu, která symbolizovala aktivitu, a to téměř nejdál pod horizont. Byla to však opravdu soustružená koule, jak se uvádí?



Obr. 5



Obr. 6 [HeD]

Gombrich píše: „*Teorie perspektivy vede někdy k paradoxním výsledkům. O jednom z nich diskutoval Piero della Francesca s Leonardem,*

který mu ukázal, že namalujeme-li řadu sloupů, jako například fasádu chrámu viděnou zepředu, budou postranní sloupy vypadat širší než ty, které jsou přímo před námi. Důvody tohoto paradoxu však nespočívají v tom, že by zákony perspektivy byly nepřesné, nýbrž v tom, že obvyklé výsledky geometrické projekce jsou někdy překvapivé. Sloupy se samozřejmě rozšiřují jak do šíře, tak i do hloubky.“ [GoU]

Stejně tak, když budeme malovat řadu koulí rovnoběžně s průmětnou (obr. 5), budou jejich průměty odpovídat průnikům rotačních kuželových ploch s průmětnou μ . Tedy – kdyby byla v mědirytině zobrazena koule, jejíž střed neleží na hlavním paprsku o , musel by obrys jejího perspektivního obrazu vykazovat eliptické zakřivení.

Dürer zakomponoval kouli například také do rytiny *Učencův sen* z r. 1497 (obr. 6). [HeD] Ta ale nebyla sestrojována v lineární perspektivě, ale mohla být tvořena v perspektivě malířské, kdy směr pohledu není fixován „upnutou hlavou“ jedním směrem, ale průběžně se mění.

Gombrich vysvětluje malířovu projekci prostoru takto:

„Malíř se otáčí a přitom si uvědomuje celou řadu pohledů, které se otáčejí spolu s ním. To, čemu říkáme „podoba“, se vždy skládá z celé řady pohledů, z melodie, která umožňuje odhadovat vzdálenost a velikost; je zřejmé, že tuto melodii může napodobit filmová kamera, ale nikoliv malíř se svým stojanem.“ [GoU]

Naše hlava se tedy otáčí a oko mění směr pohledu, což podle Leonardova pravidla č. 32 není v obraze sestrojovaném v lineární perspektivě možné – zde je poloha hlavního bodu stálá.



Obr. 7



Obr. 8

Ve snaze o co nejvěrnější zobrazení prostoru bez tohoto zkreslování tvarů na okrajích obrazů se u umělců v jednom obraze objevovalo více hlavních bodů, jako to učinil například již Ambrogio di Bondone – Giotto

(asi 1266–1337) – sice nevědomky, ale geniálně.

Zdá se, že v *Melancholii* (obr. 7), narozdíl od *Učencova snu* (obr. 8), byl obrys oblého tělesa pečlivě narýsován kružítkem. Pak by ovšem musel mít vzor naopak eliptický tvar, nikoliv kulovitý. Náznak potvrzení této hypotézy je opět v *Úvahách o malířství*. K zobrazení koule mimo hlavní bod Leonardo da Vinci uvádí:

„Pravidlo č. 59: Malba má býti jako výhled z jediného okna, vyžadují-li toho tělesa tak vytvořená. A chceš-li ve výšce kresliti kulatý míč, musíš jej udělati podlouhlý jako vejce a postaviti se za něj tak, aby zkratkou se ti jevil kulatý.“ [LiU]

Tedy: „Chceš-li, aby koule nacházející se v prostoru vypadala na obraze jako skutečná koule, musíš si vytvořit vejčitý elipsoid a umístit jej tak, aby se z tvého pohledu zobrazil jako kruh.“



Obr. 9



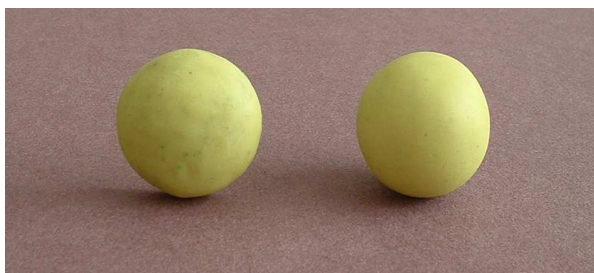
Obr. 10

Podívejme se pozorně, čím se zabývá andílek sedící uprostřed obrazu na mlýnském kameni (obr. 9). Dítě má na klíně tabulku se závěsným očkem, v pravé ruce pisátko (rydlo), levé oko má zamhouřené (podle svalů na spánku), dívá se jen pravým okem (je vidět oční bulvu), tedy kreslí v perspektivě – přesně podle pravidla 32. (Nepíše, jak bývá uváděno.) Ve směru jeho pohledu je právě těleso dole na vertikále až na okraji mědirytiny (obr. 10).

Zkusila jsem podle Leonarda udělati podlouhlé vejce a vyfotografovat ho (obr. 11). Na obr. 12 je vedle této už postavené eliptické čočky koulička.

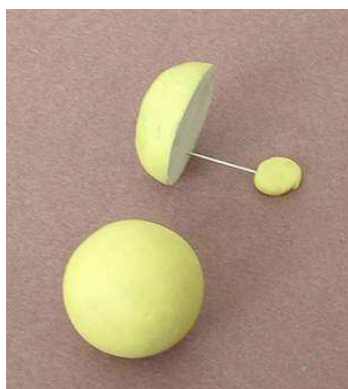


Obr. 11



Obr. 12

Skutečnou podobu prostorových útvarů odhalí pohled z druhé strany, tak jak se dívá chlapec – šikmo shora dolů (obr. 13).



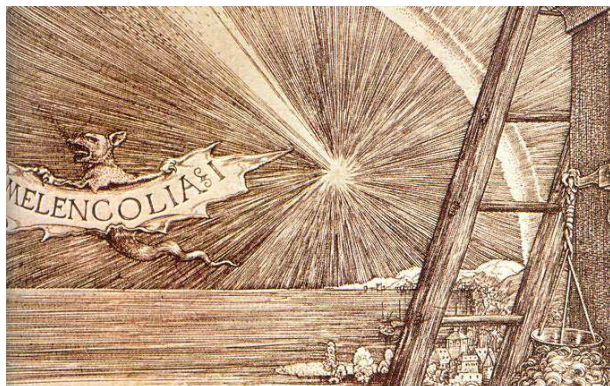
Obr. 13

Někteří badatelé dospěli k závěru, že v rytině je třeba hledat dvojznačnosti, filozofické kategorie nutného a nahodilého, možného a skutečného. [MtA] Pak dítě na mlýnském kameni zná odpověď na otázky týkající se skutečné podoby oblého tělesa.

Tvar objektu, který mohl být teoreticky předlohou obrazu, není možné jednoznačně určit. K identifikaci neznámého prostorového tvaru však můžeme použít ještě nápovědu, a to světlo v mědirytině. Teoretici umění se domnívají, že zde „nedostupné tajemné světlo nahoře je jen světlem, symbolizujícím poznání.“ [ChaA]

Slovíčko „jen“ je zbytečné. Gombrich píše: „Malíři Západu objevili ve světle a stínu prostředek, jímž se do značné míry dá snížit dvojznačnost tvarů viděných z jedné strany.“ [GoU]

Jedním z kořenů manýrismu 16. století byla novoplatónská teorie, tedy přesvědčení, že smysly vnímaná krása je odrazem vyšší dokona-



Obr. 14

losti a projevuje se prostřednictvím proporcí, matematických zákonitostí a světlem, které září lokální barvou (světlo je nezávislé na zákonech). [BaV]

Takové světlo se v mědirytině objevuje – nevychází zepředu ze zářící komety (obr. 14), ale odněkud zprava shora. Po dlouhé době, která uplynula od antiky (Ptolemaios a jeho pojednání o perspektivě, osvětlení a stínech z 2. st. n. l.), se do umění vrátil i vržený stín těles.

Podíváme-li se na vržený stín eliptické čočky (obr. 12), zjistíme, že odpovídá vrženému stínu Dürerova oblého tělesa (obr. 7). Jak je vidět na obr. 12 a obr. 8, stín koule by byl širší.

Při rekonstrukci původního zadání lineární perspektivy v *Melencolia I* jsem předpokládala, že právě poloměr koule by mohl odpovídat neznámé jednotce měření. Výška horizontu a graficky určený poloměr koule jsou souměřitelné, skutečný poloměr koule odpovídá $1/10$ výšce horizontu v_h .

Pak by mohlo být autorovým cílem zobrazit kouli o poloměru $r = 1j$, vepsanou např. do krychle o hraně $2j$ hned za průmětnou na vertikále, nad základním bodem (obdobně umístěná krychle viz obr. 4). Dá se však soudit, že Dürer záměrně nesestrojil perspektivu koule, ale perspektivu kružnice středního průčelného řezu koule, a narýsoval kružnici.

6 O hřebících, bohatství a jednotce měření

Pokud by Dürer scénu modeloval a skutečně si vytvořil podle pravidla 59 těleso *podlouhlé jako vejce*, musel by ho podepřít – třeba hřebíkem, stejně jako jsem podepřela špendlíkem model z plastelíny (obr. 13).

Všimněme si (obr. 15, obr. 34), že se v mědirytině objevily nejenom kleště na vytahování hřebíků, vykukující zpod sukne (detail obr. 35), ale i rozhozené hřebíky.

Za zmínku stojí i to, že na lemu sukne *Melancholie* leží měsíc s penězi (obr. 15). Sám Dürer prozradil, že to je symbol bohatství a řekl: „*Chvála dobrého, na geometrii založeného řemesla se zdůvodňuje i dobrým výdělkem.*“ [ChaA] Tuto myšlenku se mi dodnes nepodařilo dokázat.



Obr. 15 [PiD]

Dolní část mědirytiny zobrazuje podle renesančních pravidel aktivní část života, proto tu najdeme řemeslnické nářadí, která není chaoticky rozhozeno, jak se uvádí, ale je vloženo do zcela konkrétních čar směřujících přesně do úběžníků U^n , U^s stěnových úhlopříček velkého mnohostěnu (jak je více patrné z celkové rekonstrukce na obr. 39). Jedná se o hoblík (popřípadě dobové hoblovadlo na kámen), pilku a pravítko.



Obr. 16 [wMe]

(Poznámka: Většina reprodukcí *Melancholie*, včetně [PiD] má ořezané okraje, největší plochu mědirytiny jsem našla, bohužel v horší kvalitě, na internetu [wMe]; skupinu nářadí bez ořezání uvádím ještě jednou – na obr. 16.)

V sousedství koule je zvláštní předmět (v detailu na obr. 7), oba tvary spolu jistým způsobem souvisejí.

Od začátku rekonstruování obrazu mědirytiny jsem se držela myšlenky, že každý normální konstruktér si zadá celočíselný poloměr koule, např. $r = 1j$. Ostatní proporce *Melancholie* jsou s jednotkou $r = j$

souměřitelné, včetně vzdálenosti významných úběžníků od bodu H .

$$|U^n H| = |U^s H| = 20j \quad (\text{obr. 39}).$$

Reprodukce má rozměry $10 \times 13j$. Udávané skutečné rozměry mědirytiny jsou 189×239 mm. To znamená, že už na počátku 16. století Dürer použil jednu z pozdějších známých evropských tzv. *obrazových měr* pro portrét (19×24 cm).

Při porovnání rozměrů reprodukce a skutečných rozměrů vychází, že autor pracoval s jednotkou odpovídající asi 1,83 m. Problém jsem konzultovala s nejpovolanejším českým odborníkem na staré míry dr. Ladislavem Janglem, který moji domněnku podpořil a pomohl mi najít historickou odpovídající míru – norimberský sáh (die Klafter), pro který se uvádí převod 1,82 m.

Sáh byl tedy základní jednotkou, jemnějšími jednotkami byly: **stopa** ($1/6$ sáhu), **palec** ($1/12$ stopy), palec měl dále 12 **čárek** a čárka 12 **bodů**.

V *Melancholii* je však jednotkou j měření setina (!) sáhu, pro ruční měření přibližně $j = 1,8$ cm. Pravitko v obraze má délku poloviny norimberského sáhu.

Náradí v sousedství koule připomíná tak trochu „zouvák“ a trochu „úhelník“. Z metrických vztahů vychází, že se jedná o měřicí a rýsovací pomůcku, jejíž délka odpovídá stopě. Je to možná jakýsi stopo-palco-měr se zářezy pro konstrukce pravých úhlů – ty mají délku (hloubku) palce.

Při měření obrazů mohl proto Dürer používat jinou než obvyklou jemnou míru. Poloměr koule už zastupuje měření dekadické, úhelník historické duodecimální.

7 Obraz a vzor mnohostěnu

Bouřlivé diskuse se dosud vedou o tom, jakou skutečnou podobu má Dürerův mnohostěn. [LvZ] Obrovské těleso je vytesáno z kamene, který byl symbolem tajemství, nadlidské síly a moci.

Při prvním pohledu na obraz velkého mnohostěnu (obr. 17) usoudíme, že jeho vzorem byla ořezaná krychle, protože v každém vrcholu se sbíhaly tři čtverce – opatrněji řečeno – v každém z viditelných vrcholů se u vzoru původně sbíhaly tři rovnoběžníky.

V roce 1999 formuloval Schreiber svoji představu o tom, že skutečné Dürerovo těleso vzniklo protažením jedné tělesové úhlopříčky krychle a následným ořezáním protějších vrcholů (obr. 18). [SchN]

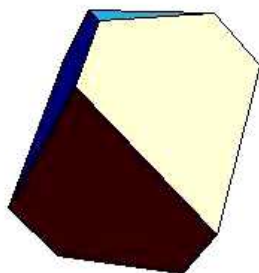


Obr. 17

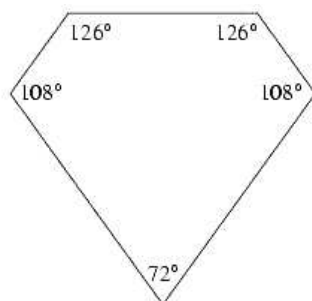
Rozšířené argumenty je možno vyhledat na internetu (ve vyhledávači zadáme heslo *Dürer's Solid*). Spočívají v tom, že když sestrojíme mnohostěn se dvěma trojúhelníkovými a šesti shodnými pětiúhelníkovými stěnami (podle obr. 19) s poměry délek stran

$$1 : \frac{3 + \sqrt{5}}{2} : \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}},$$

pak těleso „vypadá jako Dürerovo“ [wDs] Je to však spíše jenom přání, jak napovídá porovnání obrazů levých stěn těles na obr. 17 a obr. 18.



Obr. 18[wDs]



Obr. 19 [wDs]

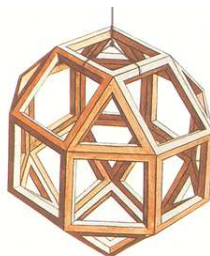
Weitzel podpořil r. 2004 Schreiberův názor, že Dürer záměrně zobrazil mnohostěn, kterému lze opsat kulovou plochu. [WeF] [LvZ]

Dürera bezpochyby obdivujeme jako matematika, ale je stěží představitelné, že by řešil v perspektivě tak obtížný konstrukční úkol mezi prvními.

Proč ale Dürer řezal šestistěn? Vraťme se opět zhruba do roku 1500. Velký vliv měl tehdy na Dürera Luca Pacioli (1445–1514), významný italský matematik, se kterým se Dürer osobně setkal a který ovlivnil i pozdější směr jeho vědecké tvorby. Luca Pacioli pak měl blízké vztahy se současníky Albertim, Pierem della Francescem (1416–1492) i Leonardem da Vinci (1452–1519). Proto mohl být Dürer jeho prostřednictvím seznámen se všemi „novinkami“ i se vznikem knihy *De divine proportioni – O božské proporci*, kterou Pacioli dokončil r. 1498 a vydal v roce 1509.



Obr. 20 [RoL]



Obr. 21 [RoL]

Rozebíral v ní nejenom geometrické základy perspektivního zobrazování, ale zařadil i kapitolu o mnohostěnech, kterou Leonardo da Vinci ilustroval. Ten pečlivě vyrobil a narýsoval všech pět pravidelných mnohostěnů a několik archimédovských mnohostěnů, které vznikají ořezáním vrcholů a hran pravidelných mnohostěnů.

Na obr. 20 je například Leonardův *šedesátistěn nad dodekaedrem*, na obr. 21 *rombokuboktaedr*, který patří právě mezi archimédovské mnohostěny.

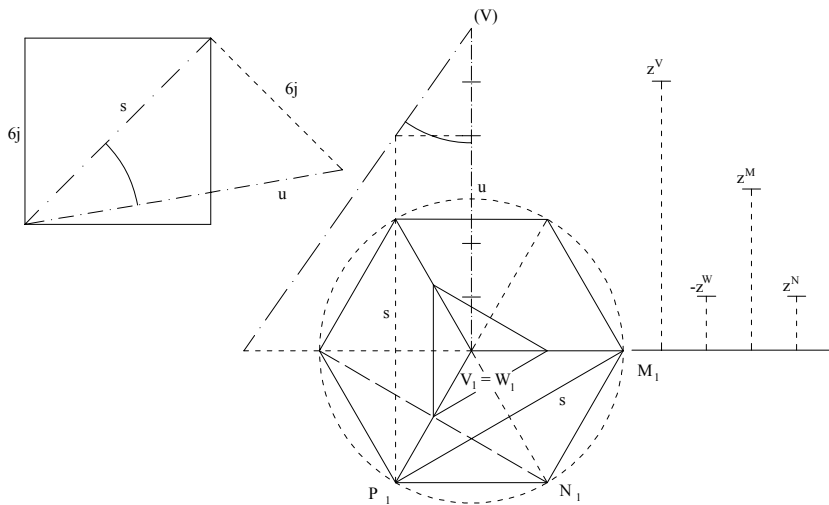
Lze se tedy domnívat, že Dürer chtěl vyobrazit alespoň jeden polopravidelný mnohostěn, třeba *kuboktaedr*, který vznikne ořezáním krychle rovinami procházejícími středy jejích hran (jako jsme tak učinili a zobrazili na obr. 4 vpravo). Možná se mu úloha zdála příliš snadná, a rozhodl se zobrazit krychli v netypické poloze, se svislou tělesovou úhlopříčkou (to už není triviální úloha).

Čtverec byl symbolem pozemskosti, pasivního přístupu (magický čtverec), v pootočení na vrchol už symbolem aktivního ženského sexuálního principu. Táž symbolika platí i pro ležící krychli a krychli na vrcholu. Dürer tedy mohl mnohostěnu propůjčit význam aktivního žen-

ského principu, ale odřízнул mu dva protější vrcholy (to aby kámen ne-
padal).

Zdá se, že Dürer v *Melancholii* stereometrické modely vyobrazil, ale
žádný skutečný vzor nepoužil. Byl přece přesvědčený, že perspektiva je
prostředkem k dosažení dokonalosti bez zhotovených modelů.

Vložila jsem *Melancholii* do počítačového výkresu, obtáhla a pro-
dloužila přímé čáry (obr. 39). Zjistila jsem, že byla narýsována s ob-
divuhodnou přesností. Prodloužené hrany se skutečně protínají – dva
úběžníky jsou nad horizontem, jeden pod horizontem, úběžníky stěno-
vých úhlopříček a příček se nacházejí souměrně ve vzdálenostech 20j
podle hlavního bodu.



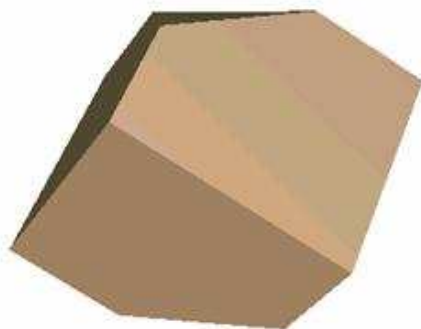
Obr. 22

Pro polohu mnohostěnu našel Dürer místo vedle vertikály vpravo. Svislou úhlopříčku myšlené krychle umístil zřejmě do bodu V_1 nacházejícího se 1,5j vpravo od základního bodu a 21,5j do hloubky (měl v kružítku 20j ze zadání polohy úběžníků), hranu krychle zvolil 6j, aby byl obraz tělesa dostatečně velký, i když je objekt hodně daleko. Stěnová úhlopříčka je s , tělesová úhlopříčka u pak má délku zhruba 10j (viz obr. 22).

Dürer si musel ke konstrukci perspektivy seříznuté krychle připravit kóty vrcholů V a W na diagonále krychle v prostoru, dále kóty vrcholů M , N , kterými procházejí stěnové úhlopříčky n , s , a zaměřit

v základní rovině polohy bodů V_1 , M_1 , N_1 , P_1 . Na základě toho, že horní levá hrana trojúhelníkového řezu směřuje na obraze do hlavního bodu, měl šestiúhelníkový půdorys krychle (tedy pohled shora) stejnou polohu, jako na obr. 22.

Dále zřejmě Dürer sestrojil perspektivy bodů V' , W' , M' , N' , a to podle svých dostatečných znalostí – stačí pouze ty, které ilustruje úvodní obr. 4.



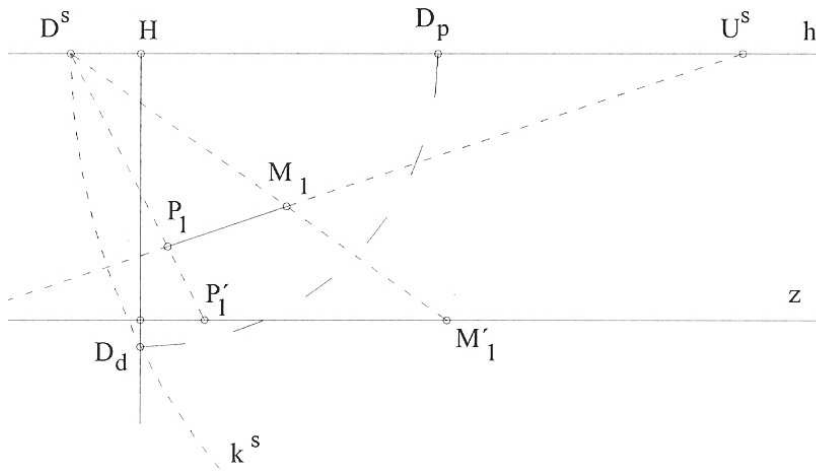
Obr. 23

Ke konstrukci bodu P' a dalších viditelných vrcholů pak mohl využít vlastnosti krychle jakožto rovnoběžnostěnu, tedy příslušné úběžníky. Konstrukce se tím zjednoduší. (Nedovedu si však představit, že by v r. 1514 takto sestrojil či počítal souřadnice vrcholů takového ořezaného klence, kterému lze opsat kulovou plochu.)

Pokud by se Dürerovi záměr zobrazit ořezanou krychli podařil, získal by obraz jako na obr. 23, kde je perspektiva počítačového modelu ořezané krychle.

Proč byl jeho výsledek jiný? Z pedagogického či psychologického pohledu lze předpokládat chybu, jíž se dopustil.

S úběžníky stěnových úhlopříček n , s mohl autor pracovat tak, jako by to byly distanční body (tedy úběžníky směrů 45° , 135°), tedy jako by byly **směry n , s navzájem kolmé**, přičemž na krychli je jejich úhel 120° . Z praktických důvodů je jasné, že polohu úběžníků U^n , U^s na horizontu si musel autor dopředu promyslet a zahrnout ji do zadání, jinak by se mohly ocitnout mimo nákresnu – mimo pracovní plochu; jsou tedy v dostupné vzdálenosti 20j od H . Nejprve jsem se domnívala, že je pak Dürer mohl omylem považovat za distanční body a že si neuvědomil jejich odchylku 120° . Na základě pozdější rekonstrukce jsem



Obr. 24

úvahy poopravila v tom smyslu, že věděl, kde jsou úběžníky směrů 45° , 135° , ale délky úseček na přímkách směrů 30° a 150 mohl odměřovat špatně. Vlastně stejně, jako by tyto úběžníky body distančními byly, tedy pomocí bodu H .

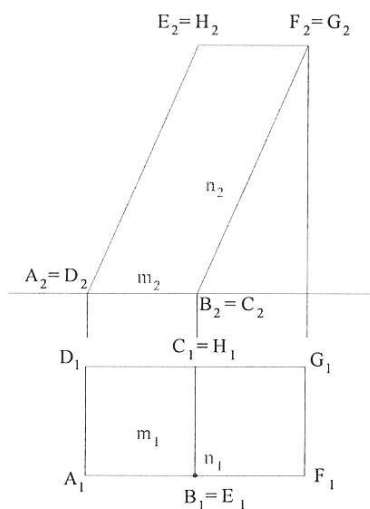
Chceme-li však odměřit úsečku na přímce směru s , která leží v základní rovině a má úběžník $U^s \neq D_p$, pak nejprve musíme určit tzv. dělicí bod D^s přímky s , který je průsečíkem dělicí kružnice k^s ($U^s; |U^s D_p|$) a horizontu h (viz obr. 24, podrobně viz např. [MaS]). Skutečnou délku $P'M'$ úsečky PM pak dostaneme promítnutím perspektivy úsečky z bodu D^s na základnici z .

Pouze tehdy, je-li přímka hloubková, je jejím dělicím bodem levý nebo pravý distanční bod. Možná tedy byly špatně odměřeny hloubkové délky.

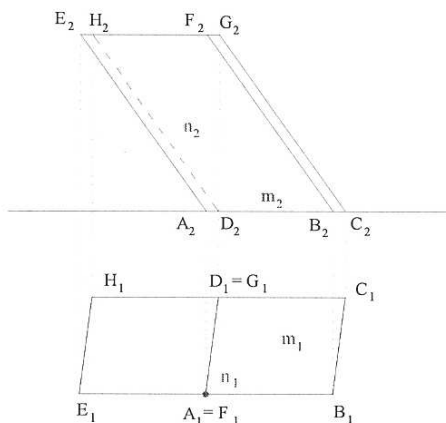
Hledala jsem tvary stěn mnohostěnu tak, aby se jejich obrazy podobaly těm na rytině. Bohužel, středový průmět bodu nestačí k jeho determinaci v prostoru, i když známe hlavní bod, distanci, popřípadě horizont. [KdP] Musíme tedy vycházet pouze ze stereometrických úvah a vracet se k možným Dürerovým úvahám.

Předpokládejme, že tři viditelné stěny na obraze měly původně tvar rovnoběžníků, a hledejme rovnoběžnostěn, jehož stěnové úhlopříčky jsou kolmé mimoběžky. Typově podobný útvar – šikmý čtyřboký hranol – je zobrazen ve vhodném umístění v Mongeově projekci na obr. 25.

Pomocí počítačového modelování jsem získala mnohostěn zobrazený v Mongeově promítání na obr. 26. Model po ořezání a rendrování je na

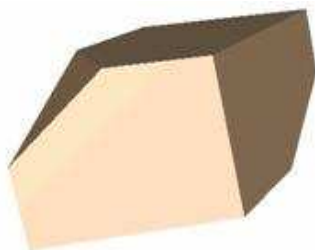


Obr. 25



Obr. 26

obr. 27, obr. 28 a obr. 32. Vidíme, že mnohostěn nemá 6 shodných stěn.



Obr. 27

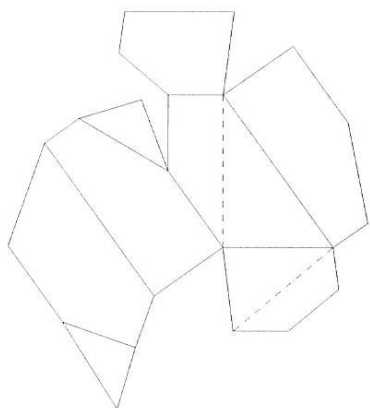


Obr. 28

Síť mnohostěnu je na obr. 29, boční fotografický pohled na obr. 30.

8 Konfrontace stereometrických těles s mědirytinou

Provedeme nyní „důkaz fotem“: obě geometrická tělesa, vymodelovaná na základě stereometrických úvah, položíme před obálku Pijoanových *Dějin umění*.



Obr. 29



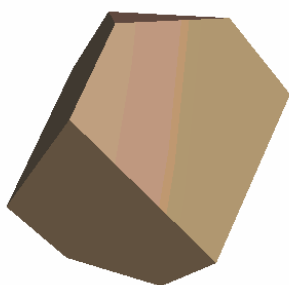
Obr. 30



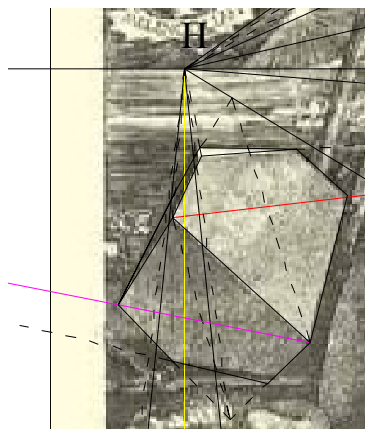
Obr. 31

Konfrontace (obr. 31) dopadla vcelku příznivě.

Je však vidět, že spodní trojúhelníkový řez našeho modelu neměl být shodný s horním řezem. Ani v *Melancholii* nejsou tyto trojúhelníky shodné. Dokládá to i počítačová rekonstrukce, která ukázala, že v jednom místě autor upravil dokonale přesnou konstrukci tak, „aby to vyšlo“, a to v řezu tělesa dole (detail na obr. 32). To zřejmě proto, aby spojnice odříznutých vrcholů zůstala jakoby „svislá“.



Obr. 32



Obr. 33

(Úprava modelu na nesouměrný tvar nebyla provedena.)

Nelze se divit, že byl Dürer po dokončení *Melancholie* rozmrzelý, že „čím dál víc viděl, jak se nekonečná rozmanitost života nedá sevřít do matematických zákonitostí“. [ChaA] A že prohlásil: „*Ale co je krása, to nevím.*“ [PiD]

Zbývající temperamenty *II, III, IV* Dürer nikdy nesestrojil . . .

Hetteš uvádí: „*Dürer se snažil najít krásu v dílech malířů, v přírodě a vymyšlených konstrukcích. Po celý život těžce zápasil o její poznání; často se mýlil a hodně trpěl. Ve své době, ve svém prostředí nemohl dozrát natolik, aby našel odpověď na vše, co jako nezodpovězené otázky měl na mysli.*“ [HeD]

Nabízí se však ještě vysvětlení, které nehledá chyby, ale obhajuje Dürerovu genialitu.

T. Lynch svůj článek v periodiku *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* (1982) uzavírá slovy:

„*Jestliže zobrazení mnohostěnů bylo považováno za jeden z hlavních problémů perspektivní geometrie, jak lépe by mohl Dürer prokázat své*

schopnosti na tomto poli než tím, že do rytiny začlení takto nový a možná dokonce unikátní tvar a nechá další geometry řešit otázky, co to je a odkud se to vzalo.“ [LvZ]

Veškerá snaha o pochopení čisté geometrie v *Melancholii* se mi zdála neúplná, pokud jsem nezačala vážně zvažovat také dobově důležité výtvarné prvky renesančních děl – proporci, kompozici, symboliku.

9 Dürerova antropometrie a základní kompozice *Melancholie*

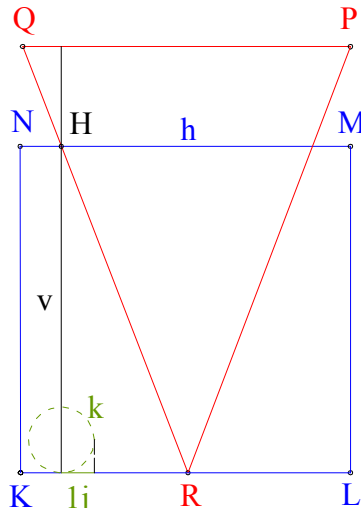
Za základ proporce uměleckého díla byl v renesanci považován racionální řád. Proporční nauka byla odvozovaná z lidské postavy a byla pro Dürera objektivní ideou matematicky vyjádřitelné krásy. Věnoval jí mimořádnou pozornost a tzv. antropometrii chápal jako součást geometrie. Zabýval se velmi pečlivě a dlouhodobě studiem proporcí člověka a došel k závěru, že výšku postavy lze odvodit z výšky hlavy a že existuje plynulá řada figur vysokých od šesti a půl výšky hlavy až k postavám vysokým osminásobek výšky hlavy. [KoA] Je tedy jeho kánon jiný, než byly kánony Vitruvia či Leonarda da Vinci.

Kompozice každého významného renesančního uměleckého díla byla převážně trojúhelníková a jejími důležitými prvky byly horizontála, vertikála, čtverec, kruh a rovnoramenný trojúhelník. Velká pozornost byla věnována symetrii jako tajemství tvorby.

Také toto všechno je v mědirytině *Melencolia I* důmyslně ukryto, teprve trpělivý geometrický rozbor však pomohl uvedené charakteristiky objevit. Nakonec jsem dospěla k následujícímu přesvědčení:

- Prvopočáteční kompoziční základ mědirytiny tvořily rovnoramenný trojúhelník PQR a čtverec $KLMN$ (obr. 34).
- Kružnice k o poloměru $1j$ reprezentuje symbolickou zkratku obrysu hlavy.
- Výška trojúhelníku postaveného na hlavní vrchol (symbol ženského principu) měří $13j$, tedy šest a půl krát výšku hlavy (v souladu s antropometrií malé postavy).
- Základna PQ měří $10j$.
- Strana MN čtverce je ve výšce ramenního kloubu stojící postavy.
- Rameno QR trojúhelníku a strana MN čtverce se protínají v hlavním bodě H obrazu, přímka MN tvoří horizont h .

- Svislá vertikála v prochází hlavním bodem.



Obr. 34

10 Geometrie a sedm svobodných umění

Dürerovi jistě šlo po stránce geometrické o to, aby bezchybně sestrojil v lineární perspektivě mědirytinu, neboť techniku mědirytu umožňující dokonale přesné vedení čar, bravurně ovládal. Připomeňme – zákony lineární perspektivy se tehdy teprve vytvářely, zatím byly známy pojmy horizont, vertikála, hlavní bod a distanční bod.

Po stránce obsahové se autor rozhodl pro alegorii *Geometrie*, jakožto uznávaného svobodného umění.

Od antického starověku byla sedmi svobodnými uměními myšlena soustava oborů vzdělání a činností svobodného občana.

1. skupinu (trivium) tvořily gramatika, dialektika, rétorika.
2. skupinu (quadrivium) aritmetika, geometrie, hudba a astronomie.

Ve výtvarném umění byla svobodná umění zobrazována ženskými postavami, proto je alegorií *Geometrie* žena, a to zamyšlená *Melancholie*, do které florentští humanisté promítali typ geniální a filozofický.

V mědirytině se objevuje vždy alespoň jeden z atributů každého ze sedmi svobodných umění: gramatika (dítě nad knihou – obr. 9),

dialektika (psí hlava – obr. 35), rétorika (peníze v měšci – obr. 15), aritmetika (magický čtverec – obr. 2), geometrie (kružítko – obr. 36, pravítko – obr. 15), hudba (zvon – obr. 2), astronomie (obloha – obr. 14).



Obr. 35



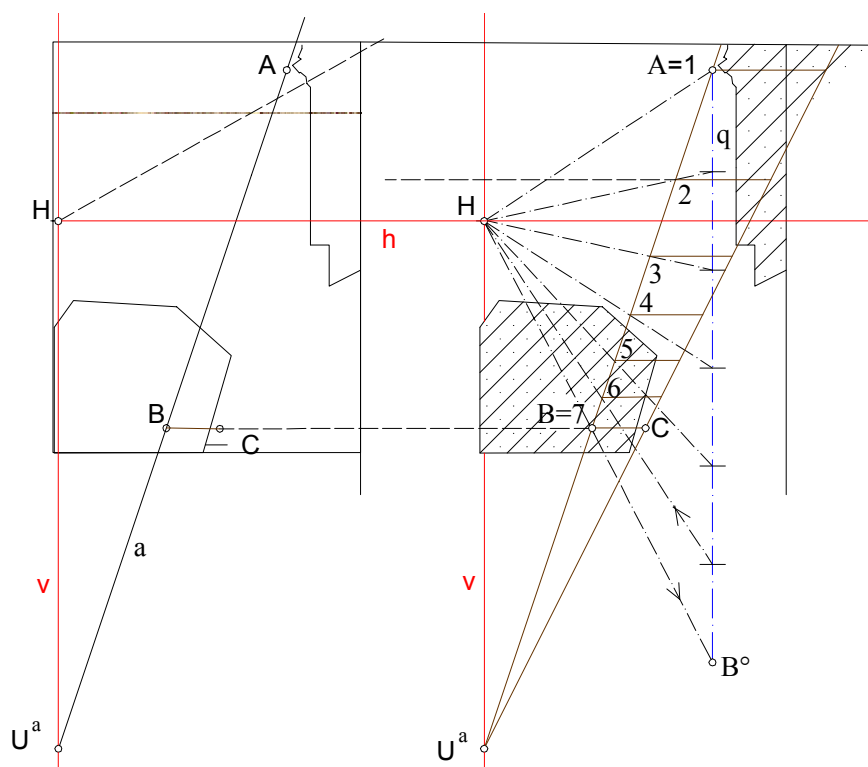
Obr. 36

11 O pokrouceném žebříku

Všem sedmi svobodným uměním byla nadřazena *Filosofie*, mezi jejíž atributy patří kniha (pod rukou ženy – obr. 36) a **žebřík o sedmi příčkách** (vzadu za věží). A právě na příkladu zobrazení žebříku lze ukázat, že konstrukce obrazu neviděného, pouze vymyšleného objektu v lineární perspektivě, není jednoduchá (obr. 37).

Možná Dürer zobrazil Babylonskou věž, která byla symbolem lidské pýchy. Zdá se, že tato smrtelníkem nespátřená vymyšlená věž měla dokola sokl (v mědirytině těžko rozeznatelný), výrazně přečnávající půdorys věže (obr. 39).

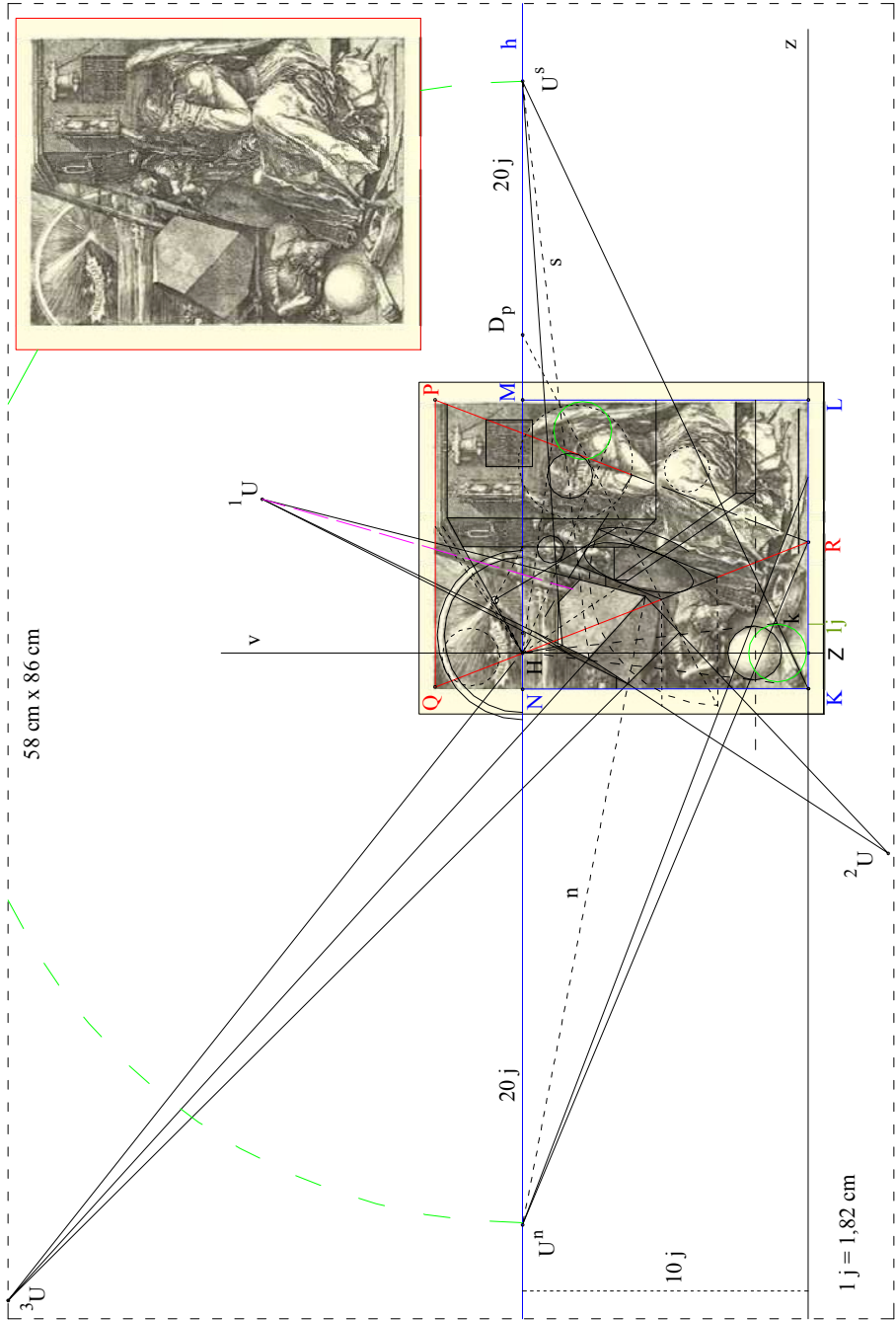
Žebřík vedoucí z hluboké pozemskosti do nebes se opírá o zadní stěnu věže, proto směr ráhna a patří hloubkové svislé rovině. Všechny takové navzájem rovnoběžné roviny mají společnou úběžnici – hlavní vertikálu v . Úběžník U^a proto leží na vertikále a mělo by do něj mířit i druhé ráhno procházející bodem C . V obraze tomu tak není, proto jsou ráhna mimoběžná, žebřík pokroucený.



Obr. 37

Mezi první příčkou A a sedmou B má být vloženo dalších pět, aby jich bylo celkem sedm jako svobodných umění, a to v pravidelných intervalech. Úlohu lze řešit pomocí promítnutí úsečky AB do svislice AB^o . Vidíme, že Dürerův výsledek správné konstrukci neodpovídá, ale je zajímavé, že sestrojená příčka 2 odpovídá Dürerově třetí.

Pokud budeme Dürera za každou cenu bránit a budeme předpokládat jeho absolutní bezchybnost, pak můžeme v souvislosti se žebříkem argumentovat i jinak: autor chtěl zobrazit hledání pravdy. Ale ze žebříku *Filosofie*, který k tomuto poznání vede, se padat musí, protože absolutního poznání se smrtelník nedobere. Žebřík je proto naschvál pokroucený a záměrně má nestejně vzdálené příčky.



Obr. 39

a kometa jsou atributy antikrista, jehož městem byl Babylon.

Všechny zobrazené objekty se nacházejí pouze vpravo od vertikály, neboť pravá strana je vymezena pro rozum, řád a jasnost. Na levou stranu obrazů se naopak umisťoval cit, chaos, srdce, nejasnost.

V celkové rekonstrukci na obr. 39 jsou vyznačeny i všechny úběžníky (1U , 2U , 3U , U^n , U^s), které Dürer s neuvěřitelnou přesností používal. I když nevím, na jak velkém prostoru mohl pracovat, vychází, že mu stačilo 58×86 cm (náš nejstarší stůl po předcích z 19. století má pracovní plochu 68×88 cm).

13 Perspektiva mlýnského kamene

Za nejdokonalejší považuji z konstrukčního pohledu sestavení správného perspektivního obrazu kružnice ležící v nakloněné rovině. Na základě vět projektivní geometrie jsem její eliptický obraz rekonstruovala a od Dürerova se prakticky neliší.

Lze vcelku spolehlivě předpokládat, že skutečným tvarem mlýnského kamene byl nízký kruhový rotační válec. Nachází se za průmětnou, je v obecné poloze, obrazem jeho kruhové hrany ve středovém promítání tedy bude elipsa. Ověříme, zda obrysová křivka je skutečně přesně sestavenou elipsou.

K ověření, zda a s jakou přesností byla sestavena elipsa, použijeme větu Pascalovu:

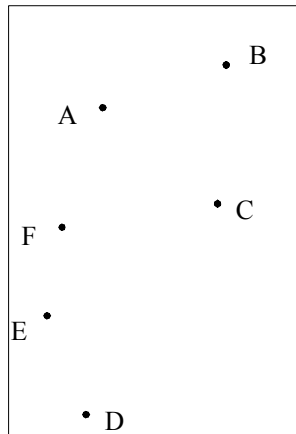
Nutnou a postačující podmínkou, aby šest bodů 1, 2, 3, 4, 5, 6 leželo na kuželosečce, je, aby průsečíky spojnic 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 ležely na jediné přímce, tzv. přímce Pascalově. [HIP]

V obr. 40 bylo zvoleno šest bodů $A - F$, které jsou na obrazu hrany zjevné. K bodu $F = 2$ pak byla pomocí Pascalovy přímky p vyhledána zpřesňující poloha $2'$ (obr. 41). Rozdíl je natolik zanedbatelný, že dále budeme považovat body $A - E$ za body určující elipsu.

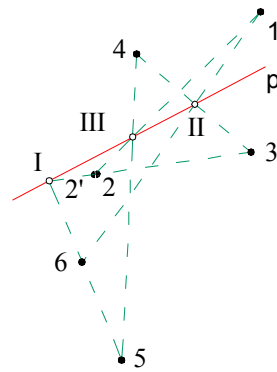
V obr. 42 byly určeny pomocí projektivních a polárních vlastností elipsy z polohy bodů $A - E$ další body G , R , určen střed S elipsy, tečna t v bodě A , sdružené průměry AA' , PQ a nakonec určeny a omezeny osy IJ , KL (obr. 42). Sestavená elipsa byla vložena zpět (obr. 43). Nezbývá, než obdivovat Dürerovu přesnost vyrýsování kuželosečky.

Hlavní bod H obrazu můžeme uvažovat též jako pól elipsy, jeho polára prochází polárně sdruženým bodem H' , který je obrazem středu kruhu a je skutečně i otvorem v kameni (obr. 44 a obr. 43).

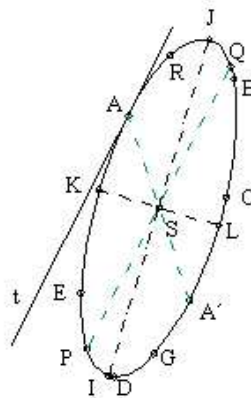
*Poznámka pro zájemce – možný postup řešení úlohy: **Konstrukce elipsy z pěti určujících bodů A , B , C , D , E .***



Obr. 40



Obr. 41



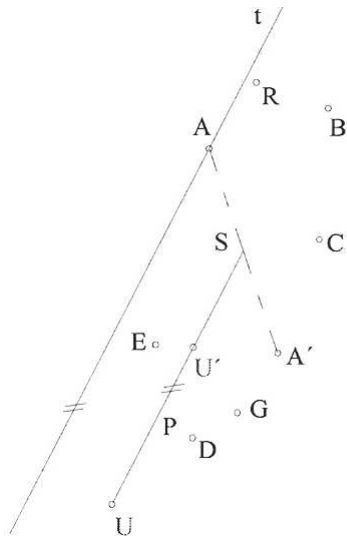
Obr. 42



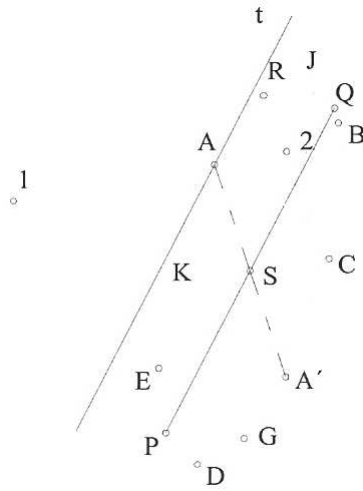
Obr. 43

Cílem je nejprve určit střed elipsy. Využijeme toho, že sestrojíme-li rovnoběžné tětivy elipsy, pak spojnice jejich středů prochází středem elipsy.

- Bodem E sestrojíme rovnoběžku s tětivou AC a pomocí Pascalovy přímky najdeme bod G elipsy. Střed S elipsy bude ležet na spojnici středů tětiv AC , EG
- Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou ED a určíme na ní bod R elipsy. Střed S bude ležet na spojnici středů tětiv ED , CR
- Určíme střed elipsy



Obr. 44



Obr. 45

Dále určíme a omezíme osy elipsy

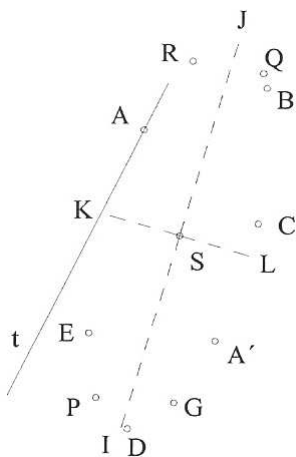
- Určíme nejprve libovolné sdružené průměry elipsy. Nechť jeden je AA' , (A' je středově souměrný s A), sdružený průměr prochází S a je rovnoběžný s t . Omezíme jej na základě polárních vlastností elipsy; přímky EA , EA' , protínají sdružený průměr v bodech U , U' , pro hledaný krajní bod P průměru platí: $|SU| \cdot |SU'| = SP^2$. Bod P sestrojíme pomocí Eukleidovy věty o odvěsňě (obr. 44)
- Poloosy SJ , SK sestrojíme pomocí obecně známé Rytzovy konstrukce (obr. 45)
- Doplníme zbývající vrcholy elipsy (obr. 46)

14 Určení ztracené distance d

Obrazu kruhové podstavné hrany válce opišeme obraz čtverce $XYVW$ (obr. 47). Dvě protější, v prostoru vodorovné, rovnoběžné strany XW a YV leží na tečnách z bodu H , přičemž XW leží v základní rovině.

Délka tětiny – poláry – je délkou strany XY čtverce. Skutečnou velikost $X'Y'$ získáme promítnutím XY z H do perspektivní průmětny, její délka odpovídá $6j$. Je tedy stejná, jako délka hrany krychle.

Hloubková strana čtverce XW musí mít tutéž délku. K měření délky úsečky na hloubkové přímce se využívá, jak již bylo řečeno, distanční bod



Obr. 46

– vyhledáme jej: otočíme XY do základní roviny, spojnice bodů Y^oW protíná h v bodě D_p .

Takto (obr. 47) možná vypadala původní poloha distančního bodu D_p vpravo od bodu H a to ve vzdálenosti 11 j (Dürerem dopočítané). Z tak malé vzdálenosti se malíř dívá na sedící *Melancholii – Geometrii*, jejíž výška odpovídá 13 j! I proto se možná zdá žena tak obrovská (porovnejme ji s věží).

Dürer vepisoval elipsu do obrazu čtverce, jehož hloubková spodní strana leží v rameni QR kompozičního trojúhelníku, odchylka nakloněné roviny od roviny nacházející se mezi nebem a zemí pak odpovídá směru druhého ramene RP . Skutečný průměr mlýnského kamene pak na něm lze přímo změřit.

Správně umístěný pravý distanční bod D_p je v rekonstrukci na obr. 39 sestrojen, i když žádná šrafovací čára v mědirytině nenaznačuje, že by tato konstrukce byla kompozičně využita.

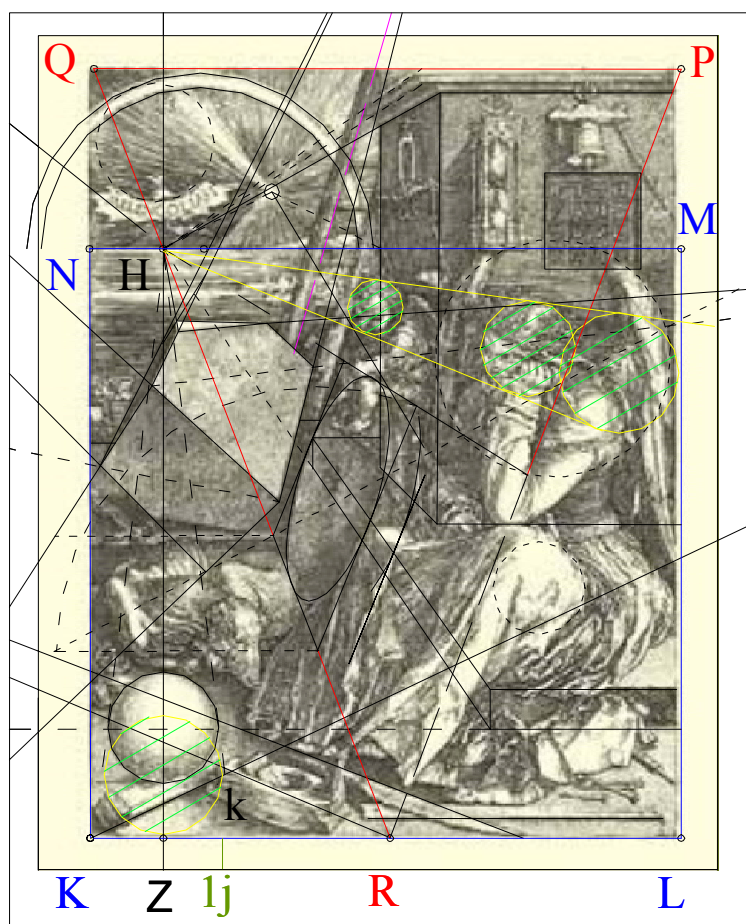
Také po vlastní konstrukci elipsy není v mědirytině ani stopy – nenajdeme ani ohniska, ani osy elipsy, při velkém zvětšení se na jejich pozicích nenachází ani zbytek rýhy z měděného štočku. Došla jsem tedy k závěru, že si autor vyrobil přesnou eliptickou šablonu, kterou pak použil a do štočku obryl. Ve prospěch této myšlenky pak hovoří i další eliptický oblouk, který je evidentně částí téže, ale posunuté elipsy, nikoliv další elipsou, která by se měla v perspektivě od první lišit (viz obr. 38).

Dürer zde nutně narazil ještě na jeden problém, který si dozajista uvědomil: druhá kruhová hrana nakloněného válce by se měla zarýt do



Obr. 49

Možná, že *Geometrie* ukrývá i další krásné problémy. Věřím, že mnohé z nich byly v minulých stoletích vyřešeny, úlohy i jejich řešitelé jsou však bohužel zapomenuty.



Obr. 50

Literatura

- [BaV] Baleka, J., *Výtvarné umění – výkladový slovník*, Academia, Praha, 1997
- [CoU] Coleová, A., *Umění zblízka – Perspektiva*, Perfekt, Bratislava, 1995

- [Fu] Fuchs, E., *Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti*, In: Matematika, fyzika, vzdělávání. VUTIUM, Brno, 29–63, 2004
- [GoU] Gombrich, E. H., *Umění a iluze*, Praha, 1985
- [HeD] Hetteš K., *Dürer*, Bratislava, 1953
- [HIP] Hlavatý, V., *Projektivní geometrie I*, Melantrich, Praha, 1944
- [ChA] Chadraba, R., *Albrecht Dürer*, Orbis, 1964
- [KdP] Kadeřávek, F., *Perspektiva*, Praha, 1922
- [KoA] Kos, J., *Anatomie člověka pro výtvarníky*, Aventinum, 1996
- [KuG] Kupčáková, M., Geometrické úvahy nad Dürerovou Melancholií I, In.: *G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, Bratislava, **2**(4), 2005
- [KuM] Kupčáková, M., *Mnohostěn v Dürerově mědirytině „Melencolia I“* In.: 5th Internacionl Conference Aplimat – Bratislava. Bratislava, 2006
- [KuZ] Kupčáková, M., Znovuobjevování perspektivy v renesanci, In.: Sborník Umění a věda v době Juana Caramuela z Lobkovic. Gaudeamus, Pdf UHK Hradec Králové, 2006
- [LiU] Lionardo da Vinci, *Úvahy o malířství*, Praha, 1941
- [LvZ] Livio, M., *Zlatý řez*, Argo/Dokořán, 2006
- [LüA] Lüdecke, H., *Albrecht Dürer*, Leipzig, 1970
- [MaS] Machala, F., *Středové promítání a lineární perspektiva*, UP Olomouc, 1992
- [MtA] Matvijevskaja, G. P., *Albrecht Djurer – učjonyj*, Moskva, 1987
- [PiD] Pijoan, J., *Dějiny umění 6.*, Odeon, 1980
- [RoL] Romeiová, F., *Leonardo da Vinci*, Svojtka a Vašut, 1995
- [SchN] Schreiber, P., *A New Hypothesis on Dürer's Enigmatic Polyhedron in His Copper Engraving Melencolia I*, In.: *Historia Mathematica* **26**(1999)

[WeF] Weitzel, H., A further hypothesis on the polyhedron of A. Dürer's engraving Melencolia I, In.: *Historia Mathematica* **31**(2004)

[wDs] <http://mathworld.wolfram.com/DuerersSolid.html> (12.10.2005)

[wMe] <http://www.artchive.com/artchive/D/durer/melencol.jpg.html>

Marie Kupčáková

Katedra matematiky PdF UHK

Hradec Králové

e-mail: Marie.Kupcakova@uhk.cz